МАТЕМАТИКА

УДК 517.5
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-21-29

Дата поступления статьи: $3/IV/2019$
Дата принятия статьи: $17/IV/2019$

К.С. Сперанский

ПОСТРОЕНИЕ ФРЕЙМА В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ОПРЕДЕЛЕННОМ НА ДВУМЕРНОМ ПОЛИДИСКЕ

© *Сперанский Константин Сергеевич* — магистрант кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 410012, Российская Федерация, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.
E-mail: konstantin.speransky@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3170-2828

АННОТАЦИЯ

В статье приведена конструкция системы представления на основе дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди, определенном на двумерном полидиске комплексной плоскости. Ответ на вопрос о существовании систем представления на основе воспроизводящих ядер существенным образом зависит от рассматриваемого пространства. Хорошо известно, что в пространстве Харди не существует базисов и фреймов Даффина — Шеффера, построенных на основе ядра Сеге. Мы используем понятие банахова фрейма, являющееся обобщением понятия фрейма Даффина — Шеффера. Построив банахов фрейм, мы можем говорить о том, что произвольная функция из пространства Харди представима в виде суммы ряда по последовательности дискретизированных ядер.

Ключевые слова: фрейм, банахов фрейм, система представления, воспроизводящее ядро, ядро Сеге, пространство Харди.

Цитирование. Сперанский К.С. Построение фрейма в пространстве Харди, определенном на двумерном полидиске // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 2. С. 21–29. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-21-29.

UDC 517.5
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-21-29

Submitted: 3/*IV*/2019
Accepted: 17/*IV*/2019

K.S. Speransky

ON A CONSTRUCTION OF A FRAME IN THE HARDY SPACE DEFINED ON THE TWO-DIMENSIONAL POLYDISC

© *Speransky Konstantin Sergeevich* — Master's Degree Student of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Street, Saratov, 410012, Russian Federation.
E-mail: konstantin.speransky@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3170-2828

ABSTRACT

In the article we present a construction of a representing system based on the discretized Szego kernel in the Hardy space defined on the two-dimensional polydisc. An answer to the question on the existence of representing systems based on reproducing kernels depends significantly on the space under consideration. It is well known that in the Hardy space there are no both bases and Duffin — Shaeffer frames, based on the discretized Szego kernel. We use a notion of a Banach frame which generalizes the concept of the Duffin — Shaeffer frame. Having constructed a Banach frame, we can say that any function from the Hardy space can be represented as a series of discretized kernels.

Key words: frame, Banach frame, representing system, reproducing kernel, Szego kernel, Hardy space.

Citation. Speransky K.S. *Postroenie freima v prostranstve Khardi, opredelennom na dvumernom polidiske* [On a construction of a frame in the Hardy space defined on the two-dimensional polydisc]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 2, pp. 21–29. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-21-29 [in Russian].

Введение

Широко известно, что важнейшие свойства банаховых пространств аналитических функций определяются поведением их воспроизводящих ядер. Структура воспроизводящего ядра оказывает влияние на распределение нулей аналитических функций, решение задач интерполяции и восстановления функций, приближения и представления функций рядами.

Напомним, что банахово пространство H, состоящее из функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$, называется функциональным [1], если для каждого $\lambda \in \Omega$ оценочный функционал $f \mapsto f(\lambda)$ корректно определен и ограничен: $|f(\lambda)| \leqslant C_\lambda \|f\|_H$. Для функционального гильбертова пространства H мы имеем $f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$ для некоторого $K_\lambda \in H$. Функция $K(\lambda, z) := K_\lambda(z) = \langle K_\lambda, K_z \rangle$, где $\lambda, z \in \Omega$, называется воспроизводящим ядром гильбертова пространства H, а само функциональное пространство H называется гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Если $\Lambda \subset \Omega$ — счетное множество точек, то мы получаем систему функций $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — последовательность значений воспроизводящего ядра. Говорят, что $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует систему представления в H, если для всех $f \in H$ существует последовательность коэффициентов $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{C}$ такая, что справедливо представление $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda K_\lambda$.

