МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.27
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-7-20

Дата поступления статьи: 6/*III*/2019
Дата принятия статьи: 15/*III*/2019

С.В. Асташкин

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКТОРОВ[1]

© *Асташкин Сергей Владимирович* — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
E-mail: astash56@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8239-5661

АННОТАЦИЯ

Как хорошо известно, конструкция Густавссона — Петре, использующая понятие безусловной сходимости в банаховых пространствах, позволяет получить важный класс интерполяционных функторов. В данной статье определена новая близкая конструкция, основанная на применении так называемой случайной безусловной сходимости. Найдены необходимые и достаточные условия на порождающую функцию, при которых она определяет интерполяционный функтор на категории банаховых пар. Показано, что вычисление последнего на паре пространств Орлича приводит к "естественной" интерполяционной теореме. Кроме того, получены условия, гарантирующие совпадение этого функтора с соответствующим функтором Густавссона — Петре, а также с методом Кальдерона — Лозановского.

Ключевые слова: интерполяционное пространство, интерполяционный функтор, функтор Густавссона — Петре, метод Кальдерона — Лозановского, функции Радемахера, банахова решетка, неравенство Хинчина, пространство Орлича.

Цитирование. Асташкин С.В. Об одном классе интерполяционных функторов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 2. С. 7–20. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-7-20.

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.470.2016/1.4), а также поддержана грантом РФФИ (18-01-00414-а).

UDC 517.982.27
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-7-20

Submitted: 6/*III*/2019
Accepted: 15/*III*/2019

S.V. Astashkin

ON SOME CLASS OF INTERPOLATION FUNCTORS[2]

© *Astashkin Sergey Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
E-mail: astash56@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8239-5661

ABSTRACT
As it is well known, the Gustavsson — Peetre construction, using the concept of unconditional convergence in Banach spaces, provides an important class of interpolation functors. In this paper, we define a new close construction, based on the use of the so-called random unconditional convergence. We find necessary and sufficient conditions, which being imposed on a generating function give us an interpolation functor defined on the category of Banach couples. It is shown that calculating the latter functor for a couple of Orlicz spaces results in the "natural" interpolation theorem. Moreover, we obtain conditions that guarantee the coincidence of this functor with the corresponding Gustavsson — Peetre functor, as well as with the Calderón — Lozanovskii method.

Key words: interpolation space, interpolation functor, Gustavsson — Peetre functor, Calderón — Lozanovskii method, Rademacher functions, Banach lattice, Khintchine inequality, Orlicz space.

Citation. Astashkin S.V. *Ob odnom klasse interpolyatsionnykh funktorov* [On some class of interpolation functors]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 2, pp. 7–20. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-7-20 [in Russian].

Введение

Пусть ρ — квазивогнутая функция на $[0,\infty)$, $\vec{A}=(A_0,A_1)$ — произвольная банахова пара. Множество $\langle\vec{A},\rho\rangle=\langle A_0,A_1,\rho\rangle$ состоит из всех $a\in A_0+A_1$, для которых существует последовательность $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $u_n\in A_0\cap A_1$, такая, что

$$a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n \ \text{(сходимость в } A_0+A_1), \tag{1}$$

а также для некоторого $C>0$, произвольных конечного множества $F\subset\mathbb{Z}$ и последовательности вещественных чисел $(\alpha_n)_{n\in F}$, $|\alpha_n|\leqslant 1$, справедливы неравенства

$$\Big\|\sum_{n\in F}\frac{\alpha_n u_n}{\rho(2^n)}\Big\|_{A_0}\leqslant C$$

и

$$\Big\|\sum_{n\in F}\frac{\alpha_n 2^n u_n}{\rho(2^n)}\Big\|_{A_1}\leqslant C.$$

$\langle\vec{A},\rho\rangle$ — линейное пространство, на котором функционал

$$\|a\|_{\langle\vec{A},\rho\rangle}:=\inf C,$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым C, является полунормой.

Описанная конструкция была введена и изучена в работе Ж. Густавссона и Ж. Петре [1]. В частности, там доказана "естественная" интерполяционная теорема для пространств Орлича: если $\rho\in B^{+-}$, а функции Орлича M_0 и M_1 удовлетворяют Δ_2-условию в бесконечности, то

$$\langle L_{M_0},L_{M_1},\rho\rangle=L_M,$$

[2]The work was prepared in view of accomplishment of state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project № 1.470.2016/1.4) and was also supported by the grant of the Russian Foundation for Basic Research (18-01-00414-a).

где $M^{-1} = M_0^{-1}\rho(M_1^{-1}/M_0^{-1})$ (N^{-1} — функция, обратная к N; все остальные определения см. в следующем параграфе).

Нетрудно показать, что замена чисел α_n, $n \in F$, таких, что $|\alpha_n| \leqslant 1$, на "знаки", т. е. $\theta_n = \pm 1$, $n \in F$, в определении выше приведет к тому же самому пространству $\langle \vec{A}, \rho \rangle$ с эквивалентной нормой [2, lemma 2.4.6]. Более "радикальным" оказывается изменение максимума по "знакам", которое фактически присутствует в этом определении, на усреднение по ним. Эта операция приводит к следующей конструкции, изучение которой и составляет содержание данной статьи.

Определим множество $R_\rho(\vec{A})$, состоящее из всех $a \in A_0 + A_1$, для которых существует последовательность $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $u_n \in A_0 \cap A_1$, такая, что имеет место (1), а также для некоторого $D > 0$ и любого конечного $F \subset \mathbb{Z}$ справедливы неравенства

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{k \in F} \frac{u_k}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{A_0} dt \leqslant D \tag{2}$$

и

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{k \in F} \frac{2^k u_k}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{A_1} dt \leqslant D. \tag{3}$$

Как и в случае конструкции Густавссона — Петре, функционал

$$\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} := \inf D,$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым D, является полунормой на линейном пространстве $R_\rho(\vec{A})$.

В этой статье найдены необходимые и достаточные условия на функцию ρ, при которых отображение $\vec{A} \mapsto R_\rho(\vec{A})$ является интерполяционным функтором. Кроме того, будет доказано, что для любой пары максимальных банаховых решеток $\vec{X} = (X_0, X_1)$ условие $\rho \in B^{+-}$ гарантирует выполнение равенства:

$$R_\rho(\vec{X}) = \langle \vec{X}, \rho \rangle = \rho(\vec{X}),$$

где $\rho(\vec{X})$ — пространство Кальдерона — Лозановского. Отсюда, в частности, следует, что сформулированная ранее интерполяционная теорема для пространств Орлича верна также для функтора $R_\rho(\cdot)$.

Автор благодарен К.Е. Тихомирову за участие в начальном этапе работы над вопросами, рассматриваемыми в этой статье.

1. Предварительные сведения

1.1. Банаховы решетки измеримых функций и квазивогнутые функции

Подробнее о банаховых решетках измеримых функций см. книги [3–5].

Говорят, что банахово пространство X функций, измеримых на пространстве (S, Σ, μ) с σ-конечной мерой μ, является *банаховой решеткой*, если из того, что функция $x(s)$ измерима, $y \in X$ и $|x(s)| \leqslant |y(s)|$ для п.в. $s \in S$, вытекает: $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$.

Банахова решетка X называется *максимальной* (или *имеет свойство Фату*), если условия: $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\sup_{n=1,2,\ldots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \to x$ п.в. на S гарантируют, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$.

