УДК 517+531.01
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-31

Дата поступления статьи: 3/*VII*/2019
Дата принятия статьи: 16/*VIII*/2019

М.В. Шамолин

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ II. ЗАДАЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

© *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, академик РАЕН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9534-0213

АННОТАЦИЯ

Данная статья является второй работой цикла, при этом дается классификация опорных неисправностей, вводится понятие окрестности опорной неисправности, предложены простейшие математические модели опорных неисправностей и их окрестностей; вводится понятие диагностического пространства, рассматривается его математическая структура, формализующая непрерывность процессов в диагностическом пространстве, показано, что в этом пространстве рассматриваемые опорные неисправности и соответствующие им дифференциальные уравнения невырождены, то есть измеряемые траектории рассматриваемого ЛА с двумя различными опорными неисправностями не могут совпадать. Подготовлен материал к рассмотрению задачи дифференциальной диагностики.

Ключевые слова: классификация неисправностей, окрестность неисправности, диагностическое пространство, задача дифференциальной диагностики.

Цитирование. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть II. Задача дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 22–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-31.

UDC 517+531.01 Submitted: 3/*VII*/2019
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-31 Accepted: 16/*VIII*/2019

M.V. Shamolin

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART II. PROBLEM OF DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS

© *Shamolin Maxim Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, full professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, academic of the Russian Academy of Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9534-0213

ABSTRACT

Proposed work is the second in the cycle, therefore, we present the classification of malfunctions and introduce the concept of reference malfunctions that can occur in the control system of the object and in the neighborhoods of these malfunctions. The simplest possible approaches to mathematical modeling of malfunctions and their neighborhoods are formulated, and the problem of nondegeneracy of reference malfunctions is discussed in detail. The concept of diagnostic space is introduced, and its mathematical structure is defined. We also prepare the material for the consideration of the problem of differential diagnostics.

Key words: classification of malfunctions, neighborhoods of these malfunctions, diagnostic space, problem of differential diagnostics.

Citation. Shamolin M.V. *Zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Chast' II. Zadacha differentsial'noi diagnostiki* [Problems of differential and topological diagnostics. Part II. Problem of differential diagnostics]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 1, pp. 22–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-3-22-31 [in Russian].

1. Математическое моделирование опорных неисправностей

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (см. первую статью данного цикла [1], а также далее систему (9)) и дадим математическое моделирование определенных ранее опорных неисправностей из класса возможных, которые могут произойти в системе управления

$$\xi' = \Phi(\delta), \quad \delta = C(t)u + \phi(\sigma), \quad \sigma = E(t)s. \tag{1}$$

1. Отказ. В силу данного ранее определения, отказ датчика может быть обусловлен исчезновением сигнала, поступившего на вход датчика, или отказом прибора, формирующего оператор при входном сигнале, или и тем, и другим одновременно. Таких комбинаций много. Для простоты выделим из этого множества и математически опишем только следующие:

а) обращение в ноль одной из составляющих ξ_i, $i = 1, 2, 3$, трехмерного вектора ξ, что означает отказ одного из трех каналов управления (1);

б) обращение в ноль одного из коэффициентов матриц

$$C(t) = (c_{ij}(t)), \quad E(t) = (e_{ik}(t)); \quad i = 1, 2, 3, \, j = 1, \ldots, p, \, k = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

которые формируются из вполне определенных физических параметров и удовлетворяют достаточным условиям устойчивости рассматриваемой системы.

При этом, как обычно, система (в том числе датчик), реагирующая только на уже поступивший на вход сигнал, устойчива, если любому ограниченному входному сигналу соответствует ограниченный сигнал на выходе;

в) обращение в ноль одной из составляющих векторов u и s в (1).

Таким образом, будем рассматривать объединение следующих возможных отказов:

$$\begin{gathered} \xi_i = 0, \;\; i = 1, 2, 3, \\ c_{ij} = 0, \;\; u_j = 0, \;\; j = 1, \ldots, p, \\ e_{ik} = 0, \;\; s_k = 0, \;\; k = 1, \ldots, q. \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) включаются и обрывы локальных обратных связей.

2. Сбой. В силу определения, данного ранее, сбой характеризуется отклонением значения того или иного коэффициента (параметра) за пределы допустимых номинальных значений. Если учесть условия (10), то это будет соответствовать тому, что действительное значение одного из коэффициентов c_{ij}, e_{ik} матриц $C(t)$, $E(t)$ в (1) окажется за пределами ограничивающих его констант, то есть сдвинется влево или вправо от этих констант. Запишем это в виде объединения следующих возможностей:

$$\begin{gathered} c_{ij} \notin [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}], \quad \text{то есть} \quad c_{ij} \in (0, \underline{c}_{ij}) \quad \text{или} \\ c_{ij} \in (\overline{c}_{ij}, +\infty), \quad i = 1, 2, 3, \\ e_{ik} \notin [\underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}], \quad \text{то есть} \quad e_{ik} \in (0, \underline{e}_{ij}) \quad \text{или} \\ e_{ik} \in (\overline{e}_{ik}, +\infty), \quad j = 1, \ldots, p, \; k = 1, \ldots, q. \end{gathered} \tag{4}$$

Точно так же *сбоем* является отклонение от номинального значения одного из параметров функций $\Phi(\delta)$ или $\phi(\sigma)$. Например, действительное значение параметра, характеризующего максимальное значение одной из указанных функций, увеличивается или уменьшается.

