

УДК 539

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-30-54

Дата поступления статьи: 19/II/2019

Дата принятия статьи: 28/II/2019

*В.С. Долгих, А.В. Пулькин, Е.А. Миронова, А.А. Пекшева, Л.В. Степанова*  
**ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ РОСТА ТРЕЩИНЫ. ЧАСТЬ I<sup>1</sup>**

© *Долгих Вадим Сергеевич* — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** [dolgikhvs2015@yandex.ru](mailto:dolgikhvs2015@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-1355-4286>

*Пулькин Александр Владимирович* — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** [pulkinavmag@yandex.ru](mailto:pulkinavmag@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6728-1017>

*Миронова Екатерина Александровна* — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** [mironovaea2017@yandex.ru](mailto:mironovaea2017@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-7473-2245>

*Пекшева Анастасия Алексеевна* — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** [pekshevaaa2015@yandex.ru](mailto:pekshevaaa2015@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0003-2748-9232>

*Степанова Лариса Валентиновна* — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** [stepanova1v2015@yandex.ru](mailto:stepanova1v2015@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

## АННОТАЦИЯ

Статья посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию направления роста трещины в линейно упругом изотропном материале. В работе найдены углы направления распространения трещины в линейно-упругом изотропном материале с помощью трех обобщенных критериев разрушения: критерия максимального тангенциального напряжения, критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия разрушения (критерия максимальной окружной деформации). Обобщенные критерия роста трещины учитывают высшие приближения в многопараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса. Все вычисления выполнены для пластины с центральной трещиной, для которой известны все амплитудные коэффициенты в разложении М. Уильямса, что позволило провести анализ для всех широко используемых критериев разрушения. Проведенные в пакете компьютерной алгебры Maple расчеты показали необходимость удержания высших приближений в многопараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса, так как значение угла распространения трещины существенно меняется при удержании высших приближений.

**Ключевые слова:** линейно-упругое тело, хрупкое разрушения, критерии роста трещины, критерий максимального тангенциального напряжения, критерий минимума плотности энергии деформаций, критерий максимальной окружной деформации.

**Цитирование.** Долгих В.С., Пулькин А.В., Миронова Е.А., Пекшева А.А., Степанова Л.В. Теоретико-экспериментальное исследование направления роста трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 2. С. 30–54. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-30-54>.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

<sup>1</sup> Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку работы (проект 19-01-00631).

UDC 539  
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-30-54

Submitted: 19/II/2019  
Accepted: 28/II/2019

*V.S. Dolgikh, A.V. Pulkin, E.A. Mironova, A.A. Peksheva, L.V. Stepanova*

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CRACK PROPAGATION DIRECTION. PART I<sup>2</sup>

---

© *Dolgikh Vadim Sergeevich* — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** [dolgichvs2015@yandex.ru](mailto:dolgichvs2015@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-1355-4286>

*Pulkin Alexandr Vladimirovich* — Master's Degree student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** [pulkinavmag@yandex.ru](mailto:pulkinavmag@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6728-1017>

*Mironova Ekaterina Alexandrovna* — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** [mironovaea2017@yandex.ru](mailto:mironovaea2017@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-7473-2245>

*Peksheva Anastasiya Alexseevna* — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** [pekshevaa2015@yandex.ru](mailto:pekshevaa2015@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0003-2748-9232>

*Stepanova Larisa Valentinovna* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** [stepanova@yandex.ru](mailto:stepanova@yandex.ru). **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

---

### ABSTRACT

In the present paper the crack propagation direction angles on the basis of three different fracture criteria are found. The maximum tangential stress criterion, the minimum strain energy density criterion and the deformation criterion are used and analysed. The generalized forms of these criteria have been used. It implies that the crack propagation direction angles are obtained with the Williams series expansion in which the higher order terms are kept. The calculations are performed in Waterloo Maple computer algebra software. The analysis of the crack propagation direction angles show that the influence of the higher order terms can't be ignored. The angles differ considerably when the higher order terms are taken into account.

**Key words:** isotropic linear elastic material, brittle fracture, criteria of crack growth, maximum tangential stress criterion, minimum strain energy density criterion, deformation criterion.

**Citation.** Dolgikh V.S., Pulkin A.V., Mironova E.A., Peksheva A.A., Stepanova L.V. *Teoretiko-eksperimental'noe issledovanie napravleniya rosta treshchiny. Chast' 1* [Theoretical and experimental investigation of crack propagation direction. Part I]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 2, pp. 30–54. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-2-30-54> [in Russian].

## 1. О критериях разрушения

Процессы разрушения являются важными в современном мире, так как знания о распространении трещин в материалах используются в различных приложениях инженерной практики. На многих предприятиях существует оборудование, которое работает в сложных условиях, подвергаясь циклическим, растягивающим и скручивающим нагрузкам, а также коррозионному воздействию внешней среды. Возникает необходимость выявлять причины возникновения трещин в таких материалах и направление их распространения [1; 2]. В настоящей статье рассматривается хрупкое разрушение, которое происходит в результате распространения магистральной трещины после незначительной пластической деформации, сосредоточенной в приповерхностной зоне трещины [2]. При идеально хрупком разрушении можно заново составить тело прежних размеров из его частей, полученных в процессе разрушения, без зазоров между ними. Хрупкое разрушение чаще всего происходит по определенным кристаллографическим плоскостям внутри зерен [3; 4].

---

<sup>2</sup>The authors express gratitude to the Russian Foundation of Fundamental Research for the support of the work (project 19-01-00631).

Непростым вопросом современной вычислительной механики разрушения является оценка направления распространения трещины в условиях смешанного деформирования, когда в образце одновременно реализуются и нормальный отрыв и чистый сдвиг. В настоящее время сформулировано множество критериев разрушения, но каждый из них применяется в зависимости от типа и материала образца, а также условий нагружения [5–8].

Любой критерий разрушения должен удовлетворять двум основным требованиям. Первое фундаментальное требование заключается в том, что поскольку прочность есть свойство, характеризующее материал, то критерий разрушения не должен зависеть от выбора системы координат. Согласно второму требованию, в критерии разрушения должны быть сохранены тензорные свойства напряжений. Это необходимое практическое требование, определяемое нашим желанием использовать математический анализ напряжений для определения прочностных характеристик материала в условиях сложного напряженного состояния или по известным значениям прочности в условиях простых напряженных состояний [9].

Известны несколько видов критериев разрушения: 1) энергетические (критерий Гриффитса); 2) эмпирические, результаты которых получены на основе лабораторных и теоретических данных; 3) критерии, основанные на значениях тензоров напряжений и деформаций; 4) критерии, основанные на концепциях механики поврежденности. Эти критерии позволяют детально изучить сам процесс разрушения и запас прочности материала, при котором необходимо учесть имеющиеся в теле трещины, так как разрушение происходит в результате развития реальных дефектов [10]. Поэтому в настоящей статье будут исследованы и применены к оценке направления роста трещины следующие критерии хрупкого разрушения: 1) критерий максимального тангенциального напряжения; 2) критерий минимума плотности энергии упругой деформации; 3) деформационный критерий разрушения. Каждый из представленных критериев имеет свою математическую формулировку, которая применяется для проведения необходимых расчетов угла направления распространения трещины.

## 2. Критерий максимального тангенциального напряжения

В механике разрушения принято считать, что компоненты напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины в рамках теории упругости при любой геометрии тела с центральной трещиной и при любых заданных граничных условиях нагружения могут быть аппроксимированы однопараметрическим представлением с помощью коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  [11] для трещины нормального отрыва и поперечного сдвига [12].

Критерий максимального тангенциального напряжения является локальным критерием механики разрушения и одним из широко используемых критериев, который базируется на компоненте тензора напряжений. Критерий является следствием из условия пластичности Треска, которое является важным обобщением на трехмерное напряженное состояние понятия предела текучести для одноосного растяжения [13; 14]. С математической точки зрения условие пластичности представляет собой соотношение между компонентами напряжений в точке, которое должно быть выполнено, когда в этой точке начинается пластическое поведение. В общем случае условие пластичности можно записать в виде:

$$f(\sigma_{ij}) = C_Y, \quad (1)$$

где  $C_Y$  – постоянная текучести.

Для изотропного материала условие пластичности не должно зависеть от направлений и поэтому может быть выражено в виде симметричной функции главных напряжений [15]. Тогда равенство (1) примет вид:

$$f_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y, \quad (2)$$

где  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  – первый, второй и третий инварианты тензора напряжений соответственно.

Данный критерий не зависит от того, какое состояние реализуется: плоское напряженное или плоское деформированное, а также не зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$ , который является одной из механических характеристик материалов, показывающей зависимость между продольными и поперечными деформациями элемента [16].

Таким образом, применяя критерий максимального тангенциального напряжения, значения угла распространения трещины зависят во многом лишь от расстояния от кончика вершины трещины, на котором рассчитываются максимальные касательные напряжения, и значения параметра смешанности нагружения  $M^e$ , который определяет условие нагружения образца как нормального отрыва либо как условие нагружения поперечного сдвига [17; 18].

В настоящее время для некоторых конфигураций тел с трещинами построены многопараметрические асимптотические разложения М. Уильямса [19–21], позволяющие оценить влияние высших приближений на оценку направления распространения в условиях смешанного нагружения. Поэтому данная статья

посвящена сравнительному анализу трех обобщенных критериев разрушения (критерия максимального тангенциального напряжения, деформационного критерия и критерия минимума плотности энергии деформаций) для пластины с центральной трещиной.

## 2.1. Математическая формулировка критерия

Критерий максимального тангенциального напряжения гласит, что трещина распространяется в направлении, в котором тангенциальное напряжение достигает своего максимального значения. Математическая формулировка данного критерия имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0, \quad (3)$$

где  $\sigma_{\theta\theta}$  – тангенциальное напряжение в окрестности вершины трещины в полярной системе координат  $r, \theta$  с полюсом в вершине трещины.

В представленной формулировке критерий не отражает зависимость вычисленного угла от расстояния от конца вершины трещины, тогда как фундаментальным и важным понятием механики разрушения является расстояние, на котором вычисляется максимальное тангенциальное напряжение. Данный критерий также не зависит от того, какое напряженное состояние реализуется – плоское напряженное или плоское деформированное. При использовании критерия максимального тангенциального напряжения, как правило, в приведенные выше выражения (3) подставляют многопараметрическое асимптотическое разложение поля напряжений у вершины трещины М. Уильямса [4; 19; 21]. Такой способ хотя и считался достаточно продолжительное время правильным, но явно недопустим в качестве общего утверждения по определению угла направления роста трещины. Причиной является довольно необоснованное пренебрежение последующих слагаемых многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, а именно компонент тензора напряжений для плоского случая в виде рядов по собственным функциям, вклад которого в прямоугольной системе координат  $x_1, x_2$ , как и указывалось ранее, не зависит от расстояния до конца вершины трещины. Такой способ может приводить к серьезной как качественной, так и количественной ошибке при нахождении угла направления распространения трещины, а также при нахождении локального напряжения, перемещения и других, связанных с этими параметрами, величин. Влияние нагрузки, приложенной к образцам с трещиной, расположенной под различными углами, появляется только во втором члене ряда. Следовательно, с ростом расстояния от конца вершины трещины требуется увеличивать количество слагаемых в асимптотическом разложении при расчете угла направления распространения трещины. Таким образом, высшие приближения необходимо определять и учитывать для получения более точного и полного результата.

