МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.928
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-92-99

Дата поступления статьи: 11/*III*/2019
Дата принятия статьи: 20/*III*/2019

М.О. Балабаев

КРИВИЗНА ПОТОКА В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

© *Балабаев Михаил Олегович* — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
E-mail: m.o.balabaev@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6761-104X

АННОТАЦИЯ

Моделирование критических явлений является весьма важной задачей, имеющей непосредственное прикладное применение во многих отраслях науки и техники. В данной статье предлагается к рассмотрению модификация относительно нового метода кривизны потока для решения задач построения инвариантных многообразий автономных динамических быстро-медленных систем. Приводится сравнение метода кривизны потока с классическими способами решения как в задачах поиска траекторий-уток, так и в случае поиска их многомерных аналогов — инвариантных многообразий с переменной устойчивостью. Сравнение проведено на примерах моделей трехмерного автокаталитического реактора и модели реакции горения первого порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, быстро-медленные системы, инвариантные многообразия, сингулярные возмущения, критические явления, траектории-утки, смена устойчивости, кривизна потока, автокаталитическая реакция, задача горения.

Цитирование. Балабаев М.О. Кривизна потока в задачах моделирования критических явлений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 2. С. 92–99. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-92-99.

UDC 517.928
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-92-99

Submitted: 11/*III*/2019
Accepted: 20/*III*/2019

M.O. Balabaev

FLOW CURVATURE APPLIED TO MODELLING OF CRITICAL PHENOMENA

© *Balabaev Mikhail Olegovich* — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
E-mail: m.o.balabaev@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6761-104X

ABSTRACT Modeling of critical phenomena is a very important problem, which has direct applied application in many branches of science and technology. In this paper we regard a modification of the low curvature method applied to construction of invariant manifolds of autonomous fast-slow dynamic systems. We compared a new method with original ones via finding duck-trajectories and their multidimensional analogues — surfaces with variable stability. Comparison was used a three-dimensional autocatalytic reaction model and a model of the burning problem.

Key words: differential equations, fast-slow systems, invariant manifolds, singular perturbations, critical phenomena, duck-trajectories, various stability, flow curvature, autocatalytic reaction, burning problem.

Citation. Balabaev M.O. *Krivizna potoka v zadachakh modelirovaniya kriticheskikh yavlenii* [Flow curvature applied to modelling of critical phenomena]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 2, pp. 92–99. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-92-99 [in Russian].

1. Предварительные сведения

Динамические системы, как известно, весьма широко используются для моделирования различных процессов. В рамках этой статьи будет рассматриваться класс быстро-медленных автономных динамических систем с одной быстрой переменной:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ обуславливает малое возмущение системы, $x \in \mathbb{R}^n$ — медленная переменная, а $y \in \mathbb{R}$ — быстрая; под точкой же, как и принято в подобных случаях, здесь и далее подразумевается дифференцирование по времени t. Важность нахождения решений систем подобного класса сложно переоценить, так как они имеют существенное прикладное значение во многих областях науки и техники. Особым образом стоит отметить те решения систем, которые попеременно проходят вдоль притягивающих и отталкивающих листов медленного многообразия [21].

В первую очередь напомним, что *медленной поверхностью* системы называется множество решений уравнения

$$0 = g(x, y, 0),$$

а *кривой срыва* — ее пересечение с поверхностью, состоящей из нерегулярных точек:

$$\begin{cases} 0 = g(x, y, 0), \\ \det\left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, 0)\right| = 0. \end{cases}$$

Говорят, что траектория системы является *уточным решением*, если она в начале проходит вдоль притягивающего листа медленной поверхности, а затем — вдоль ее отталкивающего листа. Само понятие утки (фр. *canard*) было впервые использовано французскими математиками [2; 3].

Впоследствии оказалось, что траектории-утки достаточно хорошо моделируют поведение решений динамических систем в условиях нестабильности начальных условий, и применение таких уточных решений получило весьма широкое распространение при моделировании критических явлений различной природы [4–10].