В настоящее время наиболее полно исследованы представляющие свойства воспроизводящих ядер пространств Харди и Бергмана, что отражено в монографиях [2; 3]. С одной стороны, в пространстве Бергмана, так и в пространстве Харди не существует последовательности точек, для которых система воспроизводящих ядер $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует базис пространства H. Можно показать, что это связано с несовместностью условий интерполяционной и сэмплинг последовательностей. С другой стороны, в пространстве Бергмана существуют фреймы Даффина — Шеффера указанного вида, в то время как в пространстве Харди их не существует [3].

Вопрос о существовании систем представления на основе дискретизированных воспроизводящих ядер $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ в пространстве Харди на единичном диске комплексной плоскости был сформулирован в качестве открытой проблемы в статье [4].

Вопрос 1. Существует ли последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на открытом единичном диске такая, что последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует систему представления пространства $H^2(\mathbb{D})$?

В настоящей статье дается ответ на аналог вопроса 1 для двумерного случая, т. е. в пространстве $H^2(\mathbb{D}^2)$. Результат основан на применении теории банаховых фреймов и сохраняется при переходе к полидиску произвольной размерности. Отметим, что соответствующий результат для одномерного случая был опубликован в статье [5].

Статья структурирована следующим образом. В параграфе 2 сформулирована основная теорема 1 и следствие из нее. В параграфе 3 приводятся некоторые предварительные сведения о пространстве Харди и банаховых фреймах. В параграфах 4 и 5 содержатся леммы для получения верхнего и нижнего фреймовых неравенств соответственно. Параграф 6 посвящен доказательству основного результата.

1. Основной результат

Будем рассматривать пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$, определенное на двумерном полидиске $\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Пусть

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1 \tag{1.1}$$

и $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{D}^2$ вида

$$\lambda_n = \lambda_{kj_1j_2} = (r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, r_k e^{\frac{2\pi i j_2}{n_k}}), \qquad j_1, j_2 = 0, 1, \ldots n_k - 1. \tag{1.2}$$

Далее, под условием согласования для n_k и r_k будем понимать выполнение неравенств

$$0 < a \leqslant n_k(1 - r_k) \leqslant b < \infty \tag{1.3}$$

с некоторыми постоянными $0 < a \leqslant b < \infty$. В общем случае для произвольного множества $M \subset \mathbb{N} \times (0, 1)$ пар (n, r) условие согласования аналогично (1.3), т. е. имеет вид $0 < a \leqslant n(1 - r) \leqslant b < \infty$ и будет обозначаться по-прежнему (1.3).

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{D}^2$ — последовательность точек вида (1.2), удовлетворяющая условиям согласования (1.3). Тогда последовательность нормализованных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, дискретизированных в этих точках, образует фрейм пространства Харди H^2 относительно пространства коэффициентов X, состоящего из всех последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\xi_{kj_1j_2}\}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=0}^{n_k-1} \sum_{j_2=0}^{n_k-1} |\xi_{kj_1j_2}|^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.4}$$

Следствие 1. Для каждой функции $f \in H^2$ существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_n.$$

2. Предварительные сведения

2.1. Пространство Харди и ядро Сеге

Мы будем рассматривать пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$, определенное на двумерном полидиске комплексной плоскости $\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$.

Определение 1. Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$ состоит из всех аналитических функций $f(z_1, z_2) = \sum_{k_1,k_2\geqslant 0} c_{k_1k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ в полидиске $\mathbb{D}^2$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{k_1,k_2\geqslant 0} |c_{k_1k_2}|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространство Харди H^2 является пространством с воспроизводящим ядром.

Определение 2. Воспроизводящее ядро K_λ пространства H^2 называется ядром Сеге [6] и имеет вид

$$K_\lambda(z) = K(z, \lambda) = \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_1} z_1)(1 - \overline{\lambda_2} z_2)}, \tag{2.1}$$

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$.

Нормированное ядро Сеге имеет вид

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{K(\lambda, z)}{\|K(\lambda, z)\|_{H^2}} = \frac{(1 - |z_1|^2)^{1/2}(1 - |z_2|^2)^{1/2}}{\left(1 - \overline{\lambda_1} z_1\right)\left(1 - \overline{\lambda_2} z_2\right)}.$$

2.2. Фреймы Даффина — Шеффера

В процессе доказательства теоремы 1 мы будем активно использовать теорию фреймов. Понятие фрейма было введено в 1952 г. Даффином и Шеффером [7]. Подобно базису, фрейм позволяет представить произвольный элемент гильбертова пространства в виде ряда по его элементам, т. е. фрейм является системой представления. Однако в общем случае фрейм не является минимальной системой, поэтому коэффициенты разложения могут быть не единственны.

Определение 3. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ ненулевых элементов гильбертова пространства H называется фреймом Даффина — Шеффера, если существуют постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $f \in H$

$$A\|f\|_H^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|_H^2. \tag{2.2}$$

Доказательство следующего известного предложения можно найти в [3].

Предложение 1. В пространстве Харди H^2 не существует фрейма Даффина — Шеффера на основе дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3. Банаховы фреймы

Для построения системы представления в пространстве H^2 нам потребуется более общее определение фрейма. Одно из определений банахова фрейма, основанное на исследованиях Бари по биортогональным системам и базисам гильбертова пространства, было предложено Терехиным в работе [8]. Это определение мы и рассмотрим далее.

Пусть дано сепарабельное банахово пространство F с сопряженным $G = F^*$ и $\langle f, g\rangle$ — значение непрерывного линейного функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$.

Определение 4. Банахово пространство X, элементами которого являются числовые последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется модельным, если система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\varepsilon_n = \{\delta_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$, где δ_{mn} символ Кронекера) образует базис в X.

Произвольный непрерывный линейный функционал l на модельном пространстве однозначно определяется последовательностью своих значений $\{l(\varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ на элементах базиса. Поэтому сопряженное пространство X^* изометрически изоморфно некоторому банахову пространству Y, элементами которого являются числовые последовательности $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, и любой непрерывный линейный функционал на модельном пространстве X можно представить в следующем виде:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \tag{2.3}$$

Определение 5. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ называется фреймом в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X с сопряженным пространством $Y = X^*$, если существуют постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leqslant \|\{\langle \varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leqslant B\|g\|_G. \tag{2.4}$$

Оператор $R : G \to Y$ называется оператором анализа

$$Rg = \{\langle \varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

Оператор $S : X \to F$ называется оператором синтеза

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Заметим, что оператор анализа является сопряженным к оператору синтеза $R = S^*$, но не наоборот. Определение фрейма (2.4) совпадает с определением Даффина — Шеффера в случае, когда $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = l_2$.

Важным отличием банахова фрейма (2.4) от атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу является то, что автоматически обеспечивается справедливость следующего предложения о представлении, доказанного в работе [9].

Предложение 2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Тогда для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$.

Модельное пространство определяется неоднозначно и влияет на тип сходимости ряда. Например, если естественный базис модельного пространства X является безусловным, то представляющий ряд сходится к f безусловно.

2.4. Эквивалентность неравенства Бесселя

В дальнейшем будет часто использоваться следующий результат, непосредственно вытекающий из равенства $R = S^*$ для введенных выше операторов анализа и синтеза.

Предложение 3. Для системы элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ банахова пространства F следующие условия эквивалентны:

существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X$

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n \right\|_F \leqslant B\|x\|_X; \tag{2.5}$$

существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $g \in G$

$$\|\{\langle \varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^\infty\|_Y \leqslant B\|g\|_G. \tag{2.6}$$

3. Верхнее фреймовое неравенство

Лемма 1. Рассмотрим корни n-степени из единицы

$$\omega_n^j = e^{\frac{2\pi ij}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots n-1. \tag{3.1}$$