## 2.2. Многопараметрическое асимптотическое разложение М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины

Многопараметрическое асимптотическое представление поля напряжения у вершины трещины – асимптотическое разложение М. Уильямса – имеет вид:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k^m r^{k/2-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \quad (4)$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты с полюсом в вершине трещины,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $a_k^m$  – масштабные (амплитудные) множители, которые зависят от геометрии образца с дефектом и величины нагрузки;  $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$  – функции полярного угла, описывающие угловые распределения компонент тензора напряжений, константа  $m$  отвечает моде (виду) нагружения:  $m = 1$  соответствует нормальному отрыву,  $m = 2$  отвечает поперечному сдвигу. Угловые распределения компонент тензора напряжения в соотношениях (4) известны и были определены в целом ряде работ. Представим их в форме, предложенной Карихало [14]. Для задачи о трещине нормального отрыва угловые распределения имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[ \left( 2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[ \left( 2 - \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[ -\left(\frac{k}{2} + (-1)^k\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \end{aligned} \quad (5)$$

Для задачи о трещине поперечного сдвига угловые распределения заданы соотношениями:

$$\begin{aligned} f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left[ \left( 2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left[ \left( 2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[ -\left(\frac{k}{2} - (-1)^k\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \end{aligned} \quad (6)$$

Многопараметрическое асимптотическое разложение М. Уильямса является универсальным разложением поля напряжений у вершины трещины. Это разложение содержит одинаковую структуру для различных известных конфигураций тел с трещинами и типов нагрузки образцов. Все различие и многообразие задач о трещинах отражается в амплитудных множителях  $a_k^m$ , которые содержатся в математической формулировке первых коэффициентов разложения – коэффициентов интенсивности [19; 22].

Рассмотрим бесконечную пластину, имеющую сквозную трещину типа  $I$  длиной  $2a$ , где  $a$  – полудлина трещины, как показано на рис. 1.

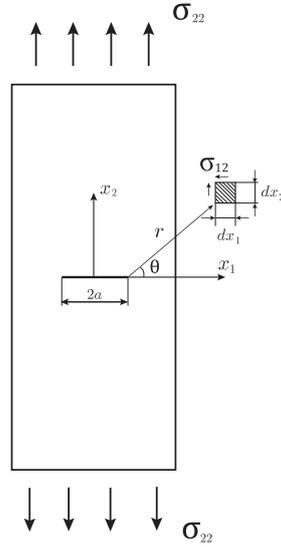


Рис. 1. Трещина длиной  $2a$  в бесконечной пластине

Пластина находится под действием растягивающего напряжения  $\sigma_{22}$ . Элемент  $dx_1 dx_2$  пластины, который располагается на расстоянии  $r$  от кончика вершины трещины и составляет с плоскостью трещины угол  $\theta$ , находится под действием нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ , действующих в направлениях  $x_1$  и  $x_2$ , и касательного напряжения  $\sigma_{12}$ . Таким образом, распределение напряжений вблизи края произвольной хрупкой трещины для нормального отрыва [17; 23]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

для поперечного сдвига [17; 23]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma_{12} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$\sigma_{33} = 0$  – для плоского напряженного состояния,

$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  – плоское деформированное состояние.

Для больших значений  $r$  величина  $\sigma_{22}$  стремится к нулю, в то время как она должна стремиться к  $\sigma$ . Очевидно, уравнения (7), (8) справедливы только лишь в ограниченной области – вблизи вершины трещины. Каждое из этих уравнений представляет собой первый член ряда. В окрестности вершины трещины эти первые члены достаточно точно описывают поля напряжений, поскольку остальные члены малы по сравнению с ними. Но если речь идет о больших расстояниях от вершины трещины, то следует вводить большее количество членов, а именно высших приближений, в уравнения. В уравнениях (7), (8) функции координат  $r$  и  $\theta$  имеют простой вид. Таким образом, в обобщенном виде эти уравнения можно представить так:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I(II)}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (9)$$

где

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(\theta = 0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(\theta = 0). \quad (10)$$

$K_I$  и  $K_{II}$  – коэффициенты интенсивности напряжений для различных геометрий образцов с трещинами. Индекс ( $I$ ) означает тип разрушения. Для нормального отрыва индекс равен ( $I$ ), поперечного сдвига – ( $II$ ) и продольного сдвига – ( $III$ ). Первый тип связан с нормальным смещением поверхностей трещины во взаимно противоположных направлениях; второй соответствует перемещениям, при которых поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, перпендикулярном ее фронту; третий связан со скольжением одной поверхности трещины по другой параллельно фронту трещины [24]. Тангенциальное напряжение имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{1,\theta\theta}^{(1)}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{2,\theta\theta}^{(1)}(\theta), \quad (11)$$

$$K_I \frac{df_{1,\theta\theta}^{(1)}}{d\theta}(\theta) + K_{II} \frac{df_{2,\theta\theta}^{(1)}}{d\theta}(\theta) = 0. \quad (12)$$

Если известны коэффициенты интенсивности напряжений, то считают, что поле напряжений вблизи вершины трещины полностью определено. Коэффициенты интенсивности  $K_I$  и  $K_{II}$  служат мерой сингулярности напряжений около вершины трещины – области предразрушения [25].

Вторым коэффициентом являются значения Т-напряжений:

$$T = a_2^1 f_{1,11}^2(\theta = 0). \quad (13)$$

Модифицированная форма критерия разрушения предполагает учет Т-напряжений в полном асимптотическом разложении поля напряжений у вершины трещины. Удержание Т-напряжений в асимптотическом решении приводит к хорошему сопоставлению и описанию экспериментальных и теоретических данных [26]. Для ряда конфигураций образцов с дефектами и типов нагружения получены точные выражения для масштабных множителей  $a_k^m$  полного асимптотического разложения М. Уильямса. Найдены выражения для масштабных множителей поля напряжений в изотропной линейно-упругой бесконечной пластине с центральной трещиной длиной  $2a$ . Выражения для определения масштабных множителей для трещины нормального отрыва:

$$a_{2n+1}^1 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! \sigma_{22}^\infty}{2^{3n+\frac{1}{2}} (n!)^2 (2n-1) a^{n-\frac{1}{2}}}, \quad (14)$$

$$a_2^1 = -\frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad a_{2n}^1 = 0. \quad (15)$$

Для трещины поперечного сдвига:

$$a_{2n+1}^2 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! \sigma_{12}^\infty}{2^{3n+\frac{1}{2}} (n!)^2 (2n-1) a^{n-\frac{1}{2}}}, \quad a_{2n}^2 = 0. \quad (16)$$

Так как значения масштабных множителей известны для конфигурации образцов с трещиной, рассматриваемой в настоящей статье, становится возможным вычисление углов направления распространения трещины с помощью критерия максимального тангенциального напряжения с удержанием пяти слагаемых. Структура компонент тензора напряжений имеет вид [27]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r, \theta) &= \\
&= a_1^1 r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2} \right) + a_1^2 r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{7}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2} \right) + 4a_2^1 + \\
&+ a_3^1 r^{-\frac{15}{4}} \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - a_3^2 r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{27}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \\
&+ 8a^1 4r \cos \theta - 8a_4^2 r \sin \theta + a_5^1 r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{35}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{15}{4} \cos \frac{\theta}{2} \right) - \\
&- a_5^2 r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{55}{4} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{15}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \dots,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}(r, \theta) &= \\
&= a_1^1 r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2} \right) + a_1^2 r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2} \right) + \\
&+ a_3^1 r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{9}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - a_3^2 r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \\
&+ a_5^1 r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{15}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{15}{4} \cos \frac{\theta}{2} \right) + a_5^2 r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{15}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{15}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}(r, \theta) &= \\
&= a_1^1 r^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2} \right) - a_1^2 r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2} \right) = \\
&= a_3^1 r^{\frac{3}{4}} \left( \frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + a_3^2 r^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{15}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \\
&- 8a^1 4r \sin \theta - a_5^1 r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{15}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{15}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\
&- a_5^2 r^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{35}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{15}{4} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{19}$$

В настоящей статье углы направления роста трещины определяются для различных значений параметра смешанности нагружения равенством [19]:

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{22}(r, \theta = 0)}{\sigma_{12}(r, \theta = 0)} \right|. \tag{20}$$

Исследование угла распространения трещины было проведено в системе символьных вычислений Waterloo Maple, где описывался специальный код вычисления угла, в котором задается расстояние  $\hat{r}$  от кончика трещины и вид нагружения, изменяющийся от нуля, что соответствует поперечному сдвигу, до единицы, что отвечает нормальному отрыву, для всех промежуточных видов нагружения  $0 \leq M^e \leq 1$  [29]. Чем больше задавалось расстояние от конца вершины трещины, тем больше удерживались высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса. Тем самым угол направления роста трещины принимал постоянное значение для каждого типа параметра смешанности нагружения и выбранного расстояния от конца вершины трещины, на котором проходил учет значений тангенциальных напряжений.

### 2.3. Обобщенный критерий максимального тангенциального напряжения. Результаты вычислений

Целью настоящей статьи является вычисление угла направления распространения трещины для различных значений параметра смешанности нагружения  $M^e$ , а также реализации напряженного состояния с применением многопараметрического асимптотического разложения поля напряжений М. Уильямса в пакете символьной математики Waterloo Maple, в котором удерживаются высшие приближения на каждом этапе расчета. В большинстве случаев при определении угла направления роста трещины в асимптотическом разложении удерживают лишь одно слагаемое. Однако в последнее время многими авторами показана необходимость удержания высших приближений для оценки угла направления роста трещины с целью получения более точных и правильных значений с различными параметрами смешанности нагружения и состояниями образцов [19; 21; 22]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m r^{\frac{k}{2}-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \tag{21}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0. \tag{22}$$

При использовании многопараметрического разложения поля напряжений задается расстояние, например,  $r_c = r/a = 1.25$ , на котором будет рассматриваться тангенциальное напряжение, и определяется угол направления распространения трещины.

В табл. 1 представлены результаты вычислений угла направления роста трещины на различных расстояниях от конца вершины трещины при разных значениях параметров смешанности нагружения. Во втором столбце этой таблицы приведены углы направления роста трещины, вычисленные при помощи пакета символьной математики Waterloo Maple и асимптотического разложения М. Уильямса, в котором удерживается только первое слагаемое – главный член асимптотического разложения ( $N = 1$ ). В следующих столбцах таблицы приведены результаты вычислений, основанные на многопараметрическом представлении поля напряжений у вершины трещины с удержанием высших приближений ( $N = 100$  и более). Для определения угла направления роста трещины в программе символьной математики Waterloo Maple удерживалось более 100 слагаемых, позволяющих вычислить угол направления роста трещины, используя критерий максимального тангенциального напряжения. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что число удерживаемых высших приближений в асимптотическом разложении влияет на значение угла: чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых следует удерживать в решении для получения более точного значения угла направления распространения трещины [28].

Таблица 1

**Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия максимального тангенциального напряжения**

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-67.53	-62.20	-59.49	-56.77	-54.05	-51.34	-50.22
0.2	-64.47	-54.11	-51.44	-48.76	-46.11	-43.44	-42.99
0.3	-61.18	-49.65	-47.28	-44.91	-42.55	-40.18	-39.82
0.4	-57.48	-44.83	-42.79	-40.74	-38.69	-36.65	-36.38
0.5	-53.13	-39.50	-37.80	-36.10	-34.40	-32.70	-32.51
0.6	-47.72	-33.46	-32.12	-30.78	-29.45	-28.11	-28.0
0.7	-40.61	-26.53	-25.56	-24.59	-23.63	-22.66	-22.62
0.8	-30.81	-18.55	-17.95	-17.34	-16.74	-16.13	-16.13
0.9	-17.19	-9.60	-9.32	-9.03	-8.75	-8.46	-8.47

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-49.10	-47.99	-46.87	-45.75	-44.63	-42.99	-42.70
0.2	-42.54	-42.09	-41.64	-41.19	-40.72	-40.52	-40.55
0.3	-39.46	-39.09	-38.73	-38.37	-38.01	-37.87	-37.86
0.4	-36.11	-35.83	-35.56	-35.29	-35.01	-34.93	-35.07
0.5	-32.31	-32.13	-31.94	-31.76	-31.56	-31.52	-31.52
0.6	-27.88	-27.78	-27.67	-27.54	-27.45	-27.28	-27.41
0.7	-22.58	-22.53	-22.49	-22.45	-22.41	-22.54	-22.62
0.8	-16.11	-16.06	-16.09	-16.12	-16.15	-16.14	-16.12
0.9	-8.49	-8.48	-8.51	-8.54	-8.56	-8.65	-8.67

При вычислении угла направления распространения трещины на различных расстояниях от конца вершины трещины при различных значениях параметра смешанности нагружения удерживалось разное количество слагаемых и фиксировалось значение вычисленного угла. Если при увеличении количества слагаемых в пакете символьной математики Waterloo Maple с помощью асимптотического разложения значение угла сохранялось, то считалось, что значение стабилизировалось, в противном случае количество слагаемых увеличивалось до стабилизации постоянного значения угла. Из табл. 1 можно заметить, что высшие приближения играют существенную роль при определении углов направления роста трещины, а именно значения угла значительно зависят от удержания в решении высших приближений, это ярко выражено как для значений углов состояния нормального отрыва, так и для значений поперечного сдвига. Например, при параметре смешанности нагружения, равном  $M^e = 0.9$ , значение угла при удержании одного слагаемого (второй столбец табл. 1) равно  $-17.19^\circ$ , тогда как при удержании высших приближений значение угла координатно меняется и становится равным  $-9.60^\circ$  (третий столбец табл. 1). Разница составляет  $7.59^\circ$ . При поперечном сдвиге ( $M^e = 0.1$ ) разница в значениях углов также весьма заметна. При удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла составило  $-67.53^\circ$  (второй столбец табл.1), а при удержании высших приближений при этом же параметре смешанности нагружения  $M^e = 0.1$  значение угла составило  $-62.20^\circ$ . Таким образом, разница

между значениями углов равна  $5.33^\circ$ . Также можно заметить, что значения угла значительно отличаются при выборе расстояния от конца вершины трещины, особенно для значений нормального отрыва. При удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении (второй столбец табл. 1) значение угла не зависит от значения  $\hat{r}$ , тогда как с удержанием высших приближений при заданном значении  $\hat{r} = 1.75$  разница в значениях углов увеличивается почти в 2 раза для значений нормального отрыва.

График зависимости приведенных в табл. 1 результатов вычислений углов направления роста трещины от расстояния для разных значений параметра смешанности нагружения приведен на рис. 2. На графике можно заметить, что при реализации нагружений, близких к нормальному отрыву,  $M^e = 0.9$ , кривая зависимости более ярко отражает изменение угла направления распространения трещины, чем при реализации параметра смешанности нагружения, близкого к поперечному сдвигу  $M^e = 0.1$ . Потому как при значении параметра смешанности нагружения, близкого к поперечному сдвигу, кривая претерпевает значительные изменения только на начальных этапах расчета, а затем кривая стремительно принимает зависимость, близкую к линейной. Таким образом, изменения угла направления роста трещины проходят наиболее заметно, продвигаясь по кривым на графике от реализации состояния поперечного сдвига к состоянию нормального отрыва.

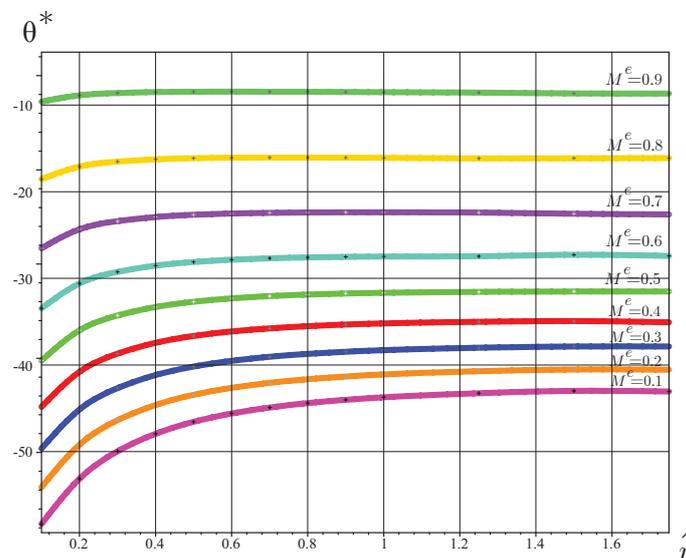


Рис. 2. Зависимость угла распространения трещины от расстояния от конца вершины трещины при использовании для расчетов критерия максимального тангенциального напряжения.

При использовании критерия максимального тангенциального напряжения расчет значений углов направления распространения трещины не зависит от того, какое состояние реализуется: плоское напряженное или плоское деформированное. Также значения угла не зависят от коэффициента Пуассона  $\nu$  и модуля Юнга  $E$ , которые непосредственно характеризуют упругие свойства материала, так как зависят не от геометрии тела, а от самой природы материала, из которого выполнен образец. В силу указанных причин рассмотрим следующий критерий механики разрушения – критерий минимума плотности энергии упругой деформации.

### 3. Критерий минимума плотности энергии упругой деформации

Данный критерий впервые сформулировал Дж. Си, предложивший модель разрушения материала, в которой используется локальная плотность потенциальной энергии деформации. В теории упругости под плотностью энергии деформации понимают удельную величину, которая характеризует энергию деформации материала в единице объема. Она может отличаться при переходе от одного элемента деформированного материала к другому. Дж. Си применил концепцию плотности энергии деформации для локального анализа энергетического поля вблизи вершины трещины и ввел понятие коэффициента плотности энергии деформации  $S$ . Модель Си учитывает, что поведение реальных материалов в некоторой области, которая прилегает к вершине трещины, не может быть корректно описано с помощью математического аппарата механики сплошной среды, так как в этой области материал сильно напряжен и претерпевает интенсивное деформирование, которое сопровождается накоплением повреждений и, следовательно, потерей сплошности и однородности. Исходя из этого, вводится понятие ядра трещи-

ны — внутренней области, окружающей вершину трещины, за пределами этой области поле напряжений может быть описано с точки зрения континуальной механики. Предполагается, что ядро имеет форму сферы для пространственных трещин и форму круга для плоских трещин, а его радиус не зависит от параметра смешанности, вида нагружения и геометрических особенностей вершины трещины и может служить характеристикой материала [30; 31]:

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_2 + a_{22}K_{II}^2, \quad (23)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{8}(1 + \nu)[(k - \cos\theta)(1 + \cos\theta)], \quad a_{12} = \frac{1}{8}(1 + \nu)\sin\theta[(1 - k) + 2\cos\theta], \quad (24)$$

$$a_{22} = \frac{1}{8}(1 + \nu)[(1 + k)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)].$$

Исходя из соотношений (24), направление дальнейшего распространения трещины может быть определено из условия минимума плотности энергии упругой деформации.

### 3.1. Математическая формулировка критерия

Математическая формулировка критерия минимума плотности энергии деформации имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0. \quad (25)$$

Для характеристики суммарной энергии, запасаемой материалом при его деформировании в изотермических условиях и при отсутствии действия окружающей среды, функция плотности энергии деформации записывается следующим образом [32]:

$$S = \frac{1}{2\nu} \left[ \frac{\varkappa + 1}{8} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^2 + \sigma_{r\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} \right], \quad (26)$$

где  $S$  — функция плотности энергии деформации,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\varkappa$  — постоянная плоской задачи теории упругости,  $\varkappa = 3 - 4\nu$  для плоского деформированного состояния,  $\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  для плоского напряженного состояния.

Критерий минимума плотности энергии упругой деформации рассматривает макроскопический элемент  $dV$  образца вблизи конца вершины трещины, при этом разрушение образца наступает в том случае, если накопленная энергия  $dW$  достигает своего критического значения для данного материала. При выполнении этого условия функция плотности энергии деформации определяется выражением:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r}, \quad (27)$$

где  $r$  — расстояние от конца вершины трещины.

Таким образом, функция плотности энергии деформации имеет вид:

$$S = r \frac{dW}{dV} = r \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\sigma_{zz} + \frac{1}{2G} (\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{z\theta}^2 + \sigma_{rz}^2)) \right], \quad (28)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (29)$$

где  $E$  — модуль Юнга.

Для плоской задачи теории упругости исключаем компоненту тензора напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  и упрощаем выражение:

$$S = r \frac{dW}{dV} = \frac{r}{2G} \left[ \frac{\varkappa + 1}{8} (\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2) - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr} + \sigma_{r\theta}^2 \right]. \quad (30)$$

Считается, что, когда энергия упругой деформации  $W$ , накопившаяся в элементарном объеме на определенном расстоянии  $r$  от конца вершины трещины в направлении угла  $\theta$  достигает критической величины  $W_c$  для данного материала, начинается разрушение. Сама энергетическая характеристика  $W$  является локальной и не отслеживает, когда нормальные напряжения растягивающие, а когда сжимающие; когда касательные напряжения действуют по часовой стрелке, когда — против. Это непосредственно важно для определения угла направления распространения трещины.

Условия разрушения критерия минимума плотности энергии упругой деформации сформулированы следующим образом: 1) трещина распространяется в направлении угла  $\theta$ , где коэффициент плотности энергии деформации  $S(\theta)$  имеет экстремальный минимум; 2) трещина начинает распространяться в направлении угла  $\theta$ , когда величина  $S$  достигает своего критического значения.