3. Заклинивание. В силу определения, заклинивание математически можно моделировать следующим образом:

$$\begin{gathered} \xi_i(t) \equiv \xi_i^{\phi x} = \text{const}, \; i = 1, 2, 3; \\ u_j(t) \equiv u_j^{\phi x} = \text{const}, \; j = 1, \ldots, p, \; t_0 \leqslant t \leqslant T; \\ s_k(t) \equiv s_k^{\phi x} = \text{const}, \; k = 1, \ldots, q, \end{gathered} \tag{5}$$

то есть в процессе движения в некоторый момент времени на отрезке $[t_0, T]$ одна из координат $\xi_i(t)$, или $u_j(t)$, или $s_k(t)$ фиксируется (заклинивается) и в дальнейшем не изменяется во времени.

Если на постоянные значения (5) могут накладываться некоторые колебания, например синусоидальные колебания постоянной амплитуды и частоты, то такое заклинивание можно описать следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \xi_i(t) = \xi_i^{\phi x} + a_{\xi_i}^{\phi x} \sin(\omega_{\xi_i}^{\phi x} t + \phi_{\xi_i}^{\phi x}), \\ u_j(t) = u_j^{\phi x} + a_{u_j}^{\phi x} \sin(\omega_{u_j}^{\phi x} t + \phi_{u_j}^{\phi x}), \\ s_k(t) = s_k^{\phi x} + a_{s_k}^{\phi x} \sin(\omega_{s_k}^{\phi x} t + \phi_{s_k}^{\phi x}), \\ i = 1, 2, 3, \; j = 1, \ldots, p, \; k = 1, \ldots, q; \; t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{6}$$

4. Активный отказ, то есть мгновенное изменение в некоторый момент времени t на отрезке $[t_0, T]$ одной из координат, формирующих систему управления, до максимально возможного значения и заклинивания, математически будем моделировать следующим образом:

$$\begin{gathered} \xi_i(t) \equiv \xi_i^{\max} = \text{const}, \; i = 1, 2, 3, \\ u_j(t) \equiv u_j^{\max} = \text{const}, \; j = 1, \ldots, p, \; t_0 \leqslant t \leqslant T, \\ s_k(t) \equiv s_k^{\max} = \text{const}, \; k = 1, \ldots, q. \end{gathered} \tag{7}$$

5. Нарушение симметрии. Математически нарушение симметрии можно моделировать сдвигом начала отсчета сигнала в процессе его формирования датчиком в плоскости одной из функций $\xi_i(t)$, $u_j(t)$, $s_k(t)$. Это можно обеспечить, например, введением запаздывания или упреждения, смещения вдоль оси ординат или тем и другим одновременно. В частности, нарушение симметрии в работе исполнительных органов, движение которых описывается в (9) характеристиками $\Phi(\delta, t)$ и $\phi(\sigma, t)$, моделируется следующим нарушением условий (11):

$$\begin{gathered} \Phi_h(\delta_h, t) \neq 0, \; \text{если} \; \delta_h = 0 \quad \text{или для некоторых} \\ \delta_h = \delta_h^* \neq 0, \quad \delta_h^* \Phi(\delta_h^*, t) \leqslant 0, \\ \phi_h(\sigma_h, t) \neq 0, \; \text{если} \; \sigma_h = 0 \quad \text{или для некоторых} \\ \sigma_h = \sigma_h^* \neq 0, \quad \sigma_h^* \phi(\sigma_h^*, t) \leqslant 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Соотношения (8) описывают ситуации, при которых происходит симметричный сдвиг характеристик исполнительных органов в плоскости функций $\Phi_h(\delta_h, t)$ или $\phi_h(\sigma_h, t)$.

В заключение этого раздела отметим следующее. В настоящей статье не рассматриваются причины возникновения неисправностей, а только их последствия; все формулируется применительно к одиночным неисправностям, но могут в принципе рассматриваться и более сложные комбинации нарушений.

Таковы простейшие представления о математических моделях опорных неисправностей. Предлагаемое моделирование опорных неисправностей необходимо рассматривать только как первоначальный простейший подход к сложной и ответственной задаче диагностики динамических систем, однако требующий избыточную информацию о работе приборов, то есть более глубокого понимания механики динамических процессов, происходящих в этих приборах. Этот подход позволяет более осознанно подойти к задаче диагностики, дать ее строгую математическую постановку и указать алгоритмы решения. Перейдем теперь к определению и описанию окрестностей опорных неисправностей.

2. Окрестности опорных неисправностей

Напомним рассматриваемую систему:

$$\begin{gathered} x' = A(x) + B(x)\xi, \\ \xi' = \Phi(\delta), \\ \delta = C(t)u + \phi(\sigma), \\ \sigma = E(t)s, \end{gathered} \tag{9}$$

где x — фазовый n-мерный вектор состояния, $A(x)$ и $B(x)$ — определенные, непрерывные матрицы-функции; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения ξ_i, $i = 1, 2, 3$, рулей высоты, элеронов, направления; составляющие трехмерных векторов u и s в (9) могут быть приборно измерены или алгоритмически вычислены; элементы матриц $C(t) = (c_{ij}(t))$ и $E(t) = (e_{ik}(t))$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}],\ \underline{c}_{ij} \leqslant \overline{c}_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \\ e_{ik} \in [\underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}],\ \underline{e}_{ik} \leqslant \overline{e}_{ik}, \quad j = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, q, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}, \underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}$ — некоторые постоянные значения.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\phi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h и принадлежат к классу так называемых *допустимых характеристик*, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \Phi_h(\delta_h) = 0, \quad \text{если } \delta_h = 0; \quad \phi_h(\sigma_h) = 0, \quad \text{если } \sigma_h = 0. \\ &2)\ \delta_h \Phi_h(\delta_h) > 0, \quad \text{если } \delta_h \neq 0; \quad \sigma_h \phi_h(\sigma_h) > 0, \quad \text{если } \sigma_h \neq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Впрочем, условие 1 (для непрерывных функций) является следствием условия 2.

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0, +\infty)$ и $[0, -\infty)$ от этих функций расходятся, что гарантирует сходимость решений при $t \to \infty$.

Зависимость от времени матриц C, E в правой части (9) обусловлена тем, что процесс развития неисправностей может явно зависеть от времени.

Напомним также, что конечному набору попарно (в совокупности) различных датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор H опорных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{12}$$

из класса возможных.

Как отмечалось в [2–4], все процессы в рассматриваемой системе (9) предполагаются протекающими непрерывно. Если в некоторый заранее неизвестный момент времени t_0 в системе (9) возникнет некоторая неисправность из списка (12) или неисправность, не предусмотренная списком (12), но "близкая" к какой-нибудь из списочной неисправности, то траектория системы (9) в последующее время при $t \geqslant t_0$ будет непрерывно продолжаемой.

Очевидно, что в силу непрерывности процессов, если неучтенная списком (12) непредвиденная неисправность произойдет в "близкой" к H_j области, то траектории системы (9) с этими неисправностями будут мало отличимы.

Введем понятие окрестности опорной неисправности.

Определение 2.1. *Окрестностью O_j (областью влияния) опорной неисправности H_j из (12) назовем множество точек таких, что если в точке окрестности O_j, включая точку H_j, произойдет не предусмотренная списком (12) неисправность, развивающаяся по заранее неизвестному закону, то траектории системы (9) с этой неисправностью и с неисправностью H_j из (12) будут "мало" отличаться, и она будет распознаваема как одна из опорных неисправностей (12).*

Неисправность, не предусмотренная списком (12), но "близкая" к списочной неисправности H_j из окрестности O_j, то есть такая, при возникновении которой траектории системы будут "мало" отличаться от траекторий системы со списочной неисправностью H_j, будет распознаваться алгоритмом, решающим задачу обнаружения неисправности, как списочная неисправность H_j. Если же не предусмотренная списком (12) неисправность произойдет в области пересечения окрестностей O_j, она может быть обнаружена как одна из списочных неисправностей, окрестности которых образуют область пересечения.

Последнее не должно считаться проблемой. Интерес, главным образом, представляет обнаружение неисправного датчика, а не конкретной неисправности в нем.

Теперь можно дать более конкретные определения окрестностей неисправностей из классификационного списка и рассмотреть простейшие математические модели этих окрестностей.

1. Окрестность отказа. Окрестностью отказа датчика назовем множество точек, распределенных во времени, такое, что любая возникшая и развивающаяся в этом множестве по неизвестному нам закону неисправность, возможно ведущая к отказу, может быть диагностирована как отказ.

Окрестности отказов (3) математически можно моделировать как полосы во времени, ограниченные сверху и снизу максимально и минимально возможными значениями координат ξ_i, u_j, s_k, а для коэффициентов c_{ij} и e_{ik} — максимально возможными их значениями и осью времени t:

$$\begin{gathered}\xi_i \in [\underline{\xi_i}, \overline{\xi_i}],\ \underline{\xi_i} \leqslant \overline{\xi_i},\ i = 1, 2, 3,\\ c_{ij} \in [\underline{c_{ij}}, \overline{c_{ij}}],\ u_j \in [\underline{u_j}, \overline{u_j}],\ j = 1, \ldots, p,\\ e_{ik} \in [\underline{e_{ik}}, \overline{e_{ik}}],\ s_k \in [\underline{s_k}, \overline{s_k}],\ k = 1, \ldots, q.\end{gathered} \tag{13}$$

Определенные таким образом окрестности (13) отказов (3) могут пересекаться только по прямым на оси времени t.

2. Окрестность сбоя. Окрестностью сбоя будем называть множество точек, распределенных во времени, охватывающее множество допустимых значений выходного сигнала датчика и такое, что любая возникшая и развивающаяся во времени в этом множестве неисправность может быть диагностирована по априори фиксированному сбою датчика.

В соответствии с (10) и (4) окрестности сбоев математически можно описать как полосы вдоль оси времени, ограниченные, соответственно, значениями констант $\underline{c_{ij}}, \underline{e_{ik}}, \overline{c_{ij}}, \overline{e_{ik}}$ и нижними $\underline{\underline{c_{ij}}}, \underline{\underline{e_{ik}}}$ и верхними $\overline{\overline{c_{ij}}}, \overline{\overline{e_{ik}}}$ границами, то есть

$$\begin{gathered}\underline{\underline{c_{ij}}} \in (0, \underline{c_{ij}}],\ \underline{\underline{e_{ik}}} \in (0, \underline{e_{ik}}],\ i = 1, 2, 3,\\ \overline{\overline{c_{ij}}} \in [\overline{c_{ij}}, \infty),\ \overline{\overline{e_{ik}}} \in [\overline{e_{ik}}, \infty),\ j = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, q.\end{gathered} \tag{14}$$

Определенные таким образом окрестности (14) сбоев (4) не пересекаются между собой, то есть окрестности сбоев различных датчиков также не пересекаются.

Окрестности отказа и сбоя для данного датчика, вообще говоря, могут не пересекаться, но могут и пересекаться. В последнем случае непредвиденные неисправности, происшедшие в области пересечения, могут быть диагностированы или как отказ, или как сбой, или как отказ и сбой *одновременно*. В любом случае неисправный датчик будет диагностирован алгоритмом обнаружения неисправностей.

3. Окрестность заклинивания. Окрестность заклинивания можно выбрать в виде полосы, ограниченной сверху прямой $\xi_i^+(t)$ (или прямыми $u_j^+(t)$, $s_k^+(t)$) и снизу прямой $\xi_i^-(t)$ (или прямыми $u_j^-(t)$, $s_k^-(t)$), включающей в себя соответствующий режим (5) или (6).

4. Окрестность активного отказа (7) может быть описана как полуполоса, ограниченная сверху одним из значений $\xi_i^{\max}$, $u_j^{\max}$, $s_k^{\max}$, а снизу некоторой прямой $\xi_i^{(-)}$, $u_j^{(-)}$, $s_k^{(-)}$, соответственно, или полуполосой, ограниченной снизу одним из значений $\xi_i^{\min}$, $u_j^{\min}$, $s_k^{\min}$, а сверху некоторой прямой $\xi_i^{(+)}$, $u_j^{(+)}$, $s_k^{(+)}$, соответственно.

5. Окрестность нарушения симметрии можно моделировать окружностью с центром в точке сдвига радиуса r_{ξ_i}, r_{u_j} или r_{s_k}, которая перемещается вместе с точкой сдвига, или, что то же самое, полосой шириной $2r_{\xi_i}$, $2r_{u_j}$ или $2r_{s_k}$, соответственно.

Приближенные границы рассмотренных в настоящем разделе окрестностей возможных опорных неисправностей априори могут быть найдены, если это необходимо, различными численными методами.

В дальнейшем окрестности O_j опорных неисправностей H_j из априорного списка (12) считаются *открытыми* множествами.

Определение 2.2. *Опорные неисправности (12) из класса возможных, окрестности которых не пересекаются или пересекаются только вдоль прямых по оси времени, назовем невырожденными.*

Таким образом, конечному набору попарно (в совокупности) различных датчиков системы управления (1) движением объекта, описываемым дифференциальными уравнениями (9), можно поставить в соответствие конечный набор (12) опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.

Если для конкретного датчика некоторые окрестности неисправностей, которыми он представлен в наборе (12), пересекаются, то это, как уже отмечалось, не следует считать проблемой. Важно уметь диагностировать датчик, в котором произошла неисправность.