Пусть нормированные ядра Сеге $\widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}}$ дискретизированы в точках $(r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2})$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 < r < 1$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}} \right\|_{H^2} \leqslant \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \left(\sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} |\xi_{j_1 j_2}|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Доказательство. По определению ядра Сеге

$$\sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \frac{\xi_{j_1 j_2}(1-r^2)}{\left(1 - re^{-\frac{2\pi i j_1}{n}} z_1\right)\left(1 - re^{-\frac{2\pi i j_2}{n}} z_2\right)} =$$

$$= (1-r^2) \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} \left(\sum_{k_1=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty r^{k_1} r^{k_2} e^{-\frac{2\pi i j_1 k_1}{n}} e^{-\frac{2\pi i j_2 k_2}{n}} \right) =$$

$$= (1-r^2) \sum_{k_1=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty r^{k_1} r^{k_2} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} e^{-\frac{2\pi i j_1 k_1}{n}} e^{-\frac{2\pi i j_2 k_2}{n}} z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$$

Здесь абсолютная сходимость двойного ряда по индексам k_1, k_2 обеспечивает возможность замены порядка суммирования.

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f \in H^2$

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \geqslant 0} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$$

Делая замену переменных $k_\nu \mapsto l_\nu n + k_\nu$, $\nu = 1, 2$, а также учитывая периодичность экспонент и используя дискретное преобразование Фурье

$$\widehat{\xi}_{k_1 k_2} = \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} e^{-\frac{2\pi i j_1 k_1}{n}} e^{-\frac{2\pi i j_2 k_2}{n}},$$

получаем

$$\left\| \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}} \right\|_{H^2}^2 =$$

$$= (1-r^2)^2 \sum_{l_1=0}^\infty \sum_{l_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} r^{2(l_1 n + k_1)} r^{2(l_2 n + k_2)} \times$$

$$\times \left| \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} e^{-\frac{2\pi i j_1 (l_1 n + k_1)}{n}} e^{-\frac{2\pi i j_2 (l_2 n + k_2)}{n}} \right|^2 =$$

$$= (1-r^2)^2 \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} r^{2l_1 n} r^{2l_2 n} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} r^{2k_1} r^{2k_2} \cdot \left|\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} e^{-\frac{2\pi i j_1 k_1}{n}} e^{-\frac{2\pi i j_2 k_2}{n}}\right|^2 =$$

$$= (1-r^2)^2 \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} r^{2k_1} r^{2k_2} \left|\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} e^{-\frac{2\pi i j_1 k_1}{n}} e^{-\frac{2\pi i j_2 k_2}{n}}\right|^2 \cdot \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} r^{2l_1 n} r^{2l_2 n} =$$

$$= n^2 (1-r^2)^2 \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} r^{2k_1} r^{2k_2} \left|\widehat{\xi}_{k_1 k_2}\right|^2 \frac{1}{(1-r^{2n})^2}.$$

Очевидно, что $r^{2k_\nu} < 1$, $\nu = 1, 2$, поэтому на основании унитарности преобразования Фурье

$$\left\|\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}}\right\|_{H^2} \leqslant \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \cdot \left(\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} |\xi_{k_1 k_2}|^2\right)^{1/2}.$$

Следствие 2. В обозначениях леммы 1 и при выполнении условий согласования (1.3) неравенство (3.2) справедливо с постоянной $B > 0$, не зависящей от (n, r):

$$\left\|\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1} \xi_{j_1 j_2} \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}}\right\|_{H^2} \leqslant B \left(\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} |\xi_{k_1 k_2}|^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Используя условие согласования и второй замечательный предел, находим

$$r^{2n} \leqslant (1 - a/n)^{2n} \nearrow e^{-2a} < 1, \tag{3.3}$$

откуда

$$\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} < \frac{2n(1-r)}{1-r^{2n}} \leqslant \frac{2b}{1-e^{-2a}} = B.$$

Следствие 3. В обозначениях леммы 1 и при выполнении условий согласования (1.3) для всех $g \in H^2$ справедливо неравенство

$$\left\|\{\langle \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}}, g\rangle\}_{j_1, j_2=0}^{n-1}\right\|_{\ell^2} \leqslant B\|g\|_{H^2}, \qquad B = \frac{2b}{1-e^{-2a}}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Используя предложение 3 при $F = G = H^2$ и $X = Y = \ell^2$, из предыдущего следствия 2 получаем (3.4).

4. Нижнее фреймовое неравенство

Определение 6. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ определены корни из единицы (3.1) и пусть у функции $f(z_1, z_2)$ корректно определены значения на торе $\mathbb{T}^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = |z_2| = 1\}$. В качестве семейства полунорм обозначим

$$\|f\|_n = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1} |f(\omega_n^{j_1}, \omega_n^{j_2})|^2\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Лемма 2. Для каждого полинома вида

$$P(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \qquad c_{k_1 k_2} \in \mathbb{C},$$

справедливо равенство

$$\|P\|_n = \|P\|_{H^2}.$$

Доказательство. Применяя обратное дискретное преобразование Фурье

$$\check{c}_{j_1 j_2} = \frac{1}{n} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} c_{k_1 k_2} e^{\frac{2\pi i j_1 k_1}{n}} e^{\frac{2\pi i j_2 k_2}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} c_{k_1 k_2} \omega_n^{j_1 k_1} \omega_n^{j_2 k_2} = \frac{P(\omega_n^{j_1}, \omega_n^{j_2})}{n}, \qquad j_1, j_2 = 0, 1, \ldots n-1$$

и используя его унитарность, получаем

$$\|P\|_n = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1}|n\check{c}_{j_1j_2}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1}|c_{j_1j_2}|^2\right)^{1/2} = \|P\|_{H^2}.$$

Определение 7. Для всех $0 < r < 1$ и $f \in H^2$ определим оператор растяжения σ_r следующим образом:

$$\sigma_r f(z_1, z_2) = f(rz_1, rz_2).$$

Лемма 3. Для всех $f \in H^2$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется следующее неравенство:

$$\|\sigma_r f\|_n \leqslant \frac{\|f\|_{H^2}}{1 - r^{2n}}.$$

Доказательство. Используя неравенство (3.2) и предложение 3, получаем

$$\|\sigma_r f\|_n = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1}\left|f(r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2})\right|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{n-1}\left|\frac{\langle f, \widehat{K}_{r\omega_n^{j_1}, r\omega_n^{j_2}}\rangle}{(1-r^2)}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n(1-r^2)}\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}}\|f\|_{H^2} = \frac{\|f\|_{H^2}}{1-r^{2n}}.$$

Следствие 4. При выполнении условий согласования (1.3) семейство операторов растяжения σ_r, $0 < r < 1$ является равномерно ограниченным относительно последовательности полунорм $\|\cdot\|_n$, т. е. справедливо неравенство

$$\|\sigma_r f\|_n \leqslant C\|f\|_{H^2}, \qquad C = \frac{1}{1 - e^{-2a}}.$$

Доказательство. Достаточно учесть оценку $r^{2n} \leqslant e^{-2a}$ из соотношения (3.3).

Лемма 4. Пусть M — множество всех пар (n, r), $n \in \mathbb{N}$, $r \in (0, 1)$, для которых выполняются условия согласования (1.3). Тогда для всех $f \in H^2$ справедлива оценка

$$\|f\|_{H^2} \leqslant \sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r f\|_n. \tag{4.2}$$

Доказательство. Сначала проверим неравенство для полиномов вида

$$P(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} c_{k_1k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \qquad c_{k_1k_2} \in \mathbb{C}.$$

Используя лемму 2, имеем

$$\sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r P\|_n \geqslant \sup_{(n,r)\in M, n>N}\|\sigma_r P\|_n = \sup_{(n,r)\in M, n>N}\|\sigma_r P\|_{H^2} =$$

$$= \sup_{0<r<1}\|\sigma_r P\|_{H^2} = \|P\|_{H^2}. \tag{4.3}$$

В последнем равенстве мы использовали то, что $\sigma_r f$ стремится к f при $r \to 1$ для всех $f \in H^2$ и $\|\sigma_r f\|_{H^2}$ монотонно возрастает с ростом r.

Теперь проверим неравенство (4.2) для произвольной функции $f \in H^2$, для которой выберем полином P таким образом, что $\|f - P\|_{H^2} < \varepsilon$. Используя неравенство треугольника, имеем

$$\sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r f\|_n \geqslant \sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r P\|_n - \sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r(f-P)\|_n.$$

Используя уже полученную оценку для полиномов (4.3) и следствие 4 о равномерной ограниченности оператора растяжения σ_r, получаем

$$\sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r P\|_n - \sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r(f-P)\|_n \geqslant \|P\|_{H^2} - \frac{\|f-P\|_{H^2}}{1-e^{-2a}} \geqslant$$

$$\geqslant \|f\|_{H^2} - \|f-P\|_{H^2} - \frac{\|f-P\|_{H^2}}{1-e^{-2a}} \geqslant \|f\|_{H^2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-e^{-2a}}.$$

Ввиду произвольного $\varepsilon > 0$ окончательно находим

$$\sup_{(n,r)\in M}\|\sigma_r P\|_n \geqslant \|f\|_{H^2}.$$

Замечание 1. Лемма 4 остается в силе при замене множества M всех согласованных пар (n,r) на его подмножество $M' \subset M$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{(n,r)\in M'} r = 1.$$

Последнее условие означает, что вторая компонента пары $(n,r) \in M'$ принимает значения сколь угодно близкие к 1. В самом деле такое условие на M' обеспечивает справедливость аналога оценки (4.3) при замене M на M' (надо лишь учесть монотонность роста $\|\sigma_r f\|_{H^2}$ с ростом r).

5. Доказательство основного результата

Чтобы показать существование фрейма, описанного в условии теоремы 1, достаточно доказать справедливость фреймовых неравенств для всех $g \in H^2$. В качестве пространства коэффициентов X выберем пространство последовательностей, для которых выполняется (1.4). Очевидно, что дуальное пространство $Y = X^*$ будет снабжено нормой

$$\sup_{k=1,2,\dots} \left(\sum_{j_1=0}^{n_k-1} \sum_{j_2=0}^{n_k-1} |\xi_{kj_1j_2}|^2 \right)^{1/2},$$

и поэтому фреймовые неравенства могут быть записаны в следующем виде

$$A\|g\|_{H^2} \leqslant \sup_{k=1,2,\dots} \left\| \left\{ \langle \widehat{K}_{\lambda_{kj_1j_2}}, g \rangle \right\}_{j_1,j_2=0}^{n_k-1} \right\|_{\ell_2} \leqslant B\|g\|_{H^2}, \quad 0 < A \leqslant B < \infty. \tag{5.1}$$

Выберем последовательность пар вида (1.1), которые удовлетворяют условиям согласования (1.3). Далее дискретизируем ядра Сеге в точках

$$\lambda_n = \lambda_{kj_1j_2} = \left(r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, r_k e^{\frac{2\pi i j_2}{n_k}} \right) = \left(r_k \omega_{n_k}^{j_1}, r_k \omega_{n_k}^{j_2} \right).$$

При таком выборе точек дискретизации верхнее неравенство в формуле (5.1) следует из неравенства (3.4) и следствия 3.

Для доказательства нижнего неравенства из (5.1) воспользуемся определением семейства полунорм (4.1) и оценкой (4.2)

$$\sup_{k=1,2,\dots} \left(\sum_{j_1=0}^{n_k-1} \sum_{j_2=0}^{n_k-1} |\langle f, \widehat{K}_{r_k\omega_{n_k}^{j_1}, r\omega_{n_k}^{j_2}} \rangle|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{k=1,2,\dots} (1-r_k^2) \left(\sum_{j_1=0}^{n_k-1} \sum_{j_2=0}^{n_k-1} |\langle f, K_{r\omega_{n_k}^{j_1}, r\omega_{n_k}^{j_2}}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{k=1,2,\dots} n_k(1-r_k^2) \left(\frac{1}{n_k^2} \sum_{j_1=0}^{n_k-1} \sum_{j_2=0}^{n_k-1} |f(r\omega_{n_k}^{j_1}, r\omega_{n_k}^{j_2})|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{k=1,2,\dots} n_k(1-r_k)(1+r_k)\|\sigma_{r_k} f\|_{n_k} \geqslant a\|f\|_{H^2}.$$

По изложенному заключаем

$$A\|g\|_{H^2} \leqslant \sup_{k=1,2,\dots} \left\| \left\{ \langle \widehat{K}_{r_k\omega_{n_k}^{j_1}, r\omega_{n_k}^{j_2}}, g \rangle \right\}_{j_1,j_2=0}^{n_k-1} \right\|_{\ell_2} \leqslant B\|g\|_{H^2}, \quad A = a,\ B = \frac{2b}{1-e^{-2a}}.$$

Основной результат доказан. Следствие 1 непосредственно вытекает из предложения 2.