Важным примером банаховых решеток являются пространства Орлича [6; 7]. Предположим, что M — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Тогда *пространство Орлича* L_M состоит из всех измеримых на пространстве (S, Σ, μ) функций $x(s)$ таких, что для некоторого $\lambda > 0$

$$I_\lambda(x) := \int_S M\left(\frac{|x(s)|)}{\lambda}\right) d\mu(s) < \infty$$

с нормой

$$\|x\|_{L_M} = \inf\{\lambda > 0 : I_\lambda(x) \leqslant 1\}.$$

Пространство L_M является естественным обобщением L_p-пространств, а именно $L_p = L_{M_p}$, где $M_p(u) = u^p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Функция $\rho(t)$, определенная на $[0, \infty)$, называется квазивогнутой, если $\rho(0) = 0$, $\rho(t)$ не убывает и $\rho(t)/t$ не возрастает. В частности, всякая неотрицательная вогнутая на $[0, \infty)$ функция, равная в нуле нулю, квазивогнута. Функцию

$$\mathcal{M}_\rho(s) := \sup_{t>0} \frac{\rho(st)}{\rho(t)}, \quad s > 0,$$

называют *функцией растяжения* функции ρ. Так как $\mathcal{M}_\rho(s)$ полумультипликативна, т. е. $\mathcal{M}_\rho(s_1 s_2) \leqslant \mathcal{M}_\rho(s_1)\mathcal{M}_\rho(s_2)$, $s_1, s_2 > 0$, то существуют числа

$$\gamma_\rho = \sup_{0<s<1} \frac{\ln \mathcal{M}_\rho(s)}{\ln s} \text{ и } \delta_\rho = \inf_{s>1} \frac{\ln \mathcal{M}_\rho(s)}{\ln s},$$

которые удовлетворяют неравенству: $0 \leqslant \gamma_\rho \leqslant \delta_\rho \leqslant 1$.

Через B^+ (соотв. B^-) обозначим множество всех квазивогнутых функций $\rho(t)$ таких, что $\gamma_\rho > 0$ (соотв. $\delta_\rho < 1$). Как легко проверить, $\rho \in B^+$ (соотв. $\rho \in B^-$) тогда и только тогда, когда $\lim_{s\to 0} \mathcal{M}_\rho(s) = 0$ (соотв. $\lim_{s\to\infty} \mathcal{M}_\rho(s)/s = 0$). Пусть также $B^{+-} := B^+ \cap B^-$.

Напомним, что функции Радемахера определяются следующим образом:

$$r_k(t) = \operatorname{sign} \sin(2^k \pi t) \ \ (0 \leqslant t \leqslant 1), \ \ k = 1, 2, \ldots$$

Наконец, выражение вида $f \asymp g$ далее означает, что $C^{-1} f \leqslant g \leqslant Cf$ для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от всех или части аргументов функций (квазинорм) f и g.

1.2. Интерполяционные пространства и функторы

В дальнейшем будут использоваться понятия и результаты теории интерполяции операторов (подробнее см. монографии [4; 8–10].

Пусть $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара (т. е. A_0 и A_1 — банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в некоторое хаусдорфово топологическое векторное пространство). Тогда $A_0 \cap A_1$ и $A_0 + A_1$ — пересечение и алгебраическая сумма A_0 и A_1 с нормами

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} := \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}$$

и

$$\|a\|_{A_0+A_1} := \inf\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1, a_i \in A_i, i = 0, 1\}$$

соответственно. Банахово пространство A называется *промежуточным* между A_0 и A_1, если $A_0 \cap A_1 \subset A \subset A_0 + A_1$ (в дальнейшем запись $A \subset B$, где A и B — линейные нормированные пространства, означает, что для некоторого $C > 0$ и всех $x \in A$ имеет место неравенство $\|a\|_B \leqslant C\|a\|_A$). Говорят, что линейный оператор T *действует из пары* $\vec{A}$ *в пару* $\vec{B}$ ($T : \vec{A} \to \vec{B}$), если $T : A_0 + A_1 \to B_0 + B_1$ и T ограничен из A_i в B_i для $i = 0, 1$.

Предположим, что A и B — промежуточные пространства относительно пар $\vec{A}$ и $\vec{B}$ соответственно. Пространства A и B называются *интерполяционными* относительно банаховых пар $\vec{A}$ и $\vec{B}$, если всякий линейный оператор T такой, что $T : \vec{A} \to \vec{B}$, ограничен из A в B. В этом случае существует $C > 0$, не зависящее от T, такое, что

$$\|T\|_{A\to B} \leqslant C \max_{i=0,1} \|T\|_{A_i \to B_i}.$$

Если последнее неравенство выполнено с $C = 1$, то A и B называются *точными интерполяционными* пространствами.

Пусть F — функтор, действующий из категории банаховых пар в категорию банаховых пространств. Его называют *интерполяционным*, если для любых банаховых пар $\vec{A}$ и $\vec{B}$ пространства $F(\vec{A})$ и $F(\vec{B})$ интерполяционны относительно этих пар. В том случае, когда это точные интерполяционные пространства, говорят, что функтор F *точный*.

Характеристическая функция $\phi(s,t)$ интерполяционного функтора F определяется соотношением:

$$I(s\mathbb{R}, t\mathbb{R}) = \phi(s,t)\mathbb{R}, \ \ s, t > 0,$$

где $s\mathbb{R}$ — это прямая $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{s\mathbb{R}} = s|x|$, $x \in \mathbb{R}$. Если функтор F точный, то функция $\phi(s,t)$ не убывает по каждому аргументу, а также положительно однородна первой степени, т. е. $\phi(\alpha s, \alpha t) = \alpha\phi(s,t)$, $\alpha > 0$. Отсюда, в частности, следует, что функция $\phi(1,t)$ квазивогнута на $[0,\infty)$.

Примерами конструкций, результатами которых являются семейства интерполяционных функторов, являются как конструкция Густавссона — Петре, определенная в § 1, так и метод Кальдерона — Лозановского.

Пусть (E_0, E_1) — пара банаховых решеток на пространстве (S, Σ, μ) с σ-конечной мерой μ, а $\phi(s,t)$ — функция, которая определена при $s, t > 0$ и не убывает по каждому аргументу, а также положительно однородна первой степени. Тогда пространство *Кальдерона — Лозановского* $\phi(E_0, E_1)$ состоит из всех измеримых функций $x(s)$ таких, что

$$|x(s)| = \phi(|x_0(s)|, |x_1(s)|).$$

где $x_i \in X_i$, $i = 0, 1$. При этом норма на $\phi(E_0, E_1)$ определяется следующим образом:

$$\|x\|_{\phi(E_0,E_1)} := \inf_{x_0,x_1}\{\max(\|x_0\|_{E_0}, \|x_1\|_{E_1})\},$$

где точная нижняя грань берется по всем x_0, x_1, для которых $|x(s)| = \phi(|x_0(s)|, |x_1(s)|)$. Известно, что $\phi(E_0, E_1)$ — банахова решетка, при определенных условиях имеющая интерполяционные свойства относительно пары (E_0, E_1) [11, § 8.2].

2. Основные результаты

Начнем с определения условий, при которых пространство $R_\rho(\vec{A})$ является банаховым пространством.

Теорема 1.