Определение 2.3 *Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков, которой становится в соответствие набор возможных опорных неисправностей H_j с их окрестностями O_j, подвергающихся диагностированию посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.*

В заключение рассмотрим математическую структуру всего диагностического пространства:

$$(M; O_1, O_2, \ldots, O_l; A_1, A_2, A_3), \tag{15}$$

где M — множество неисправностей $H_1, \ldots, H_l$ из (12) вместе с их окрестностями $O_1, \ldots, O_l$.

Аксиомы A_1, A_2, A_3 определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} A_1: \ \forall H_j \in M \ \exists O_j \ (H_j \subset O_j); \\ A_2: \ \forall O_j \ \exists H_j \ (H_j \subset O_j); \\ A_3: \ H_j \subset O_j \cap O_k \Rightarrow \exists O_\mu \ (H_j \subset O_\mu \subset O_j \cap O_k \vee O_\mu \subset O_j \cup O_k). \end{gathered} \tag{16}$$

Аксиома A_1 утверждает, что окрестности O_j, являющиеся подмножествами множества M, покрывают все M, а из аксиомы A_2 следует, что эти окрестности не пусты.

Аксиома A_3 позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j:

$$H_j = \lim_{\mu\to\infty} O_\mu \Leftrightarrow \forall O_\mu \ \exists \overline{M} \ (\mu > \overline{M} \Rightarrow H_j \subset O_\mu),$$

каждая окрестность O_μ которого содержит H_j и "близкие" к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (12) неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях O_j, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей (12).

Если же под элементом x понимать не только событие H_j, но и непредвиденное событие (не включенное в список H возможных неисправностей (12)), которое может произойти в любой точке M и которое требуется диагностировать посредством H_j, то аксиомы математической структуры диагностического пространства (15) могут быть записаны в следующем виде:

$$A_1: \ \forall x \in M \ \exists O_i \ (x \in O_i),$$

то есть окрестности покрывают все M;

$$A_2: \ \forall O_i \ \exists x \ (x \in O_i),$$

то есть окрестности не пусты;

$$A_3: \ x \in O_i \cap O_j \Rightarrow \exists O_k \ (x \in O_k \subset O_i \cap O_j \vee O_k \subset O_i \cup O_j),$$

то есть окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу x.

Предел последовательности $\{O_k\}$ можно определить как элемент

$$x = \lim_{k\to\infty} O_k,$$

каждая окрестность $O_j(x)$ которого содержит H_j и "близкие" к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (12) неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях $O_j(H_j)$, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей (12):

$$x = \lim_{k\to\infty} O_k \Leftrightarrow \forall O_k(x) \ \exists \overline{K} \ (k > \overline{K} \Rightarrow x \in O_k, H_j \subset O_k, j = 1, \ldots, l).$$

Математическая структура диагностического пространства (15) позволяет обеспечить ситуацию, при которой решения системы (9) и этой системы с неисправностями (12) в системе управления (1) с одинаковыми начальными условиями x^0 из некоторого ограниченного пространства будут отличаться (различимы) друг от друга, а решения системы (9) с опорной неисправностью H_j из (12) и с не предусмотренной списком (12) (непредвиденной) неисправностью из окрестности O_j этой опорной неисправности с одинаковыми начальными условиями x^0 будут "близкими", то есть "мало" отличаться друг от друга, и они могут быть диагностированы как опорные неисправности.

Это во всяком случае будет справедливо для непересекающихся окрестностей O_j, $j = 1, \ldots, l$, или окрестностей, пересекающихся только вдоль прямых по оси времени.

Перейдем теперь к постановке задачи дифференциальной диагностики.

3. Задача дифференциальной диагностики

Дифференциальная диагностика алгоритмическим способом решает задачу обнаружения неисправности, возникшей в управляемой динамической системе, вычислительными средствами, исходя из знания математической модели движения системы, некоторой информации о возможных неисправностях в системе и имеющейся внешнетраекторной информации.

Как уже отмечалось, задачу дифференциальной диагностики целесообразно разрабатывать одновременно с проектированием конкретной системы. В частности, разработку задачи диагностики системы управления движением объекта целесообразно совместить с синтезом системы управления.

Будем рассматривать объекты, движение которых может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$x' = f(x, u, t) = f_0(x, t), \tag{17}$$

где x — вектор $(n \times 1)$, характеризующий отклонение от режима, предписанного целью управления. Относительно управлений

$$u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^m$$

будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной замкнутой области U, то есть

$$u(t) \in U. \tag{18}$$

Цель управления будет формализоваться следующим тождеством:

$$x(t) \equiv 0. \tag{19}$$

Рассмотрим далее функцию Ляпунова $\nu(x,t) > 0$ и пару [5; 6]

$$\{\nu(x,t); u(x,t)\}, \tag{20}$$

где $u(x,t) \in U$.

Пара (20) позволяет синтезировать [5; 7; 8] допустимое управление, удовлетворяющее (18), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (19) нелинейной системы (17).

Пусть, кроме того, известен конечный набор (12) опорных невырожденных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l \tag{21}$$

в системе управления объектом, движение которого описывается уравнениями (17), и, значит, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \|u_j(x,t)\|_{j=1}^l. \tag{22}$$

Набор функций (22) не изменяет фазового пространства системы (17); функции, его составляющие, отличаются той или иной неисправностью и необязательно удовлетворяют в области параметров системы (17) условиям асимптотической устойчивости решения (19), определяемым функцией $\nu(x,t)$ в (20).

Конечному набору управления (22) поставим в соответствие следующий набор систем дифференциальных уравнений:

$$x' = f_j(x,t),\ j = 1,\ldots,l, \tag{23}$$

где $f_j(x,t)$ — соответствующие неисправностям (21) в управлениях (22) известные вектор-функции размеров $(n \times 1)$, отличные друг от друга и от функции $f_0(x,t)$ в (17).

Модели (17) и (23) принадлежат одному и тому же фазовому пространству и отличаются лишь структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция $f_0(x,t)$ в (17) заменяется на одну из функций $f_j(x,t)$, $j = 1,\ldots,l$, из (23), то траектория системы (17) непрерывно продолжается одной из траекторий системы (23) [9–11].

Задача дифференциальной диагностики может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны дифференциальные уравнения (17) и (23) и значение фазового вектора в начальный момент времени $x(t_0)$.

Требуется построить функционал

$$S_j = \Phi(x(t), x(t_0), f_j(x,t), \tau - \tau_0),\ j = 0,\ldots,l,$$

решающий задачу дифференциальной диагностики, то есть задачу однозначного распознавания возникшей в диагностическом пространстве (15) системы (17) неисправности по априорному набору (21) опорных невырожденных неисправностей. Данная задача решается минимизацией по j, то есть осуществлением процесса обработки выходной информации в силу уравнений (17) и (23) по входной информации о состоянии системы в момент времени t_0 и последующего слежения за траекторией объекта (17) на интервале времени $[\tau_0, \tau]$, где $\tau - \tau_0$ — время диагностики [12–14].

В дальнейшем будет лишь показано, что множество функционалов и алгоритмов, решающих поставленную задачу, не пусто. Будет дано замкнутое решение задачи. При этом будем исходить из того, что задачу дифференциальной диагностики управляемых динамических систем и, в частности, задачу диагностики систем управления движением этих систем можно представить в виде двух самостоятельных последовательно решаемых задач: *задачи контроля* и *задачи диагностирования* [15–17].

Задача контроля устанавливает критерий наличия неисправности в системе, а *задача диагностирования* устанавливает критерий поиска и обнаружения датчика, в котором произошла неисправность при условии, что известен априорный список возможных опорных неисправностей [18; 19].

Заключение

В настоящем цикле работ применительно к объектам, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, предлагаются простые подходы решения задач дифференциальной диагностики управляющих систем этих объектов, опирающиеся на знание законов классической механики и основанные на сравнении действительного и возможных состояний объекта [20–22]. Эти подходы являются естественным продолжением дифференциальной теории управления движущимися объектами, работающими в идеальных условиях и в условиях воздействия шумов, и требуют более глубокого понимания и математического описания динамики отдельных узлов системы управления и ее возможных состояний [23; 34].

При этом заметим, что в действительности системы (17) и (23) являются системами с неполной информацией, и неисправности в системе (17) могут возникать и развиваться по законам, которые не предусмотрены системами (23), а начальные условия систем (17) и (23) в общем случае определены ограниченными множествами [25–27]. Поэтому при решении задач контроля и диагностирования на этапе проектирования на уровне математических моделей и программ целесообразно использовать статистический метод теории вероятностей и получать, таким образом, детерминированный аналог решения задачи диагностики, который и должен реализовываться на борту реального объекта [28; 29].

В следующих частях цикла работ перейдем к постановке и решению задач контроля и диагностирования [30; 31].

Литература

[1] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 32–43. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43.

[2] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 775–790. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v5/i3/p775

[3] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Экзамен, 2007.

[4] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114. № 1. P. 976–1024. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021807110899.

[5] Пархоменко П.П., Сагомонян Е.С. Основы технической диагностики. М.: Энергия, 1981. URL: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html.

[6] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: http://www.mathnet.ru/links/de5a43c9190986a24a68c6792ada55e9/at7158.pdf.

[7] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. М.: Изд-во МГУ, 1983.

[8] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/at/y1987/i10/p38.

[9] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/at/y1994/i3/p24.

[10] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117908010037.

[11] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. DOI: https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9.

[12] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/vmumm/y2001/i1/p29.