Естественным развитием траекторий-уток, которые, по сути, являются одномерными инвариантными многообразиями, стали их многомерные аналоги — *инвариантные поверхности со сменой устойчивости* [11; 12], эпизодически возникающие в случае нетривиальной размерности медленной переменной.

Подобно траекториям-уткам, такие поверхности располагаются как вблизи притягивающего, так и вблизи отталкивающего листов медленного многообразия.

В англоязычной литературе для инвариантных поверхностей переменной устойчивости принято употребление термина *black swan*, впервые примененного в работах В. А. Соболева и Е. А. Щепакиной [13]. Русскоязычная литература на момент публикации не имеет устоявшейся терминологии; тем не менее употребление словосочетания *черный лебедь* для обозначения инвариантной поверхности со сменой устойчивости видится вполне естественным.

Особым классом *черных лебедей* следует считать *уточные поверхности*, которые характеризуются тем, что через каждую их точку вблизи медленного многообразия проходит траектория-утка. Иными словами, уточные поверхности состоят из траекторий-уток. Такие уточные поверхности представляют собой достаточно хорошие модели пространств решений динамических систем и позволяют в некоторых случаях гарантировать стабильность протекания процессов, описываемых этими системами. Подобный подход к моделированию критических явлений был впервые применен в работе [21, п. 18.3], а затем многократно использован в работах [14–16].

Одним из самых широко используемых аппаратов редукции динамических систем можно назвать *метод интегральных многообразий*, заключающийся в сведении рассмотрения моделей к области, лежащей в некоторой окрестности медленной поверхности. Этот метод, впервые использованный в работах Боголюбова и Митропольского [17], впоследствии получил очень широкое применение, в том числе и в задачах исследования критических явлений [4; 5; 8; 10; 21].

Особенностью метода интегральных многообразий является то, что в процессе построения асимптотических разложений требуется найти решение ряда уравнений (как алгебраических, так и в некоторых случаях дифференциальных); составление и решение таких уравнений далеко не всегда является тривиальным само по себе и, более того, сложность требуемых вычислений возрастает весьма значительно при увеличении необходимой точности разложения. Нетривиальность решения уравнений не позволяет автоматизировать этот процесс, а сложность необходимых преобразований существенно ограничивает возможности ручного счета и как следствие — точность асимптотического разложения в некоторых случаях.

На практике метод интегральных многообразий во многих случаях позволяет построить асимптотическое разложение инвариантного многообразия по степеням малого параметра до третьего порядка малости включительно [12; 21]. Более подробно с методом можно ознакомиться в работах [4; 5; 8; 10; 12; 21].

2. Метод кривизны потока

В основе метода лежит использование доказанного еще Ж. Г. Дарбу вырождения кривизны на инвариантных многообразиях динамических систем [18].

Запишем исходную динамическую систему в виде

$$\dot{P} = V(P),$$

где P — вектор-столбец неизвестных $\{x, y\}$, а V — вектор-столбец правых частей системы.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — достаточно гладкая функция, определяемая равенством

$$\varphi(P) = \left| V \wedge \dot{V} \wedge \ddot{V} \wedge \cdots \right|,$$

где символом $\wedge$ обозначено внешнее произведение, а количество сомножителей совпадает с размерностью системы. Говорят, что $\varphi(P)$ определяет *кривизну фазового потока* исходной динамической системы.

Так как производная Ли $L_{\mathrm{P}}\varphi$ вырождается на инвариантных многообразиях динамических систем [18], то φ — первый интеграл исходной системы [19]. Это в свою очередь означает, что $\varphi(P)$ является глобальным инвариантом и имеет место равенство $d\varphi = 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_1}\ dp_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_2}\ dp_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial P_{n+1}}\ dp_{n+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\ d\varepsilon \equiv 0.$$

Это равенство лежит в основе метода кривизны потока. Используя его, можно достаточно легко сформировать итерационный процесс и получить необходимое количество членов асимптотического разложения параметрического представления инвариантного многообразия. Более подробно с методом кривизны потока можно ознакомиться в работах [20; 21].