### 3.2. Обобщенный критерий минимума плотности энергии упругой деформации. Результаты расчетов

Критерий минимума плотности энергии деформации является локальным и рассматривает элемент объема, расположенный вблизи вершины трещины. Математическая форма критерия разрушения предполагает учет Т-напряжений в полном асимптотическом разложении поля напряжений у вершины трещины. Удержание Т-напряжений в асимптотическом решении приводит к более точному расчету и хорошему сопоставлению расчетных и экспериментальных данных, что позволяет хорошо и более правильно описать полученные результаты. При помощи пакета символьной математики Waterloo Maple и многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса возможно удержание любого наперед заданного количества слагаемых в асимптотическом разложении при выбранном смешанном нагружении, значения коэффициента Пуассона и заданном расстоянии от конца вершины трещины:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad (31)$$

$$S = r \frac{dW}{dV} = \frac{r}{2G} \left[ \frac{\nu + 1}{8} (\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2) - \sigma_{\theta\theta} \sigma_{rr} + \sigma_{r\theta}^2 \right]. \quad (32)$$

Плотность энергии  $S$  и тангенциальное напряжение вблизи вершины трещины вычисляются с применением асимптотического разложения и удержания в нем высших приближений. Результаты вычисления угла распространения трещины плоского деформированного и плоского напряженного состояний при разных значениях коэффициента Пуассона и параметра смешанности нагружения на заданных расстояниях от конца вершины трещины представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия минимума плотности энергии упругой деформации при реализации плоского напряженного состояния, на различных расстояниях от конца вершины трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$**

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-73.35	-73.78	-73.18	-72.58	-71.98	-71.39	-69.92
0.2	-67.19	-67.20	-66.50	-65.80	-65.10	-64.35	-63.06
0.3	-61.14	-60.44	-59.64	-58.84	-58.04	-57.21	-56.09
0.4	-55.14	-53.41	-52.55	-51.69	-50.83	-49.96	-49.31
0.5	-49.09	-46.03	-45.16	-44.29	-43.42	-42.54	-41.76
0.6	-42.83	-38.16	-37.34	-36.52	-35.70	-34.88	-34.26
0.7	-36.00	-29.67	-28.98	-28.29	-27.60	-26.88	-26.42
0.8	-27.82	-30.44	-27.43	-24.42	-21.41	-18.40	-18.09
0.9	-16.44	-10.47	-10.20	-9.93	-9.66	-9.39	-9.24

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-68.45	-66.98	-65.51	-64.04	-62.58	-60.40	-57.94
0.2	-61.77	-60.48	-59.19	-57.90	-56.60	-54.73	-52.16
0.3	-54.97	-53.85	-52.73	-51.61	-50.51	-48.92	-46.36
0.4	-48.36	-47.41	-46.46	-45.51	-44.26	-42.94	-40.52
0.5	-40.97	-40.19	-39.40	-38.62	-37.83	-36.75	-34.62
0.6	-33.64	-33.02	-32.40	-31.78	-31.14	-30.30	-28.61
0.7	-25.96	-25.50	-25.04	-24.58	-24.10	-23.48	-22.45
0.8	-17.79	-17.49	-17.18	-16.88	-16.57	-16.17	-16.02
0.9	-9.09	-8.94	-8.79	-8.64	-8.49	-8.30	-8.63

Графики зависимостей углов направления распространения трещины от расстояния, на котором считалось тангенциальное напряжение, при различных параметрах смешанности нагружения представлены в табл. 2.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что значения углов направления распространения трещины при реализации плоского напряженного состояния при разных значениях коэффициента Пуассона, равных  $\nu = 0.3$  и  $\nu = 0.5$  (табл. 2 и табл. 3), но при одном и том же параметре смешанности нагружения  $M^e = 0.1$ , значительно меняются. Так, при удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении угол направления роста трещины равен  $-73.35^\circ$  (второй столбец табл. 2) при  $\nu = 0.3$ , а при

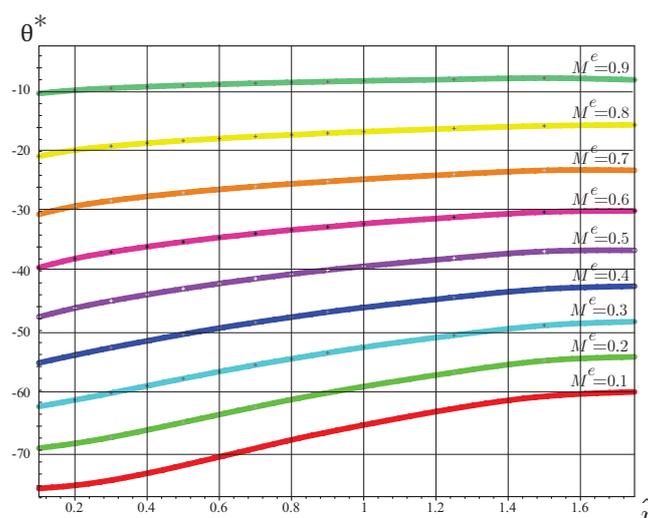


Рис. 3. Зависимость угла роста трещины от расстояния от конца вершины трещины при плоском напряженном состоянии критерия минимума плотности энергии упругой деформации ( $\nu = 0.3$ )

Таблица 3

**Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия минимума плотности энергии упругой деформации при реализации плоского напряженного состояния, на различных расстояниях от конца вершины трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$**

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-77.53	-76.84	-75.72	-74.6	-73.48	-72.36	-70.76
0.2	-71.51	-70.17	-68.19	-66.21	-64.23	-62.24	-61.33
0.3	-65.51	-63.24	-61.94	-60.64	-59.34	-58.03	-56.81
0.4	-59.42	-55.99	-54.66	-53.33	-52.00	-50.69	-49.65
0.5	-53.13	-48.30	-47.02	-45.74	-44.46	-43.17	-42.3
0.6	-46.41	-40.07	-38.9	-37.73	-36.56	-35.40	-34.71
0.7	-38.83	-31.15	-30.18	-29.21	-28.24	-27.28	-26.76
0.8	-29.51	-21.45	-20.76	-20.07	-19.38	-18.66	-18.31
0.9	-16.86	-10.98	-10.61	-10.24	-9.87	-9.52	-9.35

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-69.16	-67.56	-65.96	-64.36	-62.74	-60.51	-61.59
0.2	-60.42	-59.51	-58.6	-57.69	-56.78	-54.86	-49.39
0.3	-55.59	-54.37	-53.15	-51.93	-50.69	-49.04	-44.43
0.4	-48.61	-47.57	-46.53	-45.49	-44.43	-43.04	-35.74
0.5	-41.43	-40.56	-39.69	-38.82	-37.97	-36.84	-33.50
0.6	-34.02	-33.33	-32.64	-31.95	-31.24	-30.35	-29.23
0.7	-26.24	-25.72	-25.2	-24.68	-24.15	-23.49	-20.86
0.8	-17.96	-17.61	-17.26	-16.91	-16.58	-16.15	-17.27
0.9	-9.18	-9.01	-8.84	-8.67	-8.49	-8.27	-9.30

коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.5$  угол составил  $-77.53^\circ$  (второй столбец табл. 3). Разница в значениях углов значительна и равна  $4.18^\circ$ .

При реализации плоского деформированного состояния при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  и параметра смешанности нагружения, близкого к поперечному сдвигу  $M^e = 0.1$ , угол направления роста трещины составил  $-76.21^\circ$  (второй столбец табл. 4), а при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$  при таком же параметре смешанности нагружения угол был равен  $-83.98^\circ$ . Разница составила  $7.77^\circ$ , т. е. при реализации плоского деформированного состояния значение угла направления роста трещины увеличилось на  $7.77^\circ$ .

Если сравнивать результаты углов при плоском напряженном и плоском деформированном состояниях при одном и том же значении коэффициента Пуассона, например при  $\nu = 0.3$ , то можно заметить

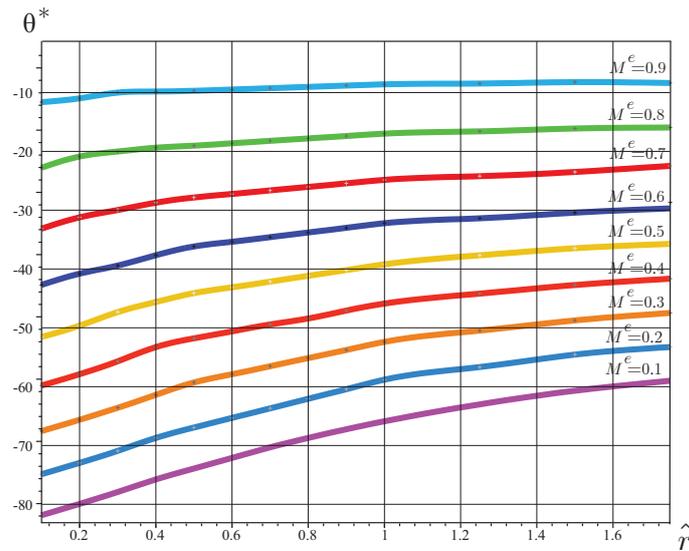


Рис. 4. Зависимость угла роста трещины от расстояния от конца вершины трещины при плоском напряженном состоянии критерия минимума плотности энергии упругой деформации ( $\nu = 0.5$ )

Таблица 4

Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия минимума плотности энергии упругой деформации при реализации плоского деформированного состояния, на различных расстояниях от конца вершины трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-76.21	-75.85	-74.90	-73.95	-73.00	-72.04	-70.48
0.2	-70.14	-69.23	-68.17	-67.11	-66.05	-64.98	-63.58
0.3	-64.14	-62.34	-61.28	-60.22	-59.16	-57.79	-56.58
0.4	-58.12	-55.19	-54.13	-53.07	-52.01	-50.51	-49.39
0.5	-51.92	-47.65	-46.59	-45.53	-44.47	-42.96	-42.13
0.6	-45.41	-39.49	-38.43	-37.37	-36.31	-35.24	-37.57
0.7	-38.02	-30.70	-29.81	-28.92	-28.03	-27.16	-26.65
0.8	-29.06	-21.18	-20.63	-20.08	-19.53	-19.00	-18.18
0.9	-16.77	-10.87	-10.53	-10.19	-9.85	-9.51	-9.28

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-68.92	-67.56	-65.80	-64.24	-62.68	-60.68	-57.95
0.2	-62.21	-60.84	-59.47	-58.10	-56.72	-54.81	-52.18
0.3	-55.40	-54.22	-53.04	-51.86	-50.63	-49.00	-46.38
0.4	-48.33	-47.27	-46.21	-45.15	-44.38	-43.01	-40.55
0.5	-41.29	-40.45	-39.61	-38.77	-37.92	-36.81	-34.64
0.6	-33.90	-33.23	-32.56	-31.89	-31.20	-30.33	-24.63
0.7	-26.15	-25.65	-25.15	-24.65	-24.13	-23.48	-22.46
0.8	-17.78	-17.38	-16.98	-16.58	-16.15	-16.15	-15.99
0.9	-9.08	-8.88	-8.68	-8.48	-8.28	-8.28	-8.56

разницу углов при равных параметрах смешанности нагружения. При значении параметра смешанности нагружения, близком к поперечному сдвигу  $M^e = 0.1$ , углы равны  $-73.35^\circ$  (второй столбец табл. 2) при плоском напряженном состоянии и  $-76.21^\circ$  (второй столбец табл. 3) при плоском деформированном состоянии. Разница составляет  $2.86^\circ$ . При значении параметра смешанности нагружения, близком к нормальному отрыву  $M^e = 0.9$ , углы практически не имеют разницы в значениях и равны  $-16.44^\circ$  при плоском напряженном состоянии (второй столбец табл. 2) и  $-16.86^\circ$  (второй столбец табл. 3) при плоском деформированном состоянии.