Для того чтобы отображение $\vec{A} \mapsto R_\rho(\vec{A})$, определенное на категории банаховых пар, действовало в категорию банаховых пространств, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:
(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^2(2^{-k}) < \infty$;
(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^2(2^k)2^{2k} < \infty$.

Кроме того, при выполнении условий (a) и (b) для любой банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ пространство $R_\rho(\vec{A})$ промежуточно относительно нее, т. е.

$$A_0 \cap A_1 \subset R_\rho(\vec{A}) \subset A_0 + A_1.$$

Идея доказательства этой теоремы заключается в следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 1.

Пусть ρ — произвольная квазивогнутая функция на $[0, \infty)$. Тогда с некоторой константой, не зависящей от целых $M \geqslant N \geqslant 0$, выполнено:

$$\min\Big\{ \int_0^1 \Big| \sum_{k=-M}^{-N} \frac{\alpha_k}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big| \, dt : \, \alpha_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=-M}^{-N} \alpha_k = 1 \Big\} \asymp \Big(\sum_{k=-M}^{-N} \rho^2(2^k) \Big)^{-1/2}$$

и

$$\min\Big\{ \int_0^1 \Big| \sum_{k=N}^{M} \frac{2^k \alpha_k}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big| \, dt : \, \alpha_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=N}^{M} \alpha_k = 1 \Big\} \asymp \Big(\sum_{k=N}^{M} \rho^2(2^k) 2^{-2k} \Big)^{-1/2}.$$

При этом первый из минимумов достигается (с точностью до эквивалентности) при $\alpha_k = \rho^2(2^k)(\sum_{i=-M}^{-N} \rho^2(2^i))^{-1}$, $-M \leqslant k \leqslant -N$, а второй — при $\alpha_k = 2^{-2k}\rho^2(2^k)(\sum_{i=N}^{M} \rho^2(2^i)2^{-2i})^{-1}$, $N \leqslant k \leqslant M$.

Доказательство.

Так как оба соотношения доказываются одинаково, мы докажем только первое из них.

Прежде всего, в силу неравенства Хинчина [12, теорема 1.4] с константой, не зависящей от N, M, получим

$$\int_0^1 \Big| \sum_{k=-M}^{-N} \frac{\alpha_k}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big| \, dt \asymp \Big(\sum_{k=-M}^{-N} \frac{\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)} \Big)^{1/2}.$$

Найдем минимум функции

$$F(\{\alpha_k\}) := \sum_{k=-M}^{-N} \frac{\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)}$$

при условии $\sum_{k=-M}^{-N} \alpha_k = 1$ с помощью метода Лагранжа.

Так как функция Лагранжа имеет вид

$$L = L(\{\alpha_k\}, \lambda) = \sum_{k=-M}^{-N} \frac{\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)} + \lambda \Big(\sum_{k=-M}^{-N} \alpha_k - 1 \Big),$$

то

$$L'_{\alpha_k} = \frac{2\alpha_k}{\rho^2(2^k)} + \lambda = 0,$$

откуда

$$\alpha_k = \frac{-\lambda \rho^2(2^k)}{2} \;\text{ и }\; \lambda = -\frac{2}{\sum_{k=-M}^{-N} \rho^2(2^k)}.$$

Следовательно, нужный условный минимум $F(\{\alpha_k\})$ достигается при

$$\alpha_k = \rho^2(2^k)\Big(\sum_{i=-M}^{-N}\rho^2(2^i)\Big)^{-1}, \ -M \leqslant k \leqslant -N.$$

При этом

$$\min\Big\{F(\{\alpha_k\}) : \alpha_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=-M}^{-N}\alpha_k = 1\Big\} = \sum_{k=-M}^{-N}\frac{\rho^2(2^k)}{(\sum_{k=-M}^{-N}\rho^2(2^k))^2} = \Big(\sum_{k=-M}^{-N}\rho^2(2^k)\Big)^{-1},$$

и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Начнем с доказательства необходимости условий (a) и (b). Предположим, например, что не выполняется (a), т. е. пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^2(2^{-k}) = \infty. \tag{4}$$

Покажем, что тогда из условия $\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} = 0$, вообще говоря, не следует $a = \vec{0}$. Тем самым в этом случае пространство $R_\rho(\vec{A})$ не является даже нормированным.

Пусть $a \in A_0 \cap A_1$ и $M \in \mathbb{N}$ произвольны. Тогда $a = \sum_{k=-M}^{0}\alpha_k a$, где $\alpha_k = \rho^2(2^k)(\sum_{i=-M}^{0}\rho^2(2^i))^{-1}$, $-M \leqslant k \leqslant 0$. Поэтому, применяя лемму 1, а затем (4), получим, что

$$\int_0^1\Big\|\sum_{k=-M}^{0}\frac{\alpha_k a}{\rho(2^k)}r_k(t)\Big\|_{A_0}dt \asymp \|a\|_{A_0}\Big(\sum_{k=-M}^{0}\rho^2(2^k)\Big)^{-1/2} \to 0 \text{ при } M \to +\infty.$$

Кроме того, в силу неравенства Хинчина при тех же α_k

$$\begin{aligned}\int_0^1\Big\|\sum_{k=-M}^{0}\frac{2^k\alpha_k a}{\rho(2^k)}r_k(t)\Big\|_{A_1}dt &\asymp \|a\|_{A_1}\Big(\sum_{k=-M}^{0}\frac{\alpha_k^2 2^{2k}}{\rho^2(2^k)}\Big)^{1/2} = \\ &= \|a\|_{A_1}\Big(\sum_{k=-M}^{0}\rho^2(2^k)2^{2k}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=-M}^{0}\rho^2(2^k)\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

Так как ρ возрастает, то $\rho(2^k) \leqslant \rho(1)$, если $k \leqslant 0$. Поэтому, опять ввиду (4) правая часть этого неравенства стремится к нулю при $M \to +\infty$. Таким образом, из определения нормы в пространстве $R_\rho(\vec{A})$ следует: $\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} = 0$ для любого элемента $a \in A_0 \cap A_1$.

Так как случай, когда не выполняется условие (b), рассматривается совершенно аналогично, необходимость доказана.

Покажем, что при выполнении условий (a) и (b) пространство $R_\rho(\vec{A})$ банахово. Прежде всего, функционал $\|a\|_{R_\rho(\vec{A})}$, очевидно, является полунормой и $A_0 \cap A_1 \subset R_\rho(\vec{A})$. Докажем, что имеет место также непрерывное вложение

$$R_\rho(\vec{A}) \subset A_0 + A_1. \tag{5}$$

Пусть $a \in R_\rho(\vec{A})$. Тогда по определению существует последовательность $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $u_n \in A_0 \cap A_1$, такая, что $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n$ (сходимость в A_0+A_1), а также выполнены неравенства (2) и (3) с константой $D = 2\|a\|_{R_\rho(\vec{A})}$. Пусть также $a_k = \sum_{n=-k}^{k}u_n$, где $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $\|a_k\|_{A_0+A_1} \geqslant \frac{1}{2}\|a\|_{A_0+A_1}$. Если теперь $u^0 := \sum_{n=-k}^{-1}u_n$ и $u^1 := \sum_{n=0}^{k}u_n$, то $a_k = u^0 + u^1$. Для доказательства (5) достаточно показать, что для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от a, выполнено:

$$\|u^0\|_{A_0} \leqslant C\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} \text{ и } \|u^1\|_{A_1} \leqslant C\|a\|_{R_\rho(\vec{A})}. \tag{6}$$

Действительно, тогда в силу предыдущих соотношений

$$\|a\|_{A_0+A_1} \leqslant 2\|a_k\|_{A_0+A_1} \leqslant 2(\|u^0\|_{A_0} + \|u^1\|_{A_1}) \leqslant 4C\|a\|_{R_\rho(\vec{A})},$$

откуда следует (5).

Докажем лишь первое из неравенств в (6) (второе доказывается совершенно аналогично). По теореме Хана — Банаха существует функционал $f \in A_0^*$ такой, что $f(u^0) = \|u^0\|_{A_0}$ и $|f(x)| \leqslant \|x\|_{A_0}$ для всех $x \in A_0$. Тогда, если $\alpha_n := f(u_n)/\|u^0\|_{A_0}$, $n = -1, \ldots, -k$, то в силу равенства $\sum_{n=-k}^{-1}f(u_n) = \|u^0\|_{A_0}$

имеем: $\sum_{n=-k}^{-1} \alpha_k = 1$. Поэтому по лемме 1 и условию (a)

$$\begin{aligned} 2\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} &\geqslant \int_0^1 \Big\| \sum_{n=-k}^{-1} \frac{u_n}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_0} dt \geqslant \int_0^1 \Big| f\Big(\sum_{n=-k}^{-1} \frac{u_n}{\rho(2^n)} r_n(t)\Big) \Big\|_{A_0} dt = \\ &= \int_0^1 \Big| \sum_{n=-k}^{-1} \frac{\alpha_n \|u^0\|_{A_0}}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big| dt \geqslant C^{-1} \|u^0\|_{A_0} \Big(\sum_{n=-1}^{-k} \rho^2(2^n)\Big)^{-1/2} \geqslant C_0^{-1} \|u^0\|_{A_0}. \end{aligned}$$

Тем самым первое из неравенств (6), а вместе с этим и (5) доказаны.

В силу (5), в частности из условия $\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} = 0$, вытекает, что $a = \vec{0}$. Таким образом, $R_\rho(\vec{A})$ — нормированное пространство. Осталось установить полноту $R_\rho(\vec{A})$. Для этого достаточно показать, что любой абсолютно сходящийся ряд сходится в этом пространстве. Итак, пусть

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|a_m\|_{R_\rho(\vec{A})} < \infty. \tag{7}$$

Во-первых, ввиду (5) и (7) $\sum_{m=1}^{\infty} \|a_m\|_{A_0+A_1} < \infty$. Поэтому, так как пространство $A_0 + A_1$ банахово, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ сходится в нем. Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{m=k}^{\infty} a_m \Big\|_{R_\rho(\vec{A})} = 0. \tag{8}$$

Так как $a_m \in R_\rho(\vec{A})$, $m \in \mathbb{N}$, то $a_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^m$ (сходимость в $A_0 + A_1$), где $u_n^m \in A_0 \cap A_1$, причем для каждого $m = 1, 2, \ldots$ и любого конечного $F \subset \mathbb{Z}$ справедливы неравенства

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{n\in F} \frac{u_n^m}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_0} dt \leqslant 2\|a_m\|_{R_\rho(\vec{A})} \tag{9}$$

и

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{n\in F} \frac{2^n u_n^m}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_1} dt \leqslant 2\|a_m\|_{R_\rho(\vec{A})}. \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что для всех $m = 1, 2, \ldots$ и $n \in \mathbb{Z}$

$$\|u_n^m\|_{A_0\cap A_1} \leqslant 2\|a_m\|_{R_\rho(\vec{A})} \max(\rho(2^n), \rho(2^n)2^{-n}).$$

Значит, в силу (7) для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ и каждого $n \in \mathbb{Z}$ имеем: $\sum_{m=k}^{\infty} u_n^m = u_n$, $u_n \in A_0 \cap A_1$ (сходимость в $A_0 \cap A_1$). Кроме того, для любого конечного множества $F \subset \mathbb{Z}$ из (9) и (10) следует:

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{n\in F} \frac{u_n}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_0} dt \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \int_0^1 \Big\| \sum_{n\in F} \frac{u_n^m}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_0} dt \leqslant 2 \sum_{m=k}^{\infty} \|a_m\|_{R_\rho(\vec{A})} \tag{11}$$

и аналогично

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{n\in F} \frac{2^n u_n}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_1} dt \leqslant 2 \sum_{m=k}^{\infty} \|a_m\|_{R_\rho(\vec{A})}. \tag{12}$$

Если теперь показать, что

$$\sum_{m=k}^{\infty} a_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \ \text{ (сходимость в } A_0 + A_1), \tag{13}$$

то из (7), (11), (12) будет следовать (8), и мы получим нужный результат.

Для доказательства (13) достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l \geqslant k$, что при всех достаточно больших N справедливо неравенство

$$\Big\| \sum_{m=k}^{l} a_m - \sum_{n=-N}^{N} u_n \Big\|_{A_0+A_1} < \varepsilon.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{l} a_m - \sum_{n=-N}^{N} u_n &= \sum_{m=k}^{l} a_m - \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=k}^{\infty} u_n^m = \\ &= \sum_{m=k}^{l} \Big(a_m - \sum_{n=-N}^{N} u_n^m \Big) + \\ &+ \sum_{m=l+1}^{\infty} a_m - \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{|n|>N} u_n^m. \end{aligned}$$

Так как первая из сумм при каждом $l \geqslant k$ стремится к нулю при $N \to \infty$, а вторая стремится к нулю в $A_0 + A_1$ при $l \to \infty$, то остается показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $l \geqslant k$ такое, что для всех достаточно больших N

$$\Big\| \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{|n|>N} u_n^m \Big\|_{A_0+A_1} < \varepsilon.$$

В свою очередь, из представления

$$\sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{|n|>N} u_n^m = \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=-N-1}^{-\infty} u_n^m + \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^m$$

вытекает, что последнее неравенство выполнено, если

$$\Big\| \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=-N}^{-\infty} u_n^m \Big\|_{A_0} < \varepsilon/2 \ \text{ и } \ \Big\| \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^m \Big\|_{A_1} < \varepsilon/2.$$

Так как эти неравенства доказываются одинаково, проверим лишь первое из них.

Для произвольных $r > l \geqslant k$ и $M > N$, применяя те же рассуждения, что и при доказательстве вложения (5), получим

$$\begin{aligned}
2\sum_{m=l+1}^{\infty} \|a\|_{R_\rho(\vec{A})} &\geqslant \sum_{m=l+1}^{r} \int_0^1 \Big\| \sum_{n=-M}^{-N-1} \frac{u_n^m}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_0} dt \geqslant \\
&\geqslant \int_0^1 \Big\| \sum_{n=-M}^{-N-1} \frac{\sum_{m=l+1}^{r} u_n^m}{\rho(2^n)} r_n(t) \Big\|_{A_0} dt \geqslant \\
&\geqslant C^{-1} \Big\| \sum_{m=l+1}^{r} \sum_{n=-M}^{-N-1} u_n^m \Big\|_{A_0} \Big(\sum_{n=-M}^{-N-1} \rho^2(2^n) \Big)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Big\| \sum_{m=l+1}^{r} \sum_{n=-M}^{-N-1} u_n^m \Big\|_{A_0} \leqslant 2C \sum_{m=l+1}^{\infty} \|a\|_{R_\rho(\vec{A})} \Big(\sum_{n=-M}^{-N-1} \rho^2(2^n) \Big)^{1/2},$$

откуда

$$\Big\| \sum_{m=l+1}^{r} \sum_{n=-\infty}^{-N-1} u_n^m \Big\|_{A_0} \leqslant 2C \sum_{m=l+1}^{\infty} \|a\|_{R_\rho(\vec{A})} \Big(\sum_{n=-\infty}^{-N-1} \rho^2(2^n) \Big)^{1/2}.$$

Так как A_0 полно, то в силу условия (a) и (7) в последнем неравенстве можно перейти к пределу при $r \to \infty$. Поэтому

$$\Big\| \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{-N-1} u_n^m \Big\|_{A_0} \leqslant 2C \sum_{m=l+1}^{\infty} \|a\|_{R_\rho(\vec{A})} \Big(\sum_{n=-\infty}^{-N-1} \rho^2(2^n) \Big)^{1/2},$$

и ввиду того, что правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших l и N, соотношение (13), а с ним и теорема доказаны.

Замечание 1.

Легко видеть, что ни одно из условий (a) и (b) не является следствием квазивогнутости функции ρ. В то же время каждое из них выполнено для функций класса B^{+-}. Обратное неверно: существуют функции, удовлетворяющие и (a), и (b), но не принадлежащие к классу B^{+-}. Таковой, например, является функция $\rho(x) = x$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $\rho(x) = x/\ln(ex)$, если $x > 1$.

Более того, при выполнении условий (a) и (b) рассматриваемая конструкция задает на категории банаховых пар точный интерполяционный функтор.

Теорема 2.

Пусть банаховы пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ и $\vec{B} = (B_0, B_1)$ произвольны. Если $T : \vec{A} \to \vec{B}$ — ограниченный линейный оператор из пары $\vec{A}$ в пару $\vec{B}$, то $T : R_\rho(\vec{A}) \to R_\rho(\vec{B})$ и

$$\|T\|_{R_\rho(\vec{A}) \to R_\rho(\vec{B})} \leqslant \max_{i=0,1} \left(\|T\|_{\vec{A} \to \vec{B}} \right). \tag{14}$$

Более точно,

$$\|T\|_{R_\rho(\vec{A}) \to R_\rho(\vec{B})} \leqslant C \|T\|_{A_0 \to B_0} \mathcal{M}_\rho(\|T\|_{A_1 \to B_1} / \|T\|_{A_0 \to B_0}), \tag{15}$$

где $\mathcal{M}_\rho$ — функция растяжения функции ρ.

Таким образом, если выполнены условия (a) и (b), то отображение $\vec{A} \mapsto R_\rho(\vec{A})$ является точным интерполяционным функтором.

Доказательство.

Пусть $a \in R_\rho(\vec{A})$ и $\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} < 1$. Тогда по определению пространства $R_\rho(\vec{A})$ существует последовательность $\{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $u_k \in A_0 \cap A_1$, такая, что выполнены условия (1), (2) и (3) с $D = 1$.

Пусть $T : \vec{A} \to \vec{B}$. Для фиксированного $j \in \mathbb{Z}$ положим $v_k^j := T(u_{k+j})$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как оператор T ограниченно действует из пары $\vec{A}$ в пару $\vec{B}$, то $Ta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k^j$ и ряд сходится в $B_0 + B_1$. Заметим, что для любого банахова пространства X, каждого конечного множества $F \subset \mathbb{Z}$ и произвольных $x_k \in X$, $k \in F$, и $j \in \mathbb{Z}$ векторнозначные функции

$$t \mapsto \sum_{k\in F} x_k r_k(t) \ \text{ и } \ t \mapsto \sum_{k\in F} x_k r_{k+j}(t)$$

одинаково распределены на $[0,1]$. Кроме того, из определения функций Радемахера (см. также [12, предложение 2.2]) вытекает, что последовательность $\{x_k r_k\}_{k\in F}$ безусловна с константой 1 в пространстве Бохнера $L_1(X)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{v_k^j}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{B_0} dt \ &\leqslant\ M_0 \int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{u_{k+j}}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{A_0} dt = M_0 \int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{u_{k+j}}{\rho(2^k)} r_{k+j}(t) \Big\|_{A_0} dt \leqslant \\ &\leqslant\ M_0 \mathcal{M}_\rho(2^j) \int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F'} \frac{u_k}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{A_0} dt,\end{aligned}$$

где $F' := \{k + j : k \in F\}$. Отсюда по условию

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{v_k^j}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{B_0} dt \leqslant M_0 \mathcal{M}_\rho(2^j). \tag{16}$$

Совершенно аналогично

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{2^k v_k^j}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{B_1} dt \leqslant M_1 2^{-j} \mathcal{M}_\rho(2^j). \tag{17}$$

В частности, если в (16) и (17) взять $j = 0$, мы получим

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{v_k^0}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{B_0} dt \leqslant M_0 \ \text{ и } \ \int_0^1 \Big\| \sum_{k\in F} \frac{2^k v_k^0}{\rho(2^k)} r_k(t) \Big\|_{B_1} dt \leqslant M_1,$$

откуда следует (14).

С другой стороны, выбирая $j \in \mathbb{Z}$ так, что $2^j \asymp M_1/M_0$, и применяя неравенства (16) и (17), получаем (15).

Займемся теперь соотношением между введенным ранее функтором $\vec{A} \mapsto R_\rho(\vec{A})$ и функтором Густавссона — Петре $\vec{A} \mapsto \langle \vec{A}, \rho \rangle$. Начнем с простой леммы.

Лемма 2.

Для любой квазивогнутой функции ρ и каждой банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ справедливо вложение $\langle \vec{A}, \rho \rangle \subset R_\rho(\vec{A})$ с константой 1.

Доказательство.

Если $a \in \langle \vec{A}, \rho \rangle$ и $\|a\|_{\langle \vec{A}, \rho \rangle} < 1$, то существует последовательность $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $u_n \in A_0 \cap A_1$, такая, что $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ (сходимость в $A_0 + A_1$), и для произвольных $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $|\alpha_k| \leqslant 1$, а также любого конечного множества $F \subset \mathbb{Z}$ выполнено:

$$\Big\| \sum_{k\in F} \frac{\alpha_k u_k}{\rho(2^k)} \Big\|_{A_0} \leqslant 1 \ \text{ и } \ \Big\| \sum_{k\in F} \frac{2^k \alpha_k u_k}{\rho(2^k)} \Big\|_{A_1} \leqslant 1.$$

Полагая $\alpha_k = r_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и интегрируя по $t \in [0,1]$, получаем неравенства (2) и (3) из определения пространства $R_\rho(\vec{A})$ с $D = 1$. Следовательно, $a \in R_\rho(\vec{A})$ и $\|a\|_{R_\rho(\vec{A})} \leqslant 1$.

Теорема 3.

Пусть $\rho \in B^{+-}$ и $\vec{X} = (X_0, X_1)$ — пара максимальных банаховых решеток.
Тогда с эквивалентностью норм
$$R_\rho(\vec{X}) = \langle \vec{X}, \rho \rangle = \rho(\vec{X}),$$
где $\rho(\vec{X})$ — пространство Кальдерона — Лозановского.

Доказательство.