Основополагающим различием между методом интегральных многообразий и методом кривизны потока является принципиальная итерационность вычислений последнего. Иными словами, после нахождения кривизны потока дальнейшие вычисления коэффициентов асимптотического разложения осуществляются с помощью итерационных формул:

$$\begin{cases} y_n'(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{n!}\cdot\frac{\partial^n \eta}{\partial\varepsilon^n}\right], \quad n \geqslant 0, \\ y_n(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{n!}\cdot\frac{\partial^{n-1} \xi}{\partial\varepsilon^{n-1}}\right], \quad n \geqslant 1, \end{cases}$$

где коэффициенты $\eta = \eta(\varphi, x, y, \varepsilon)$ и $\xi = \xi(\varphi, x, y, \varepsilon)$ вычисляются непосредственно из кривизны потока [20, с. 192].

Эта особенность позволяет в значительной степени автоматизировать нахождение коэффициентов разложения, а значит, решать в том числе и те задачи при использовании метода интегральных многообразий, для которых нахождение коэффициентов разложения сопряжено со значительными, не всегда преодолимыми вычислительными трудностями.

Моделирование критических явлений само по себе является достаточно интересным классом задач. В рамках настоящей статьи мы будем предполагать наличие в исходной системе одного дополнительного скалярного параметра:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon, \mu), \\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon, \mu). \end{cases}$$

Нахождение уточных решений предполагает подбор параметра μ таким образом, чтобы притягивающий и отталкивающий листы инвариантного многообразия совпали в некоторой точке кривой срыва. В тех случаях, когда это удается осуществить, полученное уточное решение ожидаемо проходит через вышеуказанную точку. В качестве примера нахождения уточного решения с помощью метода кривизны потока можно привести работу [20], в которой рассматривается классическая модель Ван-дер-Поля.

Ранее использование метода кривизны потока не рассматривалось в качестве инструмента для нахождения *черных лебедей*, то есть инвариантных многообразий переменной устойчивости. Однако, если предположить что в контексте некоторой модели скалярный параметр μ допустимо использовать в качестве управляющего воздействия, то удачный выбор так называемой *склеивающей функции* в некоторых случаях позволяет совместить притягивающий и отталкивающий листы инвариантного многообразия вдоль всей кривой срыва, получив тем самым инвариантное многообразие со сменой устойчивости.

Подобный подход в контексте метода кривизны потока был впервые применен в работах [15; 16] для нахождения *черных лебедей* в моделях трехмерного автокаталитического реактора и задаче управления процессом горения. Сравнению решений этих задач методом интегральных многообразий и методом кривизны потока и посвящена настоящая статья.

3. Результаты сравнения методов

3.1. Модель трехмерной автокаталитической реакции

В рамках данной статьи мы будем рассматривать модель трехмерного автокаталитического реактора, имеющую вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu\left(\frac{5}{2} + y\right) - xz^2 - x, \\ \frac{dy}{d\tau} = z - y, \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left(xz^2 + x - z\right), \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — малое возмущение, неотрицательный параметр $\mu < 1$ позволяет оказывать управляющее воздействие, а переменные x, y и z принимают только положительные значения [14].

Решение этой системы будем находить в виде его асимптотического разложения по степеням малого параметра:

$$x = x_0(y, z) + x_1(y, z)\varepsilon + x_2(y, z)\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Вполне очевидно, что нулевое приближение тождественно параметризации медленной поверхности:

$$x_0(y, z) = \frac{z}{1 + z^2}.$$

Как уже было оговорено выше, будем рассматривать $\mu = \mu(y, z)$ в качестве управляющего воздействия, чтобы иметь возможность совместить притягивающий и отталкивающий листы медленного многообразия системы во всех точках кривой срыва $z = 1$. Подобно ранее описанному, находить μ будем в виде его разложения:

$$\mu(y, z) = \mu_0(y, z) + \mu_1(y, z)\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Метод интегральных многообразий дает следующие результаты разложений инвариантного многообразия с переменной устойчивостью и склеивающей функции соответственно [14]:

$$x = \frac{z}{1+z^2} + \frac{1+z^2}{1+z}\varepsilon + \frac{\left(3(1+z)^3 - 2z(2+z)\left(1+z^2\right)^2\right)(1+z^2)}{(1+z)^3(1-z^2)}\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right),$$

$$\mu = \frac{\alpha(\varepsilon)}{5/2+y}, \quad \alpha(\varepsilon) = 1 + 3\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Подобная склейка притягивающего и отталкивающего листов медленного интегрального многообразия естественным образом сводит исходную систему к новой, имеющей вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(\varepsilon) - xz^2 - x, \\ \frac{dy}{d\tau} = z - y, \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left(xz^2 + x - z\right). \end{cases}$$

Эта фактически новая модель имеет инвариантное многообразие со сменой устойчивости в виде цилиндрической поверхности. Более того, этот *черный лебедь* целиком состоит из траекторий-уток, а значит, относится к классу уточных поверхностей [12, с. 167].

Особо требуется отметить, что склеивающая функция, полученная методом интегральных многообразий, является в некоторой степени *точной*: несмотря на наличие числового ряда в числителе, при каждом конкретном значении $0 < \varepsilon \ll 1$ она представляет собой точную функцию.

Метод кривизны потока дает несколько отличающиеся по форме разложения для инвариантного многообразия с переменной устойчивостью и склеивающей функции [15]:

$$x = \frac{z}{z^2+1} + \frac{z^2+1}{z+1}\varepsilon + \frac{\left(z^2+1\right)\left(2z^5+6z^4+10z^3+15z^2+8z+3\right)}{(z+1)^4}\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right),$$

$$\mu = \frac{2}{2y+5} + \frac{6}{2y+5}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right).$$

По сути, результат аналогичен полученному в работе [14]. Отличие, однако, заключается в хорошо заметном отсутствии разрывов в физически значимой области фазового пространства и в неочевидности того факта, что склеивающая функция является в некотором смысле точной.

3.2. Модель реакции горения первого порядка

Модель реакции горения первого порядка в рамках данной статьи мы будем рассматривать в соответствии с [21, гл. 19.2]:

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{d\theta}{d\tau} = \eta\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha\left(\theta - \theta_c\right) - \delta\theta, \\ \gamma_c\frac{d\theta_c}{d\tau} = \alpha\left(\theta - \theta_c\right), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\eta\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \end{cases}$$

где θ и η — температура и концентрация газовой смеси, а θ_c — температура инертной среды.

Параметр α характеризует теплоотвод в инертную фазу, β — температурную чувствительность реакции, γ_c определяет физические свойства среды, δ отражает теплоотвод во внешнюю среду и наконец ε — экзотермичность реакции. Дифференцирование ведется по переменной времени τ. Все величины рассматриваемой модели безразмерные. Кроме того, следует отметить что ε для типичных газовых смесей есть величина малая, а значит, вышеуказанная система является сингулярно возмущенной.

В качестве начальных условий будем использовать тривиальные соотношения

$$\theta(0) = 0,$$
$$\theta_c(0) = 0,$$
$$\eta(0) = 1.$$

Как следует из [21, гл. 11.2], при различных соотношениях параметров α, δ и γ_c траектории системы могут описывать принципиально различные модели течения реакции. Ограничимся рассмотрением только так называемого *медленного режима*, при котором любая траектория системы после быстрого участка движения в направлении притягивающего медленного многообразия расположена вдоль него и не пересекает поверхность срыва.

