

УДК 539.376

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96

Дата поступления статьи: 15/I/2019

Дата принятия статьи: 5/II/2019

Л.В. Степанова

ВЛИЯНИЕ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ М. УИЛЬЯМСА ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОПИСАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ. ЧАСТЬ II¹

© Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
E-mail: stepanovaLv@samsu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

АННОТАЦИЯ

В статье обсуждается многопараметрическое асимптотическое разложение поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин различной длины в бесконечной линейно-упругой изотропной пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования, изменяющихся от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига. Многопараметрические асимптотические разложения компонент тензора напряжений содержат высшие приближения, в которых аналитически определены все масштабные (амплитудные) множители — коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений — как функции длин трещин, расстояния между ними и параметров нагружения. С помощью построенного асимптотического разложения и полученных формул для коэффициентов разложения можно удерживать произвольное, наперед заданное число слагаемых в асимптотических представлениях механических полей у вершины трещин в пластине. Проведен анализ числа слагаемых, которые необходимо удерживать на различных расстояниях от кончика дефекта. Вычислены углы распространения трещин в условиях смешанного нагружения с помощью многопараметрического разложения поля напряжений посредством следующих критериев: 1) критерия максимального тангенциального напряжения; 2) критерия минимума плотности энергии упругой деформации как для плоского деформированного, так и для плоского напряженного состояний.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, метод разложения по собственным функциям, многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины, смешанное деформирование, коэффициент интенсивности напряжений, Т-напряжения, высшие приближения, коэффициенты высших приближений, методы асимптотического анализа и синтеза в механике деформируемого твердого тела, теория возмущений, направление роста трещины.

Цитирование. Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 80–96. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96>.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00631.

UDC 539.376
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96

Submitted: 15/I/2019
Accepted: 5/II/2019

L.V. Stepanova

INFLUENCE OF THE HIGHER ORDER TERMS IN WILLIAMS' SERIES EXPANSION OF THE STRESS FIELD ON THE STRESS-STRAIN STATE IN THE VICINITY OF THE CRACK TIP. PART II

© *Stepanova Larisa Valentinovna* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: stepanovaiv@samsu.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ABSTRACT

The description of mechanical fields at the vicinity of a bi-dimensional crack-tip can be performed using the classic Williams asymptotic series expansion. While the general structure is well known, complete expressions are rarely available for specific crack problems. The paper is devoted to the multi-parameter description of the stress field in the vicinity of two collinear crack of different length in an infinite isotropic elastic medium subjected to 1) Mode I loading; 2) Mode II loading; 3) mixed (Mode I + Mode II) mode loading. The multi-parameter asymptotic expansions of the stress field are obtained. The procedure used in the paper relates Williams series coefficients and the complex potentials of the plane elasticity. The amplitude coefficients of the multi-parameter series expansion are found in the closed form. Having obtained the coefficients of the Williams series expansion one can keep any preassigned number of terms in the asymptotic series. Asymptotic analysis of number of the terms in the Williams asymptotic series which is necessary to keep in the asymptotic series at different distances from the crack tip. It is shown that the more distance from the crack tip the more terms in the Williams asymptotic expansion need to be kept. Complete closed-form expressions can be used to derive, test and improve numerical and experimental approaches involving higher order terms in crack-tip expansions.

Key words: stress-strain state at the crack tip, multiparameter description of stress field at the crack tip, mixed deformation, stress intensity factor, T-stress, higher approximation coefficients, methods of asymptotic analysis and synthesis in deformable solid mechanics, perturbation theory.

Citation. Stepanova L.V. *Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Uil'yamsa polya napryazhenii na opisaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershinny treshchiny. Chast' II* [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 1, pp. 80–96. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96> [in Russian].

Введение. Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения

Управление процессами разрушения и знание их закономерностей имеют важное значение для практики (для конструкций и сооружений желательно замедлить процесс роста трещин, в то время как при обработке резанием, наоборот, необходимо всячески облегчить разрушение) [1]. К числу основных направлений исследований механики разрушения относятся проблемы разрушения в условиях значительных пластических деформаций, разработки методов механики разрушения неметаллических материалов (композиционные материалы, керамики, полимеры, бетон, горные породы и т.д.), изучение распространения трещин при динамическом нагружении и при наличии воздействия агрессивных сред, прогнозирование ресурса и надежности элементов конструкций с учетом случайного характера возникновения и развития в них дефектов [1].

Поэтому понятен интерес специалистов к вопросам определения направления роста трещин и новым усовершенствованным критериям роста трещины [2–29]. Например, только в последнее время данной проблеме определения направления роста трещины посвящен целый ряд публикаций [2–12]. В работе Ю.Г. Матвиенко и Е.М. Морозова [2] обсуждаются два основных подхода определения угла направления роста трещины: инкрементальный (локальный) метод и интегральный (глобальный) метод.

Инкрементальные методы связаны с локальным критерием разрушения и дают оценку угла между направлением исходной трещины и направлением последующего ее приращения. В [2] для предсказания направления роста поверхностной трещины в условиях смешанного нагружения используется локальный критерий разрушения максимального усредненного тангенциального напряжения, включающего в себя два первых слагаемых асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений в окрестности вершины трещины. Интегральный метод ассоциирован с вариационным принципом механики разрушения. В соответствии с вариационным принципом постулируется минимум некоторого функционала [2]. Авторы предприняли попытку нахождения траектории роста трещины с помощью двух критериев для случая контактного усталостного разрушения в условиях контакта качения/скольжения. В [9] изучено распространение трещины в композиционном материале на примере силиконового композита. Проанализированы испытания образца с трещиной на трехточечный изгиб с помощью метода конечного элемента и проанализировано влияние жесткого включения, расположенного впереди кончика трещины, на направление роста трещины. Поле напряжений описывалось с помощью асимптотического разложения М. Уильямса, в котором удерживалось различное число слагаемых. