МАТЕМАТИКА

УДК 517.9; 544.034
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-7-11

Дата поступления статьи: 10/*VII*/2019
Дата принятия статьи: 23/*VIII*/2019

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

К ВОПРОСУ О ДРОБНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ. ЧАСТЬ II

© *Гладков Сергей Октябринович* — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.
E-mail: sglad51@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2755-9133
Богданова Софья Борисовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.
E-mail: sonjaf@list.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8503-1794

АННОТАЦИЯ

В статье продолжено исследование с помощью определения дробной производной по Фурье, намеченное в предыдущей статье "К вопросу о дробном дифференцировании". Приводятся явные выражения для дробных производных довольно широкого класса периодических функций и для функций, представляемых в виде вейвлет-разложений. Показано, что для класса степенных функций все производные с нецелым показателем равны нулю. Найденные производные имеют прямое отношение к практическим задачам и позволяют использовать их при решении большого класса проблем, связанных с изучением таких явлений, как теплопроводность, проводимость, электрическая и магнитная восприимчивость для широкого спектра материалов, обладающих фрактальными размерностями.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, интеграл Фурье, ряд Фурье, периодические функции, вейвлет-разложения, гауссова экспонента, степенные функции, численное моделирование.

Цитирование. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 7–11. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-7-11.

UDC 517.9; 544.034
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-7-11

Submitted: 10/ *VII*/2019
Accepted: 23/ *VIII*/2019

S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova

TO THE QUESTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION. PART II

© *Gladkov Sergey Oktjabrinovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, 125993, Russian Federation.
E-mail: sglad51@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2755-9133
Bogdanova Sofya Borisovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, assistant professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, 125993, Russian Federation.
E-mail: sonjaf@list.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8503-1794

ABSTRACT
In the paper the investigation continues with the help of definition Fourier fractional differentiation setting in the previous paper "To the question of fractional differentiation". There were given explicit expressions of a fairly wide class of periodic functions and for functions represented in the form of wavelet decompositions. It was shown that for the class of exponential functions all derivatives with non-integer exponent are equal to zero. The found derivatives have a direct relationship to practical problems and let them use to solve a large class of problems associated with the study of phenomena such as thermal conduction, transmissions, electrical and magnetic susceptibility for a wide range of materials with fractal dimensions.

Key words: fractional differentiation, Fourier integral, Fourier's series, periodical functions, wavelet decompositions, Gaussian exponent, exponential functions, numerical simulation.

Citation. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K voprosu o drobnom differentsirovanii. Chast' II* [To the question of fractional differentiation. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 3, pp. 7–11. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-3-7-11 [in Russian].

Введение

Настоящая статья является логическим продолжением предыдущей авторской работы [1], где был намечен алгоритм вычисления дробных производных исходя не из определения дробной производной по Хилферу или из определения Римана – Лиувилля, которые, как правило, и используются в задачах, связанных с приложением аппарата дробного дифференцирования, а с помощью строго обоснованного подхода Фурье в духе разложения в интеграл Фурье (см. [1], а также практическое приложение этого метода, использованного в работах [2; 3]).

Придерживаясь этого подхода, мы приведем сейчас некоторые новые результаты, полученные в процессе вычисления дробных производных по Фурье.

Но предварительно остановимся на записи ряда общих выражений для дробных производных, полученных нами ранее в работе [1] и которые стоит сейчас напомнить ввиду необходимости их применения в процессе изложения нижеследующего материала. Действительно, в весьма компактном виде они могут быть записаны следующим образом.