Инвариантное многообразие переменной устойчивости для данной задачи было получено методом интегральных многообразий в работе [21, гл. 11.2]. Стабилизация процесса горения была достигнута путем управления теплоотводом из реактора во внешнюю среду. Асимптотическое разложение второго порядка по степеням малого параметра параметрического уравнения инвариантного многообразия и соответствующей функции склейки было получено в достаточно громоздком виде [21, с. 296]; для простоты приведем здесь лишь разложение склеивающей функции:

$$\delta(\theta,\varepsilon)=\theta^{-1}\left(\alpha\frac{\left(\theta-\ln\alpha\gamma_c^{-1}-1\right)e^{\theta}+\alpha\gamma_c^{-1}}{\alpha\gamma_c^{-1}-e^{\theta}}+\varepsilon\left(\alpha\gamma_c^{-1}-e^{\theta}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right).$$

Метод кривизны потока для этой задачи дает несколько другие результаты, отличающиеся от приведенных выше в силу различий примененных методов [16]. В частности, для инвариантного многообразия было построено приближение более высокого порядка:

$$\theta_c(\eta,\nu,\varepsilon)=Q_0(\eta,\nu)+Q_1(\eta,\nu)\varepsilon+Q_2(\eta,\nu)\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^3\right),$$

где

$$Q_0=1-e^{\nu}-e^{\nu}\eta\gamma_c^{-1}+\nu+\theta_0,$$

$$Q_1=\frac{3A_1\gamma_c+2e^{\nu}-2}{2\gamma_c},$$

$$Q_2=\frac{1}{16\gamma_c\left(\gamma_c-\eta e^{\nu}\right)^2}\Big(-5A_1^3\gamma_c^4+6A_1^2\gamma_c^3\left(e^{\nu}+2\right)+4A_1\gamma_c^2\left(e^{2\nu}-4\right)+$$
$$+\gamma_c\left(-8A_1\eta e^{2\nu}+4e^{\nu}(3A_1\eta-2)+8\right)+8\eta e^{\nu}\left(e^{2\nu}-1\right)\Big).$$

После подстановки коэффициентов A_i разложения также построенной склеивающей функции полученные выражения получаются недостаточно компактными для приведения их здесь.

Выводы

Из всего вышесказанного следует, что метод кривизны потока является полноценным инструментом нахождения инвариантных многообразий переменной устойчивости; очевидно, что метод применим как в случаях тривиальной размерности быстрой переменной (с возможным возникновением траекторий-уток), так и в более сложных случаях (с возможностью появления их многомерных обобщений — *черных лебедей*).

К его достоинствам по сравнению с методом интегральных многообразий следует внести прежде всего высокую автоматизируемость производимых вычислений; с учетом постоянного развития вычислительных ресурсов и их доступности это позволяет говорить о высоком потенциале метода, о возможности в будущем не только вычислять более точные приближения решений, но и решать задачи, в принципе не поддающиеся ручному счету в настоящее время.

В то же время следует отметить и существенные ограничения метода. Основным из них является как требовательность к вычислительным и временным ресурсам, так и получение ответа в виде, не всегда отражающем существенные его особенности.

Литература

[1] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 320 с. URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922112697.html.

[2] Benoit E., Calot J.L., Diener M. Chasse au Canard // Collectanea Mathematica. 1981. V. 31–32. P. 37–119. URL: https://www.academia.edu/19856616/Chasse_au_canard.

[3] Diener M. Nessie et les Canards. Publication IRMA. Strasbourg, 1979.

[4] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a Thermal Explosion Problem. Appl Math. Lett. 1992. V. 5. P. 3–6. DOI: 10.1016/0893-9659(92)90002-Q.

[5] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Self-ignition of Dusty Media // Combustion: Explosion and Shock Waves. 1993. V. 29. P. 378–381. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00797664.

[6] Criterion for Thermal Explosion with Reactant Consumption in a Dusty Gas / V. Goldshtein [et al.]. Proc. London Roy. Soc. Ser. A., 1996. V. 452. P. 2103–2119. DOI: 10.1098/rspa.1996.0111.

[7] Sobolev V. A., Shchepakina E. A. Duck Trajectories in a Problem of Combustion Theory // Differential Equations. 1996. V. 32. P. 1177–1186. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=13231308.

[8] Dynamics of a Lotka-Volterra Type Model with Applications to Marine Phage Population Dynamics / C. Gavin [et al.] // Journal of Physics: Conference Series, 2006. V. 55. P. 80–93. DOI: 10.1088/1742-6596/55/1/008.