Заметна разница в значениях углов при удержании высших приближений. Так, при реализации плоского напряженного состояния и коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  можно заметить разницу в углах при

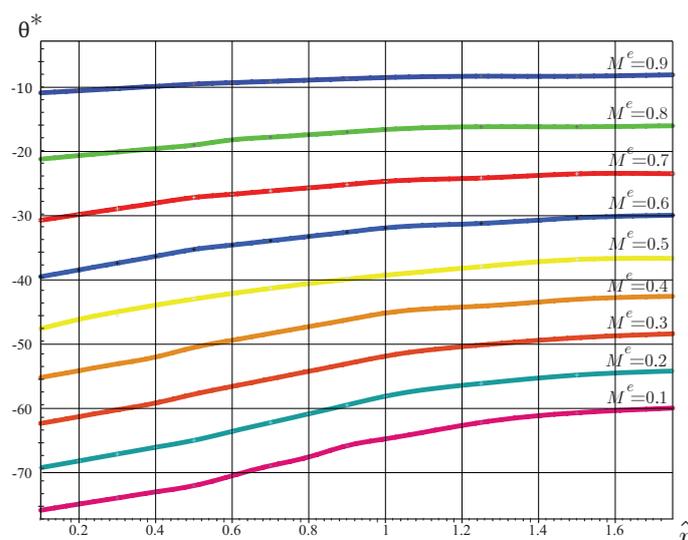


Рис. 5. Зависимость угла роста трещины от расстояния от конца вершины трещины при плоском деформированном состоянии критерия минимума плотности энергии упругой деформации ( $\nu = 0.3$ )

Таблица 5

**Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия минимума плотности энергии упругой деформации при реализации плоского деформированного состояния, на различных расстояниях от конца вершины трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$**

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-83.98	-81.86	-79.88	-77.90	-75.92	-73.92	-72.07
0.2	-77.93	-75.01	-72.92	-70.83	-68.74	-66.65	-65.00
0.3	-71.68	-67.56	-65.48	-63.40	-61.32	-59.28	-57.89
0.4	-65.19	-59.82	-57.81	-55.80	-53.79	-51.78	-50.06
0.5	-58.28	-51.53	-49.67	-47.81	-45.95	-44.10	-43.17
0.6	-50.69	-42.71	-41.08	-39.45	-37.82	-36.16	-35.36
0.7	-41.91	-33.18	-31.85	-30.52	-29.19	-27.84	-27.24
0.8	-31.13	-22.75	-21.81	-20.87	-19.93	-19.03	-18.62
0.9	-17.21	-11.62	-11.13	-10.64	-10.15	-9.70	-9.49

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-70.22	-68.37	-66.52	-64.67	-63.00	-60.69	-58.01
0.2	-63.35	-61.70	-60.05	-58.40	-57.07	-55.05	-52.76
0.3	-56.50	-55.11	-53.72	-52.33	-50.97	-49.24	-46.47
0.4	-49.42	-48.24	-47.06	-45.88	-44.68	-43.22	-40.65
0.5	-42.24	-41.31	-40.38	-39.45	-38.17	-36.97	-34.73
0.6	-34.56	-33.76	-32.96	-32.16	-31.38	-30.42	-28.69
0.7	-26.64	-26.04	-25.44	-24.84	-24.22	-23.50	-22.47
0.8	-18.21	-17.61	-17.01	-16.41	-16.60	-16.11	-15.95
0.9	-9.28	-9.07	-8.37	-8.16	-8.47	-8.23	-8.38

нормальном отрыве  $M^e = 0.9$  во втором и третьем столбцах табл. 2, где значения равны  $-16.44^\circ$  и  $-10.47^\circ$ . Введение в асимптотическое разложение высших приближений привело к разнице углов направления роста трещины  $\approx 6^\circ$ . При значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$  при плоском напряженном состоянии и параметре смешанности  $M^e = 0.9$  значения углов равны  $-16.86^\circ$  и  $-10.98^\circ$  (второй и третий столбы табл. 3). Разница составляет также  $\approx 6^\circ$ .

При реализации плоского деформированного состояния при параметре смешанности, близком к нормальному отрыву  $M^e = 0.9$ , очевидна разница в значениях углов при введении высших приближений. При удержании одного слагаемого значение угла составило  $-16.77^\circ$  при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.3$

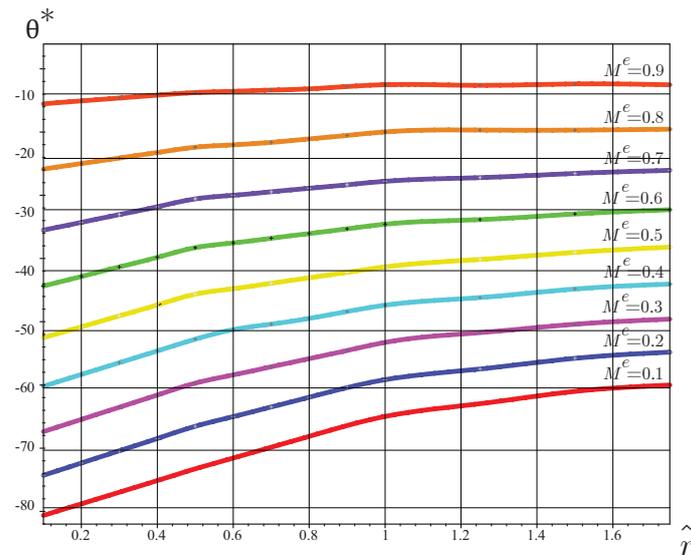


Рис. 6. Зависимость угла роста трещины от расстояния от конца вершины трещины при плоском деформированном состоянии критерия минимума плотности энергии упругой деформации ( $\nu = 0.5$ ).

(второй столбец табл. 4) и  $-17.21^\circ$  при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.5$  (второй столбец табл. 5). При введении высших приближений значения этих углов при том же параметре смешанности нагружения  $M^\epsilon = 0.9$  значительно меняются и составляют  $-10.87^\circ$  при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  и  $-11.62^\circ$  при  $\nu = 0.5$ .

Таким образом, разница в значениях углов направления распространения трещины при реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояний очевидна. При изменении значения коэффициента Пуассона  $\nu$  значения углов также претерпевают значительные изменения. Огромную роль при расчете результатов, приведенных в табл. 2–5, играет удержание высших приближений в асимптотическом разложении, вычисленных с помощью пакета символьной математики Waterloo Maple. В некоторых случаях расхождения в значениях углов составляют 2 раза. Графики зависимостей (рис. 3–6) наглядно отображают табличные значения углов направления распространения трещины от расстояния от конца вершины трещины, параметра смешанности нагружения  $M^\epsilon$  и значения коэффициента Пуассона  $\nu$  при плоском напряженном и плоском деформированном состояниях. Иллюстрация зависимостей показывает необходимость удержания высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса при расчете углов направления распространения трещины, так как введение необходимого количества слагаемых в асимптотическое разложение сводит зависимость углов от расстояния ближе к линейной. Для получения более полной наглядности зависимости углов направления роста трещины от расстояния от конца вершины трещины, параметра смешанности нагружения и коэффициента Пуассона необходимо рассмотреть следующий критерий механики разрушения – деформационный критерий.

#### 4. Деформационный критерий разрушения

Первый критерий деформационного типа связывают с именем А.Сен – Венана. Определение данного критерия вытекает из гипотезы наибольшей деформации, которая гласит, что разрушение независимо от вида напряженного состояния наступает при достижении наибольшим (по модулю) из компонентов деформации предельного значения для данного материала [33]. В основе данной формулировки критерия лежит положение о том, что значение максимальной растягивающей деформации  $\epsilon_c$  в зоне вершины трещины соответствует предельному состоянию материала, и, как следствие, раскрытию берегов трещины в зоне ее вершины на определенную для данного материала величину. Величина раскрытия берегов трещины определяется на основе испытания образцов с трещинами с использованием специальных приборов с датчиками раскрытия трещин или измерения поля перемещений вблизи раскрытия дефекта для данного исследуемого материала. В образце, состоящем из любого материала, выделяют две области трещины: внутреннюю и концевую. К внутренней области относят противоположные берега трещины, находящиеся друг от друга на каком-то определенном расстоянии, так что их взаимодействие между собой пренебрежимо мало. При этом считают, что поверхность трещины свободна от напряжений, обусловленных взаимодействием противоположных берегов. Концевая область трещины, называемая также зоной

предразрушения, примыкает к внешнему контуру трещины. В этой области противоположные берега подходят друг к другу так, что молекулярные силы притяжения, взаимодействующие между берегами трещины, имеют значительную интенсивность.

Данный критерий имеет прямую зависимость от состояния, которое реализуется при нагружении образца: плоское напряженное или плоское деформированное, а также от выбора значений коэффициента Пуассона и модуля Юнга, которые характеризуют упругие свойства рассматриваемого образца. Значение угла направления распространения трещины при использовании деформационного критерия в пакете символьной математики Waterloo Maple зависит главным образом и от выбора расстояния от конца вершины трещины. Следовательно, для расчета углов распространения трещины очень важно и необходимо удержание высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса для получения более точных и достоверных результатов вычислений, которые в дальнейшем можно будет соотнести с результатами реального эксперимента и провести сравнение получившихся данных.

#### 4.1. Математическая формулировка критерия

Процедура нахождения полей напряжений для разных видов смешанных форм деформирования предложена в [34–37]. Предположение авторов состоит в том, что направление распространения трещины заключается в определении значений максимальных тангенциальных напряжений вблизи вершины трещины, а сам критерий является функцией соответствующих параметров, представленных ниже в математических формулировках. Следовательно, условие дальнейшего распространения трещины реализуется в некоторой определенной точке с угловой координатой, в которой, в свою очередь, существует максимум окружных нормальных напряжений. Таким образом, именно максимум определяет тип граничного условия, а его точка приложения задается так, чтобы была возможность перебрать значения угла дальнейшего роста трещины для расчета полного диапазона смешанных форм нагружения при плоском напряженном или плоском деформированном состоянии, а также применения различных значений коэффициента Пуассона, который, в свою очередь, определяет значение упругих констант материала. Таким образом, аналитическое решение задачи при реализации различных смешанных форм деформирования заключается в максимальном значении окружной деформации:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0. \quad (33)$$

Значение угла направления роста трещины при использовании данного критерия зависит от выбора значения коэффициента Пуассона  $\nu$ , который в проведенных расчетах принимает значения, равные  $\nu = 0.3$  и  $\nu = 0.5$ . Деформационный критерий разрушения активно исследуется в настоящее время. Существует множество гипотез, представленных многими авторами [10; 13], которые уверены в том, что этот критерий требует к себе определенного внимания для более точного расчета угла направления распространения трещин, возникающих в образцах, находящихся в различных напряженных состояниях и видах смешанного нагружения.

#### 4.2. Обобщенный критерий деформационного разрушения. Результаты вычислений

При помощи пакета символьной математики Waterloo Maple и многопараметрического асимптотического разложения поля напряжений у вершины трещины М. Уильямса было проведено исследование деформационного критерия разрушения, значение которого основано на максимальном значении окружной деформации. Данный критерий гласит, что разрушение независимо от вида напряженного состояния происходит при достижении наибольшим (по модулю) из компонентов деформации предельного для данного материала значения [5]. Расчет угла направления распространения трещины проходил при применении разного значения параметра смешанности нагружения  $M^e$ , так как это параметр имеет интервалы  $0.1 \leq M^e \leq 0.9$  и реализации плоского напряженного состояния и плоской деформации при различных значениях коэффициента Пуассона, которое принималось равным либо  $\nu = 0.3$ , либо  $\nu = 0.5$ . Общая математическая формулировка для расчета значения максимальной окружной деформации имеет вид:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr} + \sigma_{zz}). \quad (34)$$

Расчет значения окружной деформации при реализации плоского напряженного состояния:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}), \quad \sigma_{zz} = 0, \quad (35)$$

при реализации плоского деформированного состояния:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{E}[\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr} + \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})], \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (36)$$

В пакете математической алгебры Waterloo Maple были выполнены расчеты углов направления распространения трещины при реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояний при различном расстоянии от конца вершины трещины. Значение коэффициента Пуассона принималось равным  $\nu = 0.3$  и  $\nu = 0.5$  при разных параметрах смешанности нагружения  $M^e$ , так как значения, используемые в математических расчетах, принимались в интервале  $0.1 \leq M^e \leq 0.9$ . Результаты расчетов углов распространения трещины представлены в табл. 6–9.