Прежде всего, в силу [11, lemma 8.2.1] и леммы 2 имеют место вложения:
$$\rho(\vec{X}) \subset \langle \vec{X}, \rho \rangle \subset R_\rho(\vec{X}).$$
Следовательно, осталось доказать, что
$$R_\rho(\vec{X}) \subset \rho(\vec{X}). \tag{18}$$

Как и ранее, полагая, что $x \in R_\rho(\vec{X})$ и $\|x\|_{R_\rho(\vec{X})} < 1$, найдем последовательность $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $u_n \in \in X_0 \cap X_1$, такую, что имеют место соотношения (1), (2) и (3) (с $D = 1$). Отсюда в силу неравенств Минковского и Хинчина (см. [13] или [12, теорема 5.4]) следует, что для любого конечного $F \subset \mathbb{Z}$ выполнено
$$\Big\|\Big(\sum_{k\in F}\Big(\frac{2^{ki}u_k}{\rho(2^k)}\Big)^2\Big)^{1/2}\Big\|_{X_i} \leqslant \sqrt{2}, \ \ i = 0, 1.$$
Так как пространства X_0 и X_1 максимальны, то тем самым
$$\Big\|\Big(\sum_{k\in \mathbb{Z}}\Big(\frac{2^{ki}u_k}{\rho(2^k)}\Big)^2\Big)^{1/2}\Big\|_{X_i} \leqslant \sqrt{2}, \ \ i = 0, 1.$$
Нетрудно проверить (см. также [4, леммы II.1.4 и II.1.5]), что условие $\rho \in B^{+-}$ гарантирует выполнение с некоторым $C > 0$ неравенства
$$\Big(\int_0^\infty (\min(1, s/t)\rho(t))^2\, dt/t\Big)^{1/2} \leqslant C\rho(s), \ \ s > 0.$$
Поэтому, применяя неравенство типа Карлсона [1, proposition 3.1], получим следующую поточечную оценку:
$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k\Big| \leqslant C\tilde{\rho}\left(\Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{u_k}{\rho(2^k)}\Big)^2\Big\}^{1/2}, \Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{2^k u_k}{\rho(2^k)}\Big)^2\Big\}^{1/2}\right),$$
где $\tilde{\rho}(s,t) := s\rho(t/s)$.

Отсюда по определению нормы пространства Кальдерона — Лозановского следует, что $\|x\|_{\rho(\vec{X})} \leqslant \sqrt{2}C$. Таким, образом, вложение (18), а с ним и теорема доказаны.

Так как всякое пространство Орлича максимально и $\rho(L_{M_0}, L_{M_1}) = L_M$, где $M^{-1} = M_0^{-1}\rho(M_1^{-1}/M_0^{-1})$ [11, example 2, p. 459], то, применяя теорему 3, получаем

Следствие 1.

Если $\rho \in B^{+-}$, а M_0, M_1 — возрастающие выпуклые функции на $[0, \infty)$, $M_0(0) = M_1(0) = 0$, то
$$R_\rho(L_{M_0}, L_{M_1}) = L_M,$$
где $M^{-1} = M_0^{-1}\rho(M_1^{-1}/M_0^{-1})$.

Предложение 1.

Пусть $\phi_1(s,t)$ и $\phi_2(s,t)$ — характеристические функции функторов $\vec{A} \mapsto R_\rho(\vec{A})$ и $\vec{A} \mapsto \langle \vec{A}, \rho \rangle$ соответственно. Тогда $\phi_1(s,t) \asymp \phi_2(s,t)$, $s, t > 0$, если и только если $\rho \in B^{+-}$.

Доказательство.

В силу леммы 2 $\phi_1(s,t) \leqslant \phi_2(s,t)$, $s, t > 0$, для любой функции ρ. Кроме того, простые вычисления (см. также [11, theorem 8.3.2]) показывают, что
$$\phi_2(1,t) \asymp 1/\rho(1/t), \ \ t > 0. \tag{19}$$

Найдем эквивалентное выражение для функции $\phi_1(1,t)$, $t>0$. Так как по определению $\phi_1(1,t) = \|1\|_{\rho(\mathbb{R},t\mathbb{R})}$, то

$$\phi_1(1,t) = \sup\Big\{\max_{i=0,1} t^i \int_0^1 \Big|\sum_{k=-N}^{N} \frac{2^{ki}\alpha_k}{\rho(2^k)} r_k(s)\Big|\,ds : \sum_{k=-N}^{N}\alpha_k = 1,\, N\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Отсюда, применяя в очередной раз неравенство Хинчина [12, теорема 1.4], получим:

$$\phi_1(1,t) \asymp \sup\Big\{\max\Big(\Big(\sum_{k=-N}^{N}\frac{\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)}\Big)^{1/2}, t\Big(\sum_{k=-N}^{N}\frac{2^{2k}\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)}\Big)^{1/2}\Big) : \sum_{k=-N}^{N}\alpha_k = 1,\, N\in\mathbb{N}\Big\}$$

или

$$\phi_1(1,t) \asymp \sup\Big\{\Big(\sum_{k=-N}^{N}\frac{(1+t^2 2^{2k})\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)}\Big)^{1/2} : \sum_{k=-N}^{N}\alpha_k = 1,\, N\in\mathbb{N}\Big\}$$

с универсальной константой.

Исследуя функцию

$$F(\{\alpha_k\}) := \sum_{k=-N}^{N}\frac{(1+t^2 2^{2k})\alpha_k^2}{\rho^2(2^k)}$$

на условный максимум стандартным образом с помощью метода Лагранжа, находим, что

$$\phi_1(1,t) \asymp \sup_{N\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=-N}^{N}\frac{\rho^2(2^k)}{(1+t^2 2^{2k})}\Big)^{-1/2},$$

откуда

$$\phi_1(1,t) \asymp \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\rho^2(2^k)}{(1+t^2 2^{2k})}\Big)^{-1/2}, \quad t>0.$$

Следовательно, в силу (19) эквивалентность $\phi_1(1,t)\asymp\phi_2(1,t)$, $t>0$, имеет место тогда и только тогда, когда с некоторым $C>0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\rho^2(2^k)}{(1+t^2 2^{2k})} \leqslant C\rho^2(1/t), \quad t>0.$$

Так как функция ρ квазивогнута, это эквивалентно выполнению следующих неравенств:

$$\sum_{k=n}^{-\infty}\rho^2(2^k) \leqslant C\rho^2(2^n), \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{20}$$

и

$$\sum_{k=n}^{\infty}\rho^2(2^k)2^{-2k} \leqslant C\rho^2(2^n)2^{-2n}, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{21}$$

где $C>1$.

Покажем сначала, что (20) справедливо, если $\rho\in B^+$. Действительно, так как $\rho(2^k)/\rho(2^n) \leqslant \mathcal{M}_\rho(2^{k-n})$, $k,n\in\mathbb{Z}$, то по условию с некоторыми $\varepsilon>0$ и $C'>0$

$$\sum_{k=n}^{-\infty}\rho^2(2^k) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{M}_\rho(2^{-j})^2\rho^2(2^n) \leqslant C'\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j\varepsilon}\rho^2(2^n) = \frac{C'}{1-2^{-\varepsilon}},$$

и мы получаем (20) с $C = C'/(1-2^{-\varepsilon})$.

Докажем обратное утверждение. Предполагая (20) выполненным и обозначая левую часть этого неравенства через S_n, получим: $S_n \leqslant C(S_n - S_{n-1})$ или

$$S_{n-1} \leqslant \Big(1-\frac{1}{C}\Big)S_n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Итерация этого неравенства дает нам:

$$S_{n-m} \leqslant \Big(1-\frac{1}{C}\Big)^m S_n, \quad m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z},$$

откуда

$$\rho(2^{n-m}) \leqslant C^{1/2}\Big(1-\frac{1}{C}\Big)^{m/2}\rho(2^n), \quad m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}.$$

Так как $1-1/C<1$, то отсюда следует, что $\lim_{s\to0}\mathcal{M}_\rho(s) = 0$, т. е. $\rho\in B^+$. В итоге (20) имеет место, если и только если $\rho\in B^+$.

Совершенно аналогично можно показать, что условие $\rho \in B^-$ необходимо и достаточно для справедливости неравенства (21). Так, например, если предположить, что (21) выполнено, то

$$\rho(2^{n+m}) \leqslant C^{1/2}\Big(1-\frac{1}{C}\Big)^{m/2}2^m\rho(2^n), \quad m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}.$$

Тем самым $\lim_{s\to\infty}\mathcal{M}_\rho(s)2^{-s}=0$, т. е. $\rho\in B^-$.

В итоге предложение доказано.

В заключение покажем, что при определенных условиях результат теоремы 3 относительно функторов R_ρ и $\langle\cdot,\rho\rangle$ может быть обращен.

Напомним, что банахова пара (A_0,A_1) называется *вырожденной*, если пересечение $A_0\cap A_1$ замкнуто в сумме A_0+A_1. Кроме того, говорят, что банахова пара (A_0,A_1) *вложенная*, если $A_0\subset A_1$ или $A_1\subset A_0$.

В следующей теореме $\phi_1(s,t)$ и $\phi_2(s,t)$ по-прежнему характеристические функции функторов $\vec{A}\mapsto R_\rho(\vec{A})$ и $\vec{A}\mapsto\langle\vec{A},\rho\rangle$ соответственно.

Теорема 4.

Предположим, что $R_\rho(\vec{A})=\langle\vec{X},\rho\rangle$ (с эквивалентностью норм), где $\vec{A}=(A_0,A_1)$ — невырожденная банахова пара. Тогда $\phi_1(s,t)\asymp\phi_2(s,t)$, по крайней мере, на одном из множеств: $0<t\leqslant s$ или $0<s\leqslant t$.

Если дополнительно известно, что (A_0,A_1) — невложенная пара и $A_0\cap A_1$ всюду плотно в каждом из пространств A_0 и A_1, то $\phi_1(s,t)\asymp\phi_2(s,t)$ для всех $s,t>0$.

Доказательство.

Так как пара $\vec{A}$ не вырождена, существует последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset A_0\cap A_1$ такая, что $\|a_n\|_{A_0\cap A_1}=1$, $n=1,2,\ldots$, и $\|a_n\|_{A_0+A_1}\to0$ при $n\to\infty$. Далее (возможно, после перехода к подпоследовательности) имеет место хотя бы одно из следующих утверждений: (a) $\|a_n\|_{A_0}=1$, $n=1,2,\ldots$, или (b) $\|a_n\|_{A_1}=1$, $n=1,2,\ldots$ Рассмотрим подробно первый случай.

Итак, предположим, что $\|a_n\|_{A_0}=1$, $n=1,2,\ldots$, и $\|a_n\|_{A_0+A_1}\to0$. По определению нормы в сумме A_0+A_1 найдется такое представление $a_n=a_n^0+a_n^1$, $a_n^i\in A_0\cap A_1$, $i=0,1$, что

$$\|a_n^0\|_{A_0}+\|a_n^1\|_{A_1}\to0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Так как

$$\|a_n^1\|_{A_0}\geqslant\|a_n\|_{A_0}-\|a_n^0\|_{A_0}=1-\|a_n^0\|_{A_0}\to1 \ \text{ при } \ n\to\infty,$$

то $\|a_n^1\|_{A_0}\asymp1$ при достаточно больших n. Таким образом, не ограничивая общности, можно предположить, что для некоторой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^\infty\subset A_0\cap A_1$ выполнено: $\|b_n\|_{A_0}=1$, $n=1,2,\ldots$, и $\|b_n\|_{A_1}\to0$ при $n\to\infty$.

Пусть $\|b_n\|_{A_1}=\delta_n$, $n=1,2,\ldots$. Для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ определим вектор $c_n(\alpha,\beta):=\alpha b_1+\beta b_n$. Тогда

$$\frac{\|c_n(1,0)\|_{A_1}}{\|c_n(1,0)\|_{A_0}}=\delta_1 \ \text{ и } \ \frac{\|c_n(0,1)\|_{A_1}}{\|c_n(0,1)\|_{A_0}}=\delta_n. \tag{22}$$

Зафиксируем $k_0\in\mathbb{N}$, $k_0>\log_2(1/\delta_1)$. Так как $\delta_n\to0$, то для каждого $k\in\mathbb{N}$ такого, что $k\geqslant k_0$ (и, значит, $2^{-k}<\delta_1$) найдется $n\in\mathbb{N}$, для которого $\delta_n<2^{-k}$. Тогда в силу равенств (22) и непрерывности нормы существуют такие $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$, что

$$\frac{\|c_n(\alpha_k,\beta_k)\|_{A_1}}{\|c_n(\alpha_k,\beta_k)\|_{A_0}}=2^{-k}.$$

В итоге существуют $c_k\in A_0\cap A_1$, $k\geqslant k_0$, такие, что $\|c_k\|_{A_0}=1$ и $\|c_k\|_{A_1}=2^{-k}$, $k=1,2,\ldots$

Далее, если a — произвольный вектор банахова пространства A (над полем $\mathbb{R}$), то через $\mathbb{R}a$ обозначим одномерное подпространство в A, порожденное вектором a. Для фиксированного $k\in\mathbb{N}$ рассмотрим подпространство $H_k:=\mathbb{R}c_k$ пространства A_0+A_1. Применяя теорему Хана — Банаха, можно показать, что существует ограниченный проектор $P: A_0+A_1\to A_0+A_1$ такой, что $\|P\|=1$, $P(A_0+A_1)=H_k$ и P ограниченно действует в A_0 и A_1. Отсюда легко следует [14, теорема 1.17.1], что для произвольного интерполяционного функтора F выполняется изометрическое равенство:

$$F(A_0\cap H_k,A_1\cap H_k)=F(A_0,A_1)\cap H_k, \quad k\in\mathbb{N}$$

(этот простой результат иногда называют теоремой Бауэнди —Гулауика). С одной стороны, ввиду условия теоремы

$$R_\rho(A_0\cap H_k,A_1\cap H_k)=\langle A_0\cap H_k,A_1\cap H_k,\rho\rangle, \quad k\in\mathbb{N}.$$

С другой стороны, пара $(A_0\cap H_k,A_1\cap H_k)$ изоморфна паре $(\mathbb{R},2^{-k}\mathbb{R})$ с константой, не зависящей от k. Тем самым предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$R_\rho(\mathbb{R},2^{-k}\mathbb{R})=\langle\mathbb{R},2^{-k}\mathbb{R},\rho\rangle$$

с эквивалентностью норм, константа которой не зависит от $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из определения характеристической функции (а также ее квазивогнутости) следует, что $\phi_1(1,t) \asymp \phi_2(1,t)$, $0 < t \leqslant 1$. Так как функции $\phi_1(s,t)$ и $\phi_2(s,t)$ положительно однородны первой степени, то в итоге $\phi_1(s,t) \asymp \phi_2(s,t)$, $0 < t \leqslant s$.