[9] Shchepakina E., Korotkova O. Condition for Canard Explosion in a Semiconductor Optical Amplifier // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. 2011. V. 28. P. 1988–1993. DOI: 10.1364/JOSAB.28.001988.

[10] Shchepakina E., Korotkova O. Canard Explosion in Chemical and Optical Systems // Discrete and Continuous Dynamical Systems (series B). 2013. V. 18. P. 495–512. DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.495.

[11] Shchepakina E., Sobolev V. Integral Manifolds, Canards and Black Swans // Nonlinear Analysis. Ser. A: Theory Methods. 2001. V. 44. P. 897–908. DOI: 10.1016/S0362-546X(99)00312-0.

[12] Shchepakina E.A., Sobolev V.A., Mortell M.P. Introduction to system order reduction methods with applications // Lecture notes in math. 2014. V. 2114. 201 p. URL: https://pl.b-ok.cc/book/2466101/06d4ed.

[13] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Standard Chase on Black Swans and Canards. Preprint N 426. Berlin: WIAS, 1998. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/ec52/384507ac225541417f856ce8a02de7680a66.pdf?_ga=2.63816171.510207900.1570716853-18694247.1570716853.

[14] Shchepakina E. Canards and Black Swans in Model of a 3-D Autocatalator // Journal of Physics: Conference Series. 2005. V. 22. P. 194–207. DOI: 10.1088/1742-6596/22/1/013.

[15] Balabaev M. Black swan and curvature in an autocatalator model // Procedia Engineering. 2017. V. 201. P. 561–566. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.614.

[16] Балабаев М.О. Метод кривизны потока в задаче горения: сб. трудов IV международной конференции и молодежной школы. ”Информационные технологии инанотехнологии” (ИТНТ-2018). Самара: Новая техника, 2018. С. 1996–2000. URL: http://repo.ssau.ru/bitstream/Informacionnye-tehnologii-i-nanotehnologii/Metod-krivizny-potoka-v-zadache-goreniya-69411/1/ paper_269.pdf.

[17] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.URL: http://bookre.org/reader?file=544039.

[18] Darboux J.G. Mémoire sur les équations différentielles dlgébriques du premier ordre et du premier degré. Bull. Sci. Math. sér.2. 1878. V. 2. P. 60–96, 123–143, 151–200. URL: http://www.numdam.org/article/BSMA_1878_2_2_1_151_1.pdf.

[19] Demazure M. Catastrophes et bifurcations. Paris: Ellipses, 1989. URL: http://bookre.org/reader?file=1329312.

[20] Ginoux J.M. Differential geometry applied to dynamical systems. Singapore: World Scientific. 2009. V. 3.

[21] Rossetto B. Singular Approximation of Chaotic Slow-fast Dynamical Systems // Lecture Notes in Physics. V. 278. 1986. P. 12–14. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-17894-5_306.

References

[1] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. *Reduktsiya modelei i kriticheskie yavleniya v makrokinetike* [Reduction of Models and Critical Phenomena in Macrokinetics]. M.: Fizmatlit, 2010, 320 p. Available at: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922112697.html [in Russian].

[2] Benoit E., Calot J.L., Diener M. Chasse au Canard. *Collectanea Mathematica*, 1981, V. 31–32, pp. 37–119. Available at: https://www.academia.edu/19856616/Chasse_au_canard [in French].

[3] Diener M. Nessie et les Canards. Strasbourg: Publication IRMA, 1979. [in English].

[4] Gorelov G.N., Sobolev V. A. Duck-trajectories in a Thermal Explosion Problem. *Applied Mathematical Letters*, 1992, V. 5, pp. 3–6. DOI: 10.1016/0893-9659(92)90002-Q [in English]

[5] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Self-ignition of Dusty Media. *Combustion: Explosion and Shock Waves*, 1993, V. 29, pp. 378–381. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00797664 [in English].