Литература

[1] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 351 с. URL: http://bookre.org/reader?file=443586.

[2] Duren P.L. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970. 258 p. URL: http://bookre.org/reader?file=1465899.

[3] Duren P.L., Schuster A.P. Bergman spaces. Providence: AMS, 2004. 318 p. URL: http://bookre.org/reader?file=2233148.

[4] Fricain E., Khoi L., Lefèvre P. Representing systems generated by reproducing kernels // Indag. Math. 2018. V. 29(3). P. 860–872.

[5] Speransky K.S., Terekhin P.A. A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indag. Math. 2018. V. 29(5). P. 1318–1325. DOI: 10.1016/j.indag.2018.06.001.

[6] Agler J., McCarthy J.E. Pick interpolation and Hilbert function spaces. Providence: AMS, 2002. 308 p. URL: https://ru.b-ok.cc/book/2291887/42a853.

[7] Duffin R., Schaeffer A. A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72(2), P. 341–366. URL: https://www.ams.org/journals/tran/1952-072-02/S0002-9947-1952-0047179-6/S0002-9947-1952-0047179-6.pdf.

[8] Терехин П.А. Фреймы в банаховом пространстве и их приложения к построению всплесков // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: сб. науч. тр. Вып. 2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 65–81. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23891428.

[9] Терехин П.А. Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза // Матем. сб. 2009. Т. 200. Вып. 9. С. 127–146. DOI: https://doi.org/10.4213/sm5655.

[10] Rudin W. Functional Analysis. 2nd edition. New York: McGraw-Hill. 1991. 448 p. URL: https://59clc.files.wordpress.com/2012/08/functional-analysis-_-rudin-2th.pdf.

References

[1] Halmos P.R. *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book]. M.: Mir, 1970, 351 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=443586 [in Russian].

[2] Duren P.L. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970, 258 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=1465899 [in English].

[3] Duren P.L., Schuster A.P. Bergman spaces. Providence: AMS, 2004, 318 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=2233148

[4] Fricain E., Khoi L., Lefèvre P. Representing systems generated by reproducing kernels. *Indag. Math.*, 2018, Vol. 29(3), pp. 860–872 [in English].

[5] Speransky K.S., Terekhin P.A. A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space. *Indag. Math.*, 2018, Vol. 29(5), pp. 1318–1325. DOI: 10.1016/j.indag.2018.06.001 [in English].

[6] Agler J., McCarthy J.E. Pick interpolation and Hilbert function spaces. Providence: AMS, 2002, 308 p. Available at: https://ru.b-ok.cc/book/2291887/42a853

[7] Duffin R., Schaeffer A. A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1952, V. 72(2), pp. 341–366. Available at: https://www.ams.org/journals/tran/1952-072-02/S0002-9947-1952-0047179-6/S0002-9947-1952-0047179-6.pdf [in English].

[8] Terekhin P.A. *Freimy v banakhovom prostranstve i ikh prilozheniya k postroeniyu vspleskov* [Frames in a Banach space and their applications to constructing wavelets]. In: *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam. Sb. nauch. trudov, vyp. 2* [Research on algebra, number theory, functional analysis and adjacent questions. Collection of scientific papers, Issue 2]. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2003, pp. 65–81. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=23891428 (in Russian)

[9] Terekhin P.A. *Banakhovy freimy v zadache affinnogo sinteza* [Banach frames in the problem of affine synthesis]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2009, 200:9, 1383–1402. DOI: https://doi.org/10.4213/sm5655 [in Russian].

[10] Rudin W. Functional Analysis. 2nd edition. New York: McGraw-Hill, 1991, 448 p. Avaialble at: https://59clc.files.wordpress.com/2012/08/functional-analysis-_-rudin-2th.pdf