В случае (b) точно такие же рассуждения показывают, что $\phi_1(s,t) \asymp \phi_2(s,t)$, $0 < s \leqslant t$.

Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Кроме того, если выполнены оба условия (a) и (b), то $\phi_1(s,t) \asymp \phi_2(s,t)$ для всех $s,t > 0$. Тем самым осталось показать, что если $A_0 \cap A_1$ всюду плотно в каждом из пространств A_0 и A_1, то из невыполнения одного из условий (a) или (b) следует, что (A_0, A_1) — вложенная пара.

Предположим, например, что не выполнено (b). Значит, если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A_0 \cap A_1$ и $\|a_n\|_{A_0+A_1} \to 0$, то $\|a_n\|_{A_1} \to 0$. Отсюда для некоторой константы $C > 0$ имеем:

$$\|a\|_{A_1} \leqslant C\|a\|_{A_0} \text{ для всех } a \in A_0 \cap A_1.$$

Так как $A_0 \cap A_1$ всюду плотно в A_0, то это неравенство стандартным образом распространяется на все пространство A_0 [4, лемма II.3.4]. Таким образом, $A_0 \subset A_1$, т. е. пара (A_0, A_1) — вложенная. Если не имеет место (a), точно так же можно показать, что $A_1 \subset A_0$. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 4 и предложения 1 вытекает

Следствие 2.

Если $R_\rho(\vec{A}) = \langle \vec{A}, \rho \rangle$ (с эквивалентностью норм), где $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — невырожденная и невложенная банахова пара такая, что $A_0 \cap A_1$ всюду плотно в каждом из пространств A_0 и A_1, то $\rho \in B^{+-}$.

Из доказательства теоремы 4 следует, что равенство $R_\rho(\vec{A}) = \langle \vec{A}, \rho \rangle$ вместе с существованием последовательности векторов $a_k \in A_0 \cap A_1$, $k \in \mathbb{Z}$, таких, что $\|a_k\|_{A_0} = 1$, $\lim_{k\to-\infty} \|a_k\|_{A_1} = 0$ и $\lim_{k\to\infty} \|a_k\|_{A_1} = \infty$, гарантируют принадлежность функции ρ к классу B^{+-}. В силу этого наблюдения и теоремы 3 получаем следующий результат.

Теорема 5. Пусть E_0 и E_1 — максимальные банаховы решетки двусторонних числовых последовательностей, такие, что $\|e_k\|_{E_i} = 1$ для $i = 0, 1$ и $k \in \mathbb{Z}$, где e_k — векторы канонического базиса. Рассмотрим банахову пару $(E_0, E_1(\alpha_k))$, где $(\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ — такая последовательность положительных чисел, что $\lim_{k\to-\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} 1/\alpha_k = 0$ ($E(\alpha_k)$ — "весовое" пространство с естественной нормой $\|(x_k)\|_{E(\alpha_k)} := \|(x_k\alpha_k)\|_E$).

Тогда равенство $R_\rho(E_0, E_1(\alpha_k)) = \langle E_0, E_1(\alpha_k), \rho \rangle$ выполнено, если и только если $\rho \in B^{+-}$.

Литература

[1] Gustavsson J., Peetre J. Interpolation of Orlicz spaces // Studia Math. 1977. V. 60. № 1. P. 33–59. DOI: 10.4064/sm-60-1-33-59.

[2] Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics 233, Springer-Verlag, New York, 2006. 373 p. URL: http://bookfi.net/book/443122.

[3] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с. URL: http://bookre.org/reader?file=443508.

[4] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с. URL: http://bookre.org/reader?file=443528.

[5] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces II. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979. 243 p. URL: http://bookre.org/reader?file=773581.

[6] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. 271 с. URL: http://bookre.org/reader?file=483833.

[7] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation. Seminars in Mathematics 5. University of Campinas, Campinas, 1989. 206 p.

[8] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 264 с. URL: http://en.bookfi.net/book/443448.

[9] Brudnyĭ Yu.A., Krugljak N.Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. North-Holland, Amsterdam, 1991. 735 p. URL: http://bookre.org/reader?file=581684.

[10] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. Academic Press, Inc., Boston, 1988. 483 p. URL: http://bookre.org/reader?file=459025.

[11] Ovchinnikov V.I. The Method of Orbits in Interpolation Theory // Math. Reports. 1984. V. 1. № 2. P. 349–516. URL: http://bookre.org/reader?file=580304.

[12] Асташкин С.В. Система Радемахера в функциональных пространствах. М.: Физматлит, 2017. 549 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=32753797.

[13] Szarek S.J. On the best constant in the Khintchine inequality // Studia Math. 1976. V. 58. P. 197–208. URL: https://zbmath.org/0424.42014.

[14] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с. URL: http://bookre.org/reader?file=443582.

References

[1] Gustavsson J., Peetre J. Interpolation of Orlicz spaces // (Studia Math.). 60(1977), 33–59. DOI: 10.4064/sm-60-1-33-59 [in English].

[2] Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach Space Theory. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 233. Springer-Verlag, New York, 2006, 373 p. Available at: http://bookfi.net/book/443122 [in English].

[3] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. M.: Nauka, 1977, 742 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=443508 [in Russian].

[4] Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolyatsiya lineinykh operatorov* [Interpolation of Linear Operators]. M.: Mauka, 1978, 400 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=443528 [in Russian].

[5] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces II. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, 243 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=773581 [in English].

[6] Krasnoselskii M.A., Rutickii Ya.B. *Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha* [Convex Functions and Orlicz Spaces]. M.: Gos. izd. fiz.-mat. lit., 1958, 271 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=483833 [in Russian].

[7] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation. Seminars in Mathematics 5. University of Campinas, Campinas, 1989, 206 p. [in English].

[8] Bergh J. and Löfström J. *Interpolyatsionnye prostranstva. Vvedenie* [Interpolation Spaces. An Introduction]. M.: Mir, 1980, 264 p. Available at: http://en.bookfi.net/book/443448 [in Russian].

[9] Brudnyĭ Yu.A., Krugljak N.Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. North-Holland, Amsterdam, 1991, 735 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=581684 [in English].

[10] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. Academic Press, Inc., Boston, 1988, 483 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=459025 [in English].

[11] Ovchinnikov V.I. The Method of Orbits in Interpolation Theory. *Math. Reports*, 1984, Vol. 1, № 2, pp. 349–516. Available at: http://bookre.org/reader?file=580304 [in English].

[12] Astashkin S.V. *Sistema Rademakhera v funktsional'nykh prostranstvakh* [Rademacher system in function spaces]. M.: Fizmatlit, 2017, 549 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=32753797 [in Russian].

[13] Szarek S.J. On the best constant in the Khintchine inequality. *Studia Math.*, 58 (1976), 197–208. Avaialble at: https://zbmath.org/0424.42014 [in English].

[14] Triebel H. *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory* [Interpolation theory, Function Spaces, Differential Operators]. M.: Mir, 1980, 664 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=443582 [in Russian].