1. $f(x) = \sin ax$. Тогда дробная производная от нее будет

$$\partial^{1+\varepsilon} \sin(ax) = a^{1+\varepsilon} \cos\left(ax + \pi\varepsilon\left(n + \frac{1}{2}\right)\right). \tag{1}$$

2. Если $f(x) = \cos ax$, то имеем

$$\partial^{1+\varepsilon} \cos(ax) = -a^{1+\varepsilon} \sin\left(ax + \pi\varepsilon\left(n + \frac{1}{2}\right)\right). \tag{2}$$

3. Для $f(x) = e^{-x^2}$ получаем

$$\partial^{1+\varepsilon}\left(e^{-ax^2}\right) = 2^{\frac{1+\varepsilon}{2}} a^{\frac{1+\varepsilon}{2}} e^{-\frac{a}{2}x^2} CylinderD\left(1+\varepsilon, -\sqrt{2a}x\right), \tag{3}$$

где $CylinderD\,(b,\xi)-$ функция параболического цилиндра, для которой имеет место равенство: $CylinderD\left(-b-\frac{1}{2},\xi\right) = CylinderU\,(b,\xi) = y\,(\xi)$, где функция $y\,(x)$ должна удовлетворять уравнению $y'' - \left(\frac{1}{4}x^2+b\right)y = 0$.

Из свойств функций параболического цилиндра следует, что при $\varepsilon = 0$ получается правильная производная $f' = -2axe^{-ax^2}$. Легко проверить, что для любых целых значений ε также получаются правильные выражения для высших производных от функции Гаусса.

4. В случае степенной функции, когда $f\,(x) = x^m$, где $m-$ любое целое неотрицательное число, то, например, при $m = 1$ имеем

$$\partial^{1+\varepsilon}\left(x^1\right) = \lim_{k\to 0}\,(ik)^{\varepsilon}\,e^{ikx}(\varepsilon+1+ikx). \tag{4}$$

Как видно, при $\varepsilon = 0$ получаем $f' = 1$, а для всех остальных значений ε получаются нули.

Заметим здесь, что при $m > 1$ для целых значений ε мы приходим к определениям обычных производных, что указывает на корректность вычисленного общего выражения $\partial^{1+\varepsilon}x^m$ [1], как и должно быть, однако в случае произвольных ε дробные производные от степенных функций, если $m > 1$, не существуют. Этот довольно важный вывод указывает на то, что далеко не каждая функция может иметь дробную производную, а потому о подобного рода функциях в настоящей статье мы говорить не будем.

1. Класс периодических функций

Рассмотрим теперь класс функций $f\,(x)$, периодических на некотором сегменте $x \in [-l,l]$. В соответствии с общими принципами теории рядов Фурье мы имеем право разложить этот класс функций по синусам и косинусам. Имеем

$$f\,(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\right], \tag{5}$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются через интегралы Эйлера — Фурье

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f\,(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f\,(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{6}$$

В соответствии с определением дробных производных в (1) и (2), для любого класса периодических функций немедленно получаем для них следующее правило дробного дифференцирования:

$$\begin{gathered}\partial^{1+\varepsilon}f\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\partial^{1+\varepsilon}\cos\left(\tfrac{\pi nx}{l}\right) + b_n\partial^{1+\varepsilon}\sin\left(\tfrac{\pi nx}{l}\right)\right] = \\ = \left(\tfrac{\pi}{l}\right)^{1+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\varepsilon}\left[b_n\sin\left(\tfrac{\pi nx}{l}+\pi\varepsilon\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right) - a_n\cos\left(\tfrac{\pi nx}{l}+\pi\varepsilon\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right)\right].\end{gathered} \tag{7}$$

2. Вейвлет-разложения

В качестве еще одного примера аналитического вычисления дробных производных, можно отметить, например, вейвлет-разложения [4–9], которые часто применяются в решении различного рода физических задач, где необходимо использовать наилучшую аппроксимацию с целью аналитического описания сложных хаотических явлений. Например, они могут быть использованы в теории приема и передачи радиосигналов в условиях их сильного искажения.

Как известно [5], в качестве наиболее простых базовых вейвлетов, как правило, используются производные от функции Гаусса:

$$y_n = (-1)^{n+1}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right), \tag{8}$$

которые имеют наилучшую локализацию как во временной, так и в пространственной областях. Например, производная первого порядка

$$y_1(x) = -x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{9}$$

используется для создания вейвлетов нечетной формы, называемых WAVE-вейвлетами

$$\psi_1\,(x,a,b) = K\frac{x-b}{a}\exp\left(-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right), \tag{10}$$

где K — числовой нормирующий множитель.

По производной второго порядка находится симметричный МНАТ-вейвлет

$$\psi_2(x,a,b) = K\frac{x-b}{a}\left\{1-2\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right\}e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}. \tag{11}$$

Поэтому, в соответствии с определением (3), WAVE-вейвлет (10) в виде дробной производной можно представить как

$$\psi_{1+\varepsilon}(x,a,b) = K_\varepsilon \partial^{1+\varepsilon}\exp\left(-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right) = K_\varepsilon 2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}a^{\frac{1+\varepsilon}{2}}e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}CylinderD\left(1+\varepsilon,-\sqrt{2a}\,(x-b)\right). \tag{12}$$

Далее, если воспользоваться определением дробной производной по Фурье в виде

$$\partial^{2+\varepsilon}f = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(ik)^{2+\varepsilon}f_k e^{ikx}dk, \tag{13}$$

то для гауссовой функции с помощью MAPLE-17 мы получаем, что

$$\begin{gathered}
\partial^{2+\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{a^2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)}\{\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\left(2i2^{\frac{\varepsilon}{2}}xa^{-3-\varepsilon}CylinderD(1+\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - i2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - \\
-i2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\varepsilon\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2i2^{\frac{\varepsilon}{2}}a^{-3-\varepsilon}xCylinderD\left(1+\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + i2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - \\
-i2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\varepsilon\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - 2i2^{\frac{\varepsilon}{2}}a^{-3-\varepsilon}xCylinderD\left(1+\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - i2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}xCylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + \\
+i2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2i2^{\frac{\varepsilon}{2}}a^{-3-\varepsilon}xCylinderD\left(1+\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - i2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\varepsilon\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + \\
+i2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\varepsilon\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - 2^{\frac{\varepsilon+2}{2}}xa^{-3-\varepsilon}CylinderD\left(1+\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2^{\frac{\varepsilon+2}{2}}xa^{-3-\varepsilon}CylinderD\left(1+\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) - \\
-2^{\frac{\varepsilon+2}{2}}xa^{-3-\varepsilon}CylinderD\left(1+\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\varepsilon\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\varepsilon\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + \\
+2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\varepsilon\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\times \\
\times\varepsilon\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + \\
+2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right) + 2^{\frac{\varepsilon+1}{2}}a^{-2-\varepsilon}CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right)\}.
\end{gathered} \tag{14}$$

В результате упрощения этого выражения окончательно находим

$$\partial^{2+\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{a^2}} = -\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)}{2^{\frac{1-\varepsilon}{2}}a^{2+\varepsilon}\sqrt{\pi}}\left\{(1+\varepsilon x)\,CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)+\sqrt{2}xa^{-1}CylinderD\left(1+\varepsilon,-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\right\}. \tag{15}$$

Поэтому для симметричного МНАТ-вейвлета обобщение выражения (11) для второй дробной производной в соответствии с определением (15) будет

$$\begin{gathered}
\psi_{2+\varepsilon}(x,a,b) = K_\varepsilon\partial^{2+\varepsilon}\exp\left(-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right) = \\
= -K_\varepsilon\frac{\exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)}{2^{\frac{1-\varepsilon}{2}}a^{2+\varepsilon}\sqrt{\pi}}\left\{(1+\varepsilon(x-b))\,CylinderD\left(\varepsilon,-\frac{(x-b)\sqrt{2}}{a}\right)+\right. \\
\left.+\sqrt{2}\,(x-b)\,a^{-1}CylinderD\left(1+\varepsilon,-\frac{(x-b)\sqrt{2}}{a}\right)\right\}
\end{gathered} \tag{16}$$

Заключение

Таким образом, стоит еще раз обратить внимание на следующие важные моменты.

1. Найден новый класс дробных производных, определяемых с помощью разложения Фурье и вейвлет-функций.

2. Приведены аналитические выражения для этих производных при произвольном значении ε.

3. Полученные результаты могут быть применены также при решении различных уравнений математической физики [10] в пространствах дробной размерности.

Литература

[1] Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании // Вестник Самарского ун-та. 2018. Т. 24. № 3. С. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13.

[2] Гладков С.О. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 8–12. URL: https://journals.ioffe.ru/articles/33167.

[3] Гладков С.О. К теории гидродинамических явлений в квазиодномерных системах // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 130–132. URL: https://journals.ioffe.ru/articles/38956.

[4] Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с. URL: http://en.bookfi.net/book/445607.

[5] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001. 464 с. URL: http://en.bookfi.net/book/599534.

[6] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 672 с. URL: https://ru.b-ok.xyz/book/2390278/855065.

[7] Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170. DOI: 10.3367/UFNr.0166.199611a.1145.

[8] Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 206 с. URL: https://techlibrary.ru/b/2j1p1r1p1b2d1f1c_2j.2q.,_2k1r1j1b1u1o1j1o_2j.2k._3a1f1p1r1j2g_1j_1q1r1a1l1t1j1l1a_1c1f1k1c1m1f1t-1q1r1f1p1b1r1a1i1p1c1a1o1j2g._1999.pdf.

[9] Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб: СПбГТУ, 1999. 132 с. URL: http://www.pseudology.org/science/VvedenieTeoriabazisovVspleskov.pdf.

[10] Кошляков Н.С., Глинер З.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.

References

[1] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K voprosu o drobnom differentsirovanii* [On fractional differentiation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 7-13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13 [in Russian].

[2] Gladkov S.O. *K teorii odnomernoi i kvazi-odnomernoi teploprovodnosti* [On the theory of one-dimensional and quasi-one-dimensional thermal conductivity]. *ZhTF* [Technical Physics (Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki)], 1997, Vol. 67, no 7, pp. 8-12. Available at: https://journals.ioffe.ru/articles/33167 [in Russian].

[3] Gladkov S.O. *K teorii gidrodinamicheskikh yavlenii v kvaziodnomernykh sistemakh* [On the theory of hydrodynamic phenomena in quasi-one-dimensional systems]. *ZhTF* [Technical Physics (Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki)], 2001, Vol. 71, no 11, pp. 130-132. Available at: https://journals.ioffe.ru/articles/38956 [in Russian].

[4] Charles K. Chui. *Vvedenie v veivlety* [An Introduction to Wavelets]. M.: Mir, 2001, 412 p. Available at: http://en.bookfi.net/book/445607 [in Russian].

[5] Dobeshi I. *Desyat' lektsii po veivletam* [Ten Lectures on Wavelets]. Izhevsk: RKhD, 2001, 464 p. Available at: http://en.bookfi.net/book/599534 [in Russian].

[6] Mallat S. *Veivlety v obrabotke signalov* [Wavelets in Signal Processing]. M.: Mir, 2005, 672 p. Available at: https://ru.b-ok.xyz/book/2390278/855065 [in Russian].

[7] Astaf'eva N.M. *Veivlet-analiz: osnovy teorii i primery primeneniya* [Wavelet analysis: basic theory and some applications]. *UFN* [Physics-Uspekhi] (1996), 39 (11): 1085. DOI: 10.3367/UFNr.0166.199611a.1145 [in Russian].

[8] Vorob'yev V.I., Gribunin V.G. *Teoriya i praktika veivlet-preobrazovaniya* [Theory and practice of wavelet transform]. SPb.: VUS, 1999, 206 p. Available at: https://techlibrary.ru/b/2j1p1r1p1b2d1f1c_2j.2q.,_2k1r1j1b1u1o1j1o_2j.2k._3a1f1p1r1j2g_1j_1q1r1a1l1t1j1l1a_1c1f1k1c1m1f1t-1q1r1f1p1b1r1a1i1p1c1a1o1j2g._1999.pdf [in Russian].

[9] Petukhov A.P. *Vvedenie v teoriyu bazisov vspleskov* [Introduction to Burst Basis Theory]. SPb.: SPbGTU, 1999, 132 p. Available at: http://www.pseudology.org/science/VvedenieTeoriabazisovVspleskov.pdf [in Russian].

[10] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. M.: Vysshaya shkola, 1970, 710 p. [in Russian].