[13] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization // Oper. Res. Lett. 2003. Vol. 31. № 3. P. 167–175. URL: https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/becka/papers/3.pdf.

[14] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography // SIAM J. Optim. 2001. Vol. 12. № 1. P. 79–108. DOI: 10.1137/S1052623499354564.

[15] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights // J. Machine Learning Res. 2016. № 17(153). P. 1–43. URL: https://www.researchgate.net/publication/311221666_A_differential_equation_for_modeling_Nesterov's_accelerated_gradient_method_Theory_and_insights.

[16] Шамолин М.В. Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование. 2011. Т. 33. № 3. С. 121–126. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1.

[17] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование. 2010. Т. 32. № 5. С. 31–44. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61677/04-Shamolin1.pdf?sequence=1.

[18] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions // SIAM J. Control. 1968. Vol. 6. № 2. P. 194–214. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0038942

[19] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2014. Vol. 50. № 3. P. 2119–2326. DOI: 10.1109/TAES.2013.130074.

[20] Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition / D.-T. Ho [et al.] // J. Intelligent Robot. Syst. 2015. Vol. 78. № 1. P. 159–179. DOI: https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5.

[21] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes // Acta Appl. Math. 2002. Vol. 74. № 2. P. 155–175. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1020669212384.

[22] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model // Math. Meth. Oper. Res. 2009. Vol. 70. P. 567–596. DOI: https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7.

[23] Power control in wireless cellular networks / M. Chiang [et al.] // Foundations and Trends in Networking. 2008. Vol. 2. № 4. P. 381–533. URL: https://www.princeton.edu/ chiangm/pc.pdf.

[24] Power control in wireless cellular networks / E. Altman [et al.] // IEEE Trans. Autom. Contr. 2009. Vol. 54. № 10. P. 2328–2340.

[25] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems // SIAM J. Control Optimization. 1991. Vol. 29. № 6. P. 1251–1287. DOI: 10.1137/0329065.

[26] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra Appl. 1989. Vol. 122–124. P. 23–64. DOI: 10.1016/0024-3795(89)90646-0.

[27] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues // Systems Contr. Lett. 2002. Vol. 46. P. 323–342. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0

[28] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms // Int. J. Contr. 1985. vol. 42. P. 65–70. DOI: https://doi.org/10.1080/00207178508933346.

[29] Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems // Int. J. Contr. 1976. Vol. 3. P. 1–16. DOI: 10.1016/j.protcy.2012.05.144.

[30] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm // Lin. Alg. Appl. 2007. Vol. 425. № 2–3. P. 404–433. DOI: 10.1016/j.laa.2006.09.029.

[31] Tang X., Wang S. A Low Hardware Overhead Self-diagnosis Technique Using ReedSolomon Codes for Self-repairing Chips // IEEE Trans. Comput. 2010. Vol. 59. № 10. P. 1309–1319. DOI: 10.1109/DSN.2009.5270327.

References

[1] Shamolin M.V. *(*Zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Chast' 1. Uravneniya dvizheniya i klassifikatsiya neispravnostei) [Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43

[2] Borisenok I.T., Shamolin M.V. *Reshenie zadachi differentsial'noi diagnostiki* [Resolving a problem of differential diagnostics] *Fundament. i prikl. matem.* [Fundamental and Applied Mathematics], 1999, Vol. 5, Issue 3, pp. 775–790. Available at: http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v5/i3/p775 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. *Nekotorye zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Izdanie 2-e, pererab. i dopoln.* [Certain Problems of Differential and Topological Diagnostics. 2nd edition, revised and enlarged]. M.: Ekzamen, 2007. [in Russian].

[4] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics *J. Math. Sci.*, 2003, Vol. 114, no. 1, pp. 976–1024. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021807110899 [in English].

[5] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. *Osnovy tekhnicheskoi diagnostiki* [Foundations of Technical Diagnostics]. M.: Energiya, 1981. Available at: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html [in Russian].

[6] Mironovskii L.A. *Funktsional'noe diagnostirovanie dinamicheskikh sistem* Functional Diagnosing of Dynamical Systems. *Avtomatika i Telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1980, no. 8, pp. 96–121. Available at: http://www.mathnet.ru/links/de5a43c9190986a24a68c6792ada55e9/at7158.pdf [in Russian].

[7] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. *Strukturnye i algoritmicheskie aspekty modelirovaniya dlya zadach upravleniya* [Structural and Algorithmic Aspects of Modeling for Control Problems]. M.: Izd-vo MGU, 1983. [in Russian].

[8] Chikin M.G. *Sistemy s fazovymi ogranicheniyami* [Phase-Constrained Systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1987, no. 10, pp. 38–46. Available at: http://mi.mathnet.ru/rus/at/y1987/i10/p38 [in Russian].

[9] Zhukov V.P. *O dostatochnykh i neobkhodimykh usloviyakh asimptoticheskoi ustoichivosti nelineinykh dinamicheskikh sistem* [On Sufficient and Necessary Conditions for the Asymptotic Stability of Nonlinear Dynamical Systems] *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1994, no. 3, pp. 24–36. Available at: http://mi.mathnet.ru/rus/at/y1994/i3/p24 [in Russian].

[10] Zhukov V.P. *O dostatochnykh i neobkhodimykh usloviyakh grubosti nelineinykh dinamicheskikh sistem v smysle sokhraneniya kharaktera ustoichivosti* = On the Sufficient and Necessary Conditions for Robustness of the Nonlinear Dynamic Systems in Terms of Stability Retention]. *Avtomatika i telemekhanika* = Automation and Remote Control, 2008, Volume 69, Issue 1, pp. 27–35. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117908010037 [in English].

[11] Zhukov V.P. Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method. *Automation and Remote Control*, 2005, Vol. 66, Issue 12, pp. 1916–1928. DOI: https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9 [in English].

[12] Borisenok I.T., Shamolin M.V. *Reshenie zadachi differentsial'noi diagnostiki metodom statisticheskikh ispytanii* [Solving the problem of differential diagnostics by the method of statistical tests]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin], 2001, no. 1, pp. 29–31. Available at: http://mi.mathnet.ru/rus/vmumm/y2001/i1/p29 [in Russian].

[13] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. *Oper. Res. Lett.*, 2003, Vol. 31, no. 3, pp. 167–175. Available at: https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/becka/papers/3.pdf [in English].

[14] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM J. Optim.*, 2001, Vol. 12, no. 1, pp. 79–108. DOI: 10.1137/S1052623499354564 [in English].

[15] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights, *J. Machine Learning Res.*, 2016, No. 17(153), pp. 1–43. Available at: https://www.researchgate.net/publication/311221666_A_differential_equation_for_modeling_Nesterov's_accelerated_gradient_method_Theory_and_insights [in English].

[16] Shamolin M.V. *Diagnostika girostabilizirovannoi platformy, vklyuchennoi v sistemu upravleniya dvizheniem letatel'nogo apparata* [Diagnostics of Gyro-Stabilized Platform, Included in the Aircraft Motion Control System]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2011, Vol. 33, no. 3, pp. 121–126. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1 [in Russian].

[17] Shamolin M.V. *Diagnostika dvizheniya letatel'nogo apparata v rezhime planiruyushchego spuska* [Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2010, Vol. 32, no. 5, pp. 31–44. Available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61677/04-Shamolin1.pdf?sequence=1 [in Russian].

[18] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. *SIAM J. Control*, 1968, Vol. 6, no. 2, pp. 194–214. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0038942 [in English].

[19] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 2014, Vol. 50, no. 3, pp. 2119–2326. DOI: 10.1109/TAES.2013.130074 [in English].

[20] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition, *J. Intelligent Robot. Syst.*, 2015, Volume 78, Issue 1, pp. 159–179. DOI: https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5 [in English].

[21] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Appl. Math.*, 2002, Vol. 74, Issue 2, pp. 155–175. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1020669212384 [in English].

[22] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Math. Meth. Oper. Res.*, 2009, Vol. 70, pp. 567–596. DOI: https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7 [in English].

[23] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power Control in Wireless Cellular Networks. In: *Foundation and Trends in Networking*, 2008, Vol. 2, Issue 4, pp. 381–533. Available at: https://www.princeton.edu/ chiangm/pc.pdf [in English].

[24] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2009, Vol. 54, Issue 10, pp. 2328–2340 [in English].

[25] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM J. Control Optimization*, 1991, Vol. 29, Issue 6, pp. 1251–1287. DOI: 10.1137/0329065 [in English].

[26] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra Appl.*, 1989, Vol. 122-124, pp. 23–64. DOI: 10.1016/0024-3795(89)90646-0 [in English].

[27] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Systems Contr. Lett.*, 2002, Vol. 46, pp. 323–342. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0 [in English].

[28] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms. *Int. J. Contr.*, 1985, vol. 42, pp. 65–70. DOI: https://doi.org/10.1080/00207178508933346 [in English].

[29] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems. *Int. J. Contr.*, 1976, Vol. 3, pp. 1–16. DOI: 10.1016/j.protcy.2012.05.144 [in English].

[30] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, Vol. 425, no. 2-3, pp. 404–433. DOI: 10.1016/j.laa.2006.09.029 [in English].

[31] Tang X., Wang S. A Low Hardware Overhead Self-diagnosis Technique Using Reed-Solomon Codes for Self-repairing Chips. *IEEE Trans. Comput.*, 2010, Vol. 59, no. 10, pp. 1309–1319. DOI: 10.1109/DSN.2009.5270327 [in English].