[6] Goldshtein V., Zinoviev A., Sobolev V., Shchepakina E. Criterion for Thermal Explosion with Reactant Consumption in a Dusty Gas. *Proceedings of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 1996, V. 452, pp. 2103–2119. DOI: 10.1098/rspa.1996.0111 [in English].

[7] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Duck Trajectories in a Problem of Combustion Theory. *Differential Equations*, 1996, V. 32, pp. 1177–1186. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=13231308 [in English]

[8] Gavin C., Pokrovskii A., Prentice M., Sobolev V. Dynamics of a Lotka-Volterra Type Model with Applications to Marine Phage Population Dynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 2006, V. 55, pp. 80–93. DOI: 10.1088/1742-6596/55/1/008 [in English].

[9] Shchepakina E., Korotkova O. Condition for Canard Explosion in a Semiconductor Optical Amplier. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*, 2011, V. 28, pp. 1988–1993. DOI: 10.1364/JOSAB.28.001988 [in English].

[10] Shchepakina E., Korotkova O. Canard Explosion in Chemical and Optical Systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (series B)*, 2013, V. 18, pp. 495–512. DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.495 [in English].

[11] Shchepakina E., Sobolev V. Integral Manifolds, Canards and Black Swans. *Nonlinear Analysis. Ser. A: Theory Methods*, 2001, V. 44, pp. 897–908. DOI: 10.1016/S0362-546X(99)00312-0 [in English].

[12] Shchepakina E.A., Sobolev V.A., Mortell M.P. Introduction to system order reduction methods with applications. *Lecture notes in math*, 2014, Vol. 2114, 201 p. Available at: https://pl.b-ok.cc/book/2466101/06d4ed [in English]

[13] Sobolev V. A., Shchepakina E. A. Standard Chase on Black Swans and Canards. Preprint N 426. Berlin: WIAS, 1998. Available at: https://pdfs.semanticscholar.org/ec52/384507ac225541417f856ce8a02de7680a66.pdf?_ga=2.63816171.510207900.1570716853-18694247.1570716853 [in English].

[14] Shchepakina E. Canards and Black Swans in Model of a 3-D Autocatalator. *Journal of Physics: Conference Series*, 2005, V. 22, pp. 194–207. DOI: 10.1088/1742-6596/22/1/013 [in English].

[15] Balabaev M. Black swan and curvature in an autocatalator model. *Procedia Engineering*, 2017, V. 201, pp. 561–566. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.614 [in English].

[16] Balabaev M. *Metod krivisni potoka v zadache goreniya* [Flow curvature method applied to the burning problem]. *Sbornik trudov IV mezhdunarodnoi konferentsii i molodezhnoi shkoly "Informatsionnye tekhnologii i nanotekhnologii" (ITNT-2018)* [Proceedings of the IV international conference and youth school "Information technologies and nanotechnologies" (ITNT-2018)]. Samara: Novaya tekhnika, 2018, p. 1996–2000. Available at: http://repo.ssau.ru/bitstream/Informacionnye-tehnologii-i-nanotehnologii/Metod-krivizny-potoka-v-zadache-goreniya-69411/1/paper_269.pdf [in Russian].

[17] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. M.: Nauka, 1974, 504 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=544039 [in Russian].

[18] Darboux J.G. Memoire sur les equations differentielles dlgebriques du premier ordre et du premier degre. *Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronomiques*, Serie 2, V. 2(1878), pp. 151–200. Available at: http://www.numdam.org/article/BSMA_1878_2_2_1_151_1.pdf [in French].

[19] Demazure M. Catastrophes et bifurcations. Paris: Ellipses., 1989. Available at: http://bookre.org/reader?file=1329312 [in French].

[20] Ginoux J.M. Differential geometry applied to dynamical systems. Singapore: World Scientic, 2009. Vol. 3. Available at: http://bookre.org/reader?file=700337 [in English].

[21] Rossetto B. Singular Approximation of Chaotic Slow-fast Dynamical Systems. *Lecture Notes in Physics*, 1986, V. 278, pp. 12–14. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-17894-5_306 [in English]