Полученные результаты расчетов, представленные в табл. 6–9, выполнены в виде графиков на рис. 7–10, которые наглядно отображают зависимость угла направления роста трещины от расстояния  $\hat{r}$  от конца вершины трещины и параметра смешанности нагружения  $M^e$ .

Таблица 6

**Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия окружной деформации при реализации плоского напряженного состояния, на различных расстояниях от кончика трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$**

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-61.79	-53.71	-49.61	-47.21	-45.72	-44.74	-44.07
0.2	-59.33	-49.98	-46.10	-43.96	-42.67	-41.85	-41.30
0.3	-56.66	-46.02	-42.42	-40.59	-39.48	-38.80	-38.37
0.4	-53.61	-41.71	-38.46	-36.88	-36.01	-35.48	-35.16
0.5	-49.96	-36.89	-34.06	-32.78	-32.11	-31.74	-31.52
0.6	-45.32	-31.37	-29.03	-28.06	-27.60	-27.36	-27.25
0.7	-39.05	-24.96	-23.17	-22.51	-22.24	-22.13	-22.10
0.8	-30.08	-17.52	-16.33	-15.95	-15.82	-15.80	-15.82
0.9	-17.05	-9.08	-8.49	-8.33	-8.29	-8.31	-8.34

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-43.61	-43.28	-43.04	-42.87	-42.62	-42.51	-42.48
0.2	-40.92	-40.66	-40.48	-40.35	-40.18	-40.12	-40.10
0.3	-38.08	-37.89	-37.76	-37.67	-37.57	-37.55	-37.56
0.4	-34.96	-34.83	-34.75	-34.70	-34.66	-34.68	-34.71
0.5	-31.39	-31.33	-31.29	-31.28	-31.30	-31.35	-31.41
0.6	-27.19	-27.18	-27.19	-27.21	-27.28	-27.36	-27.43
0.7	-22.11	-22.14	-22.18	-22.22	-22.32	-22.42	-22.49
0.8	-16.03	-16.06	-16.10	-16.14	-16.24	-16.34	-16.41
0.9	-9.58	-9.61	-9.65	-9.69	-9.79	-9.89	-9.96

Анализ полученных результатов вычислений позволяет сделать вывод о резком изменении угла направления распространения трещины при удержании высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса. При реализации плоского напряженного состояния и коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  при значении параметра смешанности нагружения  $M^e = 0.1$  с удержанием одного главного слагаемого асимптотического разложения значение угла равно  $-61.79^\circ$  (второй столбец табл. 6), а при  $\nu = 0.3$  с тем же параметром смешанности нагружения  $M^e = 0.1$  значение угла существенно не меняется, но становится равно  $-59.10^\circ$  (второй столбец табл. 7). Разница в значениях угла составляет  $2.69^\circ$ .

Значение угла направления роста трещины при плоском напряженном состоянии с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.3$  для параметра смешанности нагружения  $M^e = 0.9$  с удержанием одного главного слагаемого в асимптотическом разложении равно  $-17.05^\circ$  (второй столбец табл. 6). При удержании высших приближений в асимптотическом разложении значение угла меняется примерно в 2 раза и становится равным  $-9.08^\circ$  (третий столбец табл. 6). При реализации плоского напряженного состояния для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$  и параметра смешанности нагружения  $M^e = 0.9$  с удержанием одного слагаемого в асимптотическом разложении угол составляет  $-16.98^\circ$  (второй столбец табл. 7), а при удержании высших приближений значение этого угла становится равным  $-8.82^\circ$  (третий столбец табл. 7). Разница между значениями углов с одним слагаемым и с удержанием высших приближений составляет примерно 2 раза и равна  $8.16^\circ$ .

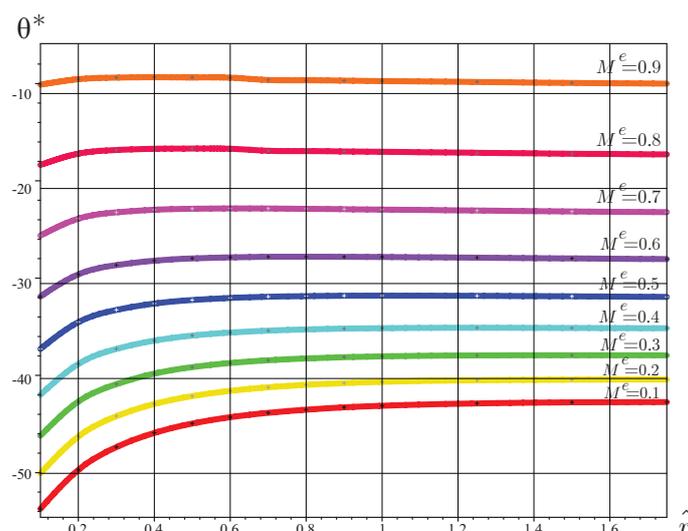


Рис. 7. Зависимость угла роста трещины от расстояния от кончика трещины при плоском напряженном состоянии деформационного критерия разрушения ( $\nu = 0.3$ )

Таблица 7

Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия окружной деформации при реализации плоского напряженного состояния, на различных расстояниях от кончика трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-59.10	-51.61	-48.02	-45.97	-44.72	-43.91	-43.38
0.2	-56.89	-48.08	-44.68	-42.86	-41.78	-41.16	-40.69
0.3	-54.49	-44.33	-41.17	-39.59	-38.70	-38.17	-37.84
0.4	-51.73	-40.24	-37.37	-36.05	-35.34	-34.94	-34.71
0.5	-48.38	-35.64	-33.14	-32.08	-31.56	-31.29	-31.16
0.6	-44.09	-30.35	-28.28	-27.49	-27.16	-27.01	-26.97
0.7	-38.23	-24.19	-22.61	-22.09	-21.91	-21.87	-21.89
0.8	-29.69	-17.00	-15.95	-15.67	-15.61	-15.64	-15.70
0.9	-16.98	-8.82	-8.30	-8.19	-8.19	-8.23	-8.28

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-43.01	-42.76	-42.59	-42.48	-42.33	-42.29	-42.31
0.2	-40.40	-40.22	-40.10	-40.02	-39.93	-39.94	-39.96
0.3	-39.08	-37.89	-37.76	-37.67	-37.57	-37.56	-37.55
0.4	-31.40	-31.33	-31.30	-31.28	-31.30	-31.35	-31.41
0.5	-34.96	-34.83	-34.75	-34.70	-34.66	-34.68	-34.75
0.6	-27.20	-27.18	-27.19	-27.21	-27.28	-27.36	-27.43
0.7	-21.95	-22.01	-22.08	-22.14	-22.29	-22.40	-22.49
0.8	-15.77	-15.85	-15.92	-15.98	-16.12	-16.22	-16.30
0.9	-8.34	-8.39	-8.44	-8.48	-8.56	-8.63	-8.67

При реализации плоского деформированного состояния разница в значениях углов направления роста трещин заметна как для нормального отрыва, так и для поперечного сдвига. При значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  и параметра смешанности нагружения  $M^e = 0.1$  с удержанием одного слагаемого в асимптотическом разложении М. Уильямса значение угла равно  $-59.99^\circ$  (второй столбец табл. 8), а при удержании высших приближений угол направления роста трещины принимает значение  $-52.30^\circ$  (третий столбец табл. 8). Разница при этом равна  $7.69^\circ$ . При значении параметра смешанности нагружения, близком к нормальному отрыву  $M^e = 0.9$ , и коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$  с удержанием главного слагаемого в асимптотическом разложении величина угла роста трещины составила  $-17.00^\circ$  (второй

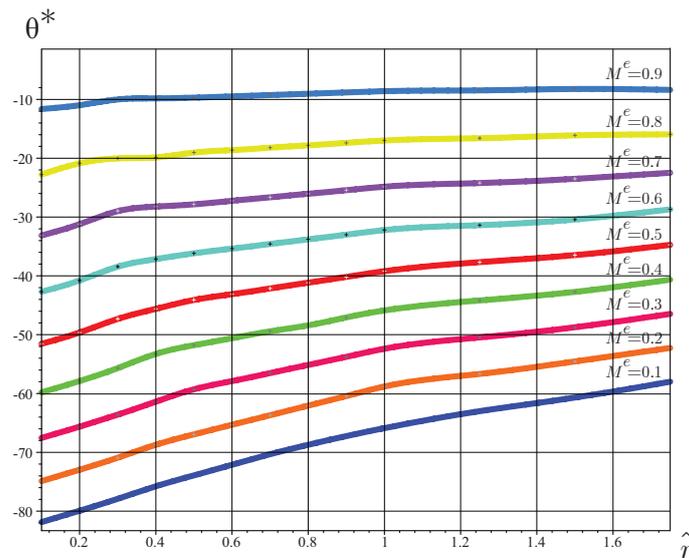


Рис. 8. Зависимость угла роста трещины от расстояния от конца вершины трещины при плоском напряженном состоянии деформационного критерия разрушения ( $\nu = 0.5$ )

Таблица 8

**Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия окружной деформации при реализации плоского деформированного состояния, на различных расстояниях от конца вершины трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$**

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-59.99	-52.30	-48.54	-46.38	-45.05	-44.18	-43.60
0.2	-57.70	-48.70	-45.14	-43.22	-42.07	-41.35	-40.89
0.3	-55.21	-44.89	-41.58	-39.91	-38.95	-38.37	-38.01
0.4	-52.35	-40.72	-37.73	-36.32	-35.56	-35.12	-34.86
0.5	-48.91	-36.05	-33.44	-32.31	-31.74	-31.44	-31.28
0.6	-44.51	-30.69	-28.53	-27.68	-27.30	-27.13	-27.06
0.7	-38.50	-24.44	-22.80	-22.23	-22.02	-21.96	-21.96
0.8	-29.82	-17.17	-16.08	-15.76	-15.68	-15.69	-15.74
0.9	-17.00	-8.91	-8.37	-8.24	-8.22	-8.26	-8.30

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-43.21	-42.93	-42.74	-42.60	-42.42	-42.36	-42.36
0.2	-40.57	-40.36	-40.22	-40.13	-40.01	-39.99	-40.01
0.3	-37.78	-37.63	-37.54	-37.48	-37.43	-37.45	-37.48
0.4	-34.70	-34.62	-34.57	-34.55	-34.55	-34.60	-34.66
0.5	-31.19	-31.16	-31.15	-31.16	-31.23	-31.30	-31.37
0.6	-27.04	-27.06	-27.09	-27.13	-27.23	-27.33	-27.41
0.7	-22.01	-22.05	-22.11	-22.17	-22.30	-22.41	-22.49
0.8	-16.98	-17.02	-17.08	-17.14	-17.27	-17.38	-17.46
0.9	-9.56	-9.62	-9.68	-9.74	-9.87	-9.98	-10.06

столбец табл. 8). Тогда как при удержании высших приближений значение угла с разницей примерно в 2 раза при этих же параметрах составило  $-8.91^\circ$  (третий столбец табл. 8).

Сравнение значений углов распространения трещин в табл. 9 плоского деформированного состояния при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$  приводит к заметной разнице между значениями с удержанием одного слагаемого (второй столбец табл. 9) и с удержанием высших приближений (третий столбец табл. 9). Для параметра смешанности нагружения  $M^e = 0.1$  значение угла составляет  $-54.52^\circ$  (второй столбец табл. 9). С удержанием высших приближений значение угла заметно меняется и составляет  $-48.12^\circ$  (третий столбец табл. 9). Разница существенна и равна  $6.4^\circ$ . При значении параметра смешанности нагружения  $M^e = 0.9$  угол направления роста трещины становится равным  $-16.82^\circ$  (второй столбец табл. 9). При введении высших приближений в асимптотическое разложение появляется

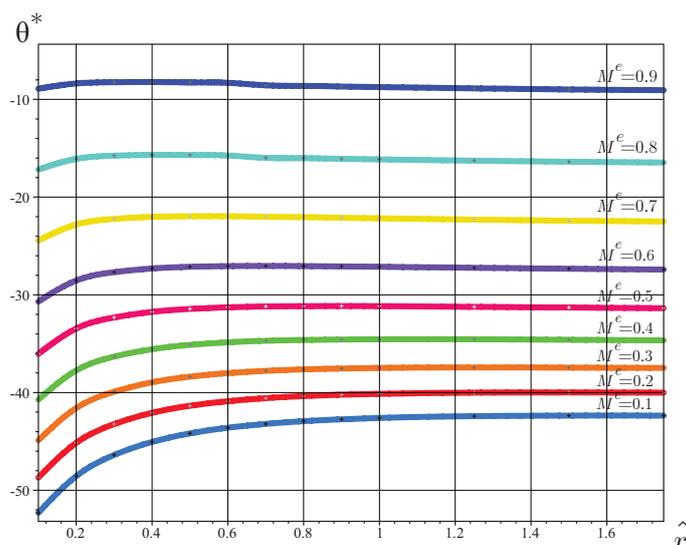


Рис. 9. Зависимость угла роста трещины от расстояния от кончика трещины при плоском деформированном состоянии деформационного критерия разрушения ( $\nu = 0.3$ ).

Таблица 9

Углы направления роста трещины, полученные с помощью обобщенного критерия окружной деформации при реализации плоского деформированного состояния, на различных расстояниях от конца вершины трещины. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$

$M^e$	$N = 1$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.2$	$\hat{r} = 0.3$	$\hat{r} = 0.4$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.6$
0.1	-54.52	-48.12	-45.39	-43.92	-43.06	-42.54	-42.23
0.2	-52.70	-44.90	-42.31	-41.01	-40.30	-39.90	-39.67
0.3	-50.70	-41.47	-39.06	-37.96	-37.40	-37.10	-36.95
0.4	-48.39	-37.71	-35.53	-34.63	-34.21	-34.03	-33.96
0.5	-45.56	-33.47	-31.56	-30.87	-30.61	-30.53	-30.54
0.6	-41.86	-28.58	-26.99	-26.52	-26.40	-26.41	-26.49
0.7	-36.69	-22.83	-21.63	-21.36	-21.35	-21.44	-21.56
0.8	-28.92	-16.08	-15.29	-15.18	-15.24	-15.36	-15.49
0.9	-16.82	-8.36	-7.97	-7.95	-8.01	-8.10	-8.19

$M^e$	$\hat{r} = 0.7$	$\hat{r} = 0.8$	$\hat{r} = 0.9$	$\hat{r} = 1.0$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$
0.1	-42.03	-41.92	-41.86	-41.83	-41.85	-41.93	-42.02
0.2	-39.54	-39.48	-39.46	-39.47	-39.53	-39.63	-39.73
0.3	-37.78	-37.63	-37.54	-37.48	-37.43	-37.45	-37.48
0.4	-31.20	-31.16	-31.15	-31.16	-31.23	-31.30	-31.37
0.5	-34.70	-34.62	-34.57	-34.55	-34.55	-34.60	-34.69
0.6	-27.04	-27.06	-27.09	-27.13	-27.23	-27.33	-27.41
0.7	-21.68	-21.80	-21.92	-22.02	-22.22	-22.38	-22.49
0.8	-15.62	-15.73	-15.84	-15.93	-16.11	-16.23	-16.32
0.9	-8.27	-8.34	-8.41	-8.46	-8.57	-8.65	-8.69

заметная разница в  $8.46^\circ$  и угол при этих же параметрах расчета становится равным  $-8.36^\circ$  (третий столбец табл. 9).

После подведения итогов вычислений, очевидна необходимость в учете высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса, так как это существенно влияет на расчет угла направления распространения трещины в пакете символьной математики Waterloo Maple. Отображение результатов вычислений на графиках (рис. 7–10) наглядно показывает изменение направления роста трещины с удержанием высших приближений, особенно на начальных этапах расчета углов, затем эти изменения ставятся менее заметными и графики принимают зависимость, близкую к линейной. Графики результатов вычислений по-разному иллюстрируют зависимость значения угла роста трещины от расстояния

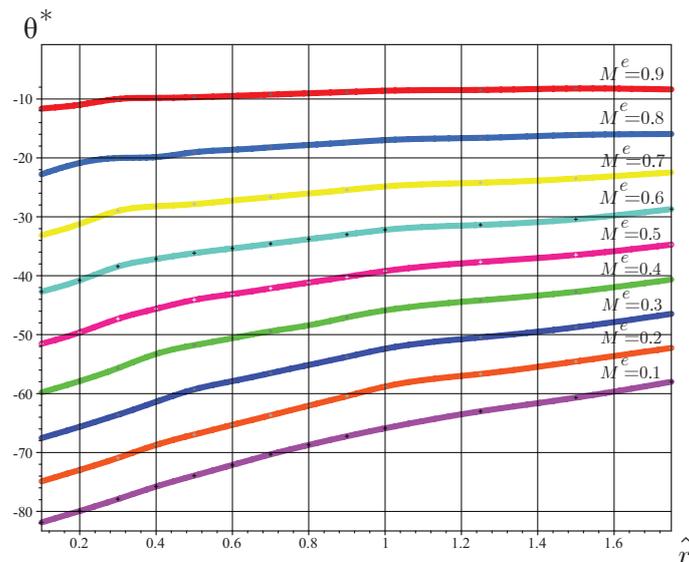


Рис. 10. Зависимость угла роста трещины от расстояния от кончика трещины при плоском деформированном состоянии деформационного критерия разрушения ( $\nu = 0.5$ )

в зависимости от значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  или  $\nu = 0.5$ . При значении  $\nu = 0.3$  графики претерпевают значительные изменения на начальных этапах расчета значений углов направления роста трещины, затем эта зависимость приближается к линейной. При значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$  графики результатов вычислений претерпевают изменения практически на всех этапах расчета и параметра смешанности нагружения  $M^e$ , но в конце расчетов, когда расстояние от конца вершины трещины становится максимальным, графики сводят свою зависимость ближе к линейной. Чтобы лучше провести оценку рассчитанных углов, необходимо провести исследование разрушения хрупких образцов в программном комплексе Simulia Abaqus, получить значения углов направления распространения трещины и соотнести их с вычисленными в пакете математической алгебры данными и тем самым убедиться в том, что удержание высших приближений в асимптотическом разложении играет существенную роль при расчете углов направления распространения трещины [39; 40].

## Выводы

В настоящей статье были определены углы направления распространения трещины при использовании трех критериев разрушения: критерия максимального тангенциального напряжения, критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия разрушения. Определено, что из трех рассмотренных критериев механики разрушения наиболее подходящим является критерий минимума плотности упругой деформации. Проведенные в пакете компьютерной алгебры расчеты показали необходимость удержания высших приближений в многопараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса, так как значение угла распространения трещины существенно меняется при удержании высших приближений.

## Литература

- [1] Aliha M.R.M. On the predicting mode II fracture toughness (KIIC) of hot mix asphalt mixtures using the strain energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. V. 99. P. 36–43. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.001.
- [2] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 744 с. URL: <http://bookfi.net/book/449675>.
- [3] Berto F., Ayatollahi M.R. A review of the local strain energy density approach to V-notches // Physical mesomechanics. 2017. V. 20. № 2. P. 14–27. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/a-review-of-the-local-strain-energy-density-approach-applied-to-v-notches>.
- [4] Razavi M.J., Aliha M.R.M., Berto F. Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimen // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2017. № 33. P. 25–33. DOI: 10.1016/j.tafmec.2017.07.004.

- [5] Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с. URL: <http://en.bookfi.net/book/469091>.
- [6] Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с. URL: <http://en.bookfi.net/book/438624>.
- [7] Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: СПбГУ, 1997. 122 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/646224/38694f>.
- [8] Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит, 2006. 328 с. URL: [https://www.studmed.ru/matvienko-yug-modeli-i-kriterii-mehaniki-razrusheniya\\_9b25979bcbf.html](https://www.studmed.ru/matvienko-yug-modeli-i-kriterii-mehaniki-razrusheniya_9b25979bcbf.html).
- [9] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с. URL: [https://www.studmed.ru/kachanov-lm-osnovy-mehaniki-razrusheniya\\_b7befb002cc.html](https://www.studmed.ru/kachanov-lm-osnovy-mehaniki-razrusheniya_b7befb002cc.html).
- [10] Партон В.З. Механика разрушения: от теории к практике. М.: Наука, 1990. 240 с. URL: <http://www.zodchii.ws/books/info-1206.html>.
- [11] Сибгатуллин С.Э., Сибгатуллин К.Э. О тензоре коэффициентов интенсивности напряжений и критериях разрушения в механике трещин // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 2. С. 56–60. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21111142>.
- [12] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с. URL: <https://mexalib.com/view/5347>.
- [13] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/438640/07ed20>.
- [14] Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
- [15] The effective T-stress estimation and crack path emanating from U-notches / H.M. Meliani [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2010. V. 77. P. 1682–1692. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.010.
- [16] Писаренко Г.С., Лебедев А.Я. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/775569/d71d58>.
- [17] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 2012. 640 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/438682/d295ae>.
- [18] Херцберг Р.В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов. М.: Металлургия, 1989. 576 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/3674015/7fc2af>.
- [19] Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. № 3. С. 345–361.
- [20] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams Asymptotic Expansion near the Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane // Solid State Phenomena. 2017. V. 258. P. 209–212. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.225.
- [21] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 4. С. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12.
- [22] Stepanova L., Roslyakov P. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1785. 030029. DOI: 10.1063/1.4967050.
- [23] Sih G.C. Application of Strain – Energy – Density Theory to Fundamental Fracture Problem // Institute of Fracture and Solid Mechanical Technical Report, Lehigh University, AFOSR-RT-73-1, 1973. P. 19–21.
- [24] Mirsayar M.M. Mixed mode fracture analysis using extended maximum tangential strain criterion // Materials and Design. 2015. V. 86. P. 941–947. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.07.135.
- [25] Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam, Berto F. A generalized strain energy density criterion for mixed mode fracture analysis in brittle and quasi-brittle materials // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2015. V. 79. P. 70–76. DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.09.004.
- [26] Леган М.А., Леган Н.А. Динамика сплошной среды. Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Новосибирск: ИГиЛ, 1990. С. 49–60.
- [27] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566.
- [28] Stepanova L.V. Eigenvalue of the antiplane shear crack problem for a power-law material // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. V. 49. № 1. P. 142–147. DOI: 10.1007/s10808-008-0021-7.
- [29] Stepanova L.V., Fedina M.Ye. Self-similar solution of a tensile crack problem in a coupled formulation // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. V. 72. № 3. P. 360–368. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.07.015.

- [30] Sih G.C. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems // Intern. J. Fract. 1974. V. 10. № 3. P. 305–321. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00035493>.
- [31] Wong A.K. On the application of the strain energy density theory in predicting crack initiation and angle of growth // Engng Fract. Mech. 1997. V. 27. № 2. P. 157–170.
- [32] Овчаренко Ю.Н. Плотность энергии деформации в линейной механике разрушения применительно к V-образным вырезам // Актуальные вопр. механики. 2006. № 2. С. 141–149.
- [33] Лавит И.М. Об асимптотике полей напряжений и деформаций в окрестности кончика трещины // Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 54–57. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12328106>.
- [34] Шлянников В.Н. Вычислительная механика деформирования и разрушения. Казань: КГЭУ. 2001. 257 с.
- [35] Шлянников В.Н., Шканов И.Н. К расчету коэффициентов интенсивности напряжений для пластины с произвольно ориентированной трещиной при двухосном нагружении // Динамика и прочность механических систем. Пермь: ППИ, 1981. С. 181–185.
- [36] Шлянников В.Н. Плотность энергии деформации и зона процесса разрушения. Теоретические предпосылки // Проблемы прочности. 1995. С. 3–17.
- [37] Шлянников В.Н. Смешанные моды развития трещин при сложном напряженном состоянии. М.: Заводская лаборатория, 1990. С. 77–90.
- [38] Шлянников В.Н., Туманов А.В. Упругие параметры смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины при двухосном нагружении. Казань: Федеральный исследовательский центр "Казанский научный центр РАН", 2009. 34 с.
- [39] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 63–79. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79>.
- [40] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 80–96. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96>.

## References

- [1] Aliha M.R.M. On the predicting mode II fracture toughness (KIIc) of hot mix asphalt mixtures using the strain energy density criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, V. 99, pp. 36–43. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.001 [in English].
- [2] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Solids Mechanics]. М.: Nauka, 1988. 744 p. Available at: <http://bookfi.net/book/449675> [in Russian].
- [3] Berto F., Ayatollahi M.R. A review of the local strain energy density approach to V-notches. *Physical mesomechanics*, 2017, V. 20, № 2, pp. 14–27. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/v/a-review-of-the-local-strain-energy-density-approach-applied-to-v-notches> [in Russian].
- [4] Razavi M.J., Aliha M.R.M., Berto F. Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, № 33, pp. 25–33. DOI: 10.1016/j.tafmec.2017.07.004 [in English].
- [5] Mahutov N.A. *Deformatsionnye kriterii razrusheniya i raschet elementov konstruksii na prochnost'* [Deformation Criteria of Failure and Calculation of the Strength of Structural Members]. М.: Mashinostroyeniye, 1981, 272 p. Available at: <http://en.bookfi.net/book/469091> [in Russian].
- [6] Morozov N.F. *Matematicheskie voprosy teorii treshchin* [Mathematical Questions of Crack Theory]. М.: Nauka, 1984. 255 p. Available at: <http://en.bookfi.net/book/438624> [in Russian].
- [7] Morozov N.F., Petrov Yu.V. *Problemy dinamiki razrusheniya tverdyykh tel* [Problems of dynamics of fracture of solids]. St. Petersburg: SPbGU, 1997, 122 p. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/646224/38694f> [in Russian].
- [8] Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria of fracture mechanics]. М.: Fizmatlit, 2006, 328 p. URL: [https://www.studmed.ru/matvienko-yug-modeli-i-kriterii-mekhaniki-razrusheniya\\_9b25979bcbf.html](https://www.studmed.ru/matvienko-yug-modeli-i-kriterii-mekhaniki-razrusheniya_9b25979bcbf.html) [in Russian].
- [9] Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. М.: Nauka, 1974, 312 p. Available at: [https://www.studmed.ru/kachanov-lm-osnovy-mekhaniki-razrusheniya\\_b7befb002cc.html](https://www.studmed.ru/kachanov-lm-osnovy-mekhaniki-razrusheniya_b7befb002cc.html) [in Russian].
- [10] Parton V.Z. *Mekhanika razrusheniya: Ot teorii k praktike* [Fracture Mechanics: From theory to practice]. М.: Nauka, 1990. 240 p. Available at: <http://www.zodchii.ws/books/info-1206.html> [in Russian].

- [11] Sibgatullin E.S., Sibgatullin K.E. *O tenzore koeffitsientov intensivnosti napryazhenii i kriteriyakh razrusheniya v mekhanike treshchin* [About the tensor of coefficients of intensity of desctruction in mechanics of cracks]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern high technologies], 2014, № 2, pp. 56–60. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21111142> [in Russian].
- [12] Lurie A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. M.: Nauka, 1970, 940 p. URL: <https://mexalib.com/view/5347>
- [13] Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya* [Mechanics of elastoplastic fracture]. M.: Nauka, 1985, 504 p. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/438640/07ed20> [in Russian].
- [14] Hellan K. *Vvedenie v mekhaniku razrusheniya* [Introduction in Fracture Mechanics]. M.: Mir, 1988, 364 p. Available at: <https://ru.b-ok.cc/book/449646/ecd1ef> [in Russian].
- [15] Meliani H.M., Azari Z., Pluvinage G., Matvienko Yu.G. The effective T-stress estimation and crack path emanating from U-notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, Vol. 77, pp. 1682–1692. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.010 [in English].
- [16] Pisarenko G.S., Lebedev A.Ya. *Deformirovanie i prochnost' materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii* [Deformation and Strength of Materials under Complex Stress State]. Kiev: Naukova Dumka, 1976, 416 p. Available at: <https://ru.b-ok.cc/book/775569/d71d58> [in Russian].
- [17] Cherepanov G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Mechanics of Brittle Fracture]. M.: Nauka, 2012, 640 p. Available at: <https://ru.b-ok.cc/book/438682/d295ae> [in Russian].
- [18] Hertzberg R.V. *Deformatsiya i mekhanika razrusheniya konstruktsionnykh materialov* [Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials]. M.: Metallurgiya, 1989, 576 p. Available at: <https://ru.b-ok.cc/book/3674015/7fc2af> [in Russian].
- [19] Stepanova L.V. *Asimptoticheskii analiz polya napryazhenii u vershiny treshchiny (uchet vysshikh priblizhenii)* [Asymptotic analysis of the crack tip stress field (consideration of higher order terms)]. [Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki] [Siberian Journal of Numerical Mathematics], 2019, № 3, pp. 345–361. DOI: 10.15372/SJNM20190307 [in Russian].
- [20] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams Asymptotic Expansion near the Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane. *Solid State Phenomena*, 2017, V. 258, pp. 209–212. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.225
- [21] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. *Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M. Uil'yamsa u vershin dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine* [Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2015, no. 4, pp. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12 [in Russian].
- [22] Stepanova L., Roslyakov P. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference–optic methods and numerical experiments. In: *AIP Conference Proceedings*, 2016, V. 1785, 030029. DOI: 10.1063/1.4967050 [in English].
- [23] Sih G.C. Application of Strain – Energy – Density Theory to Fundamental Fracture Problem. In: *Institute of Fracture and Solid Mechanical Technical Report*. Lehigh University, AFOSR-RT-73-1, 1973, pp. 19–21 [in English].
- [24] Mirsayar M.M. Mixed mode fracture analysis using extended maximum tangential strain criterion. *Materials and Design*, 2015, V. 86, pp. 941–947. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.07.135 [in English].
- [25] Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam, Berto F. A generalized strain energy density criterion for mixed mode fracture analysis in brittle and quasi-brittle materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2015, V. 79, pp. 70–76. DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.09.004 [in English].
- [26] Legan M.A., Legan N.A. *Dinamika sploshnoi sredy. Deformirovanie i razrushenie strukturno-neodnorodnykh sred i konstruksii* [Dynamics of continuum. Deformation and fracture of the structurally inhomogeneous media and structures]. Novosibirsk: IGiL, 1990, pp. 49–60 [in Russian].
- [27] Hello G., Tahar M.B. Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, V. 49, pp. 556–566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024
- [28] Stepanova L.V. Eigenvalue of the antiplane shear crack problem for a power-law material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, V. 49, № 1, pp. 142–147. DOI: 10.1007/s10808-008-0021-7
- [29] Stepanova L.V., Fedina M.Ye. Self-similar solution of a tensile crack problem in a coupled formulation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, V. 72, № 3, pp. 360–368. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.07.015
- [30] Sih G.C. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 1974, V. 10, № 3, pp. 305–321. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00035493> [in English].
- [31] Wong A.K. On the application of the strain energy density theory in predicting crack initiation and angle of growth. *Engng Fract. Mech.*, 1997, V. 27, № 2, pp. 157–170 [in English].

- [32] Ovcharenko Yu.N. *Plotnost' energii deformatsii v lineinoi mekhanike razrusheniya primenitel'no k V – obraznym vyrezam* [Strain energy deformation in linear fracture mechanics and its application to V-notches]. *Aktual'nye voprosy mekhaniki* [Actual problems of mechanics], 2006, № 2, pp. 141–149 [in Russian].
- [33] Lavit I.M. *Ob asimptotike polei napryazhenii i deformatsii v okrestnosti konchika treshchiny* [On the asymptotics of the stress and strain fields near a crack tip]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2009, № 3, pp. 54–57. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12328106> [in Russian].
- [34] Shlyannikov V.N. *Vychislitel'naya mekhanika deformirovaniya i razrusheniya* [Computational Mechanics of Deformation and Fracture Mechanics]. Kazan: KGEU, 2001, 257 p. [in Russian].
- [35] Shlyannikov V.N., Shkanov I.N. *K raschetu koeffitsientov intensivnosti napryazhenii dlya plastiny s proizvol'no orientirovannoi treshchiny pri dvukhosnom nagruzhenii* [Stress intensity factors for plates with arbitrary oriented crack under twoaxial loading]. In: *Dinamika i prochnost' mekhanicheskikh sistem* [Dynamics and Strength of Mechanical Systems]. Perm: PPI, 1981, pp. 181–185 [in Russian].
- [36] Shlyannikov V.N. *Plotnost' energii deformatsii i zona protsessa razrusheniya. Teoreticheskie predposylki* [Strain energy density and fracture process zone. Theoretical Prerequisites]. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials], 1995, pp. 3–17 [in Russian].
- [37] Shlyannikov V.N. *Smeshannye mody razvitiya treshchin pri sloznom napryazhenom sostoyanii* [Mixed mode forms of crack propagation under complex stress state]. M.: Zavodskaya laboratoriya, 1990, pp. 77–90 [in Russian].
- [38] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. *Uprugie parametry smeshannykh form deformirovaniya poluellipticheskoi treshchiny pri dvukhosnom nagruzhenii* [Elastic Mode Mixity Parameters for Semi-Elliptical Crack under Biaxial Loading]. Kazan: Federal'nyi issledovatel'skii tsentr "Kazanskii nauchnyi tsentr RAN", 2009, 34 p. [in Russian].
- [39] Stepanova L.V. *Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Uil'yamsa polya napryazhenii na opisaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' I* [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part I]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, V. 25, no. 1, pp. 63–79. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79> [in Russian].
- [40] Stepanova L.V. *Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Uil'yamsa polya napryazhenii na opisaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' II* [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, V. 25, no. 1, pp. 80–96. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96> [in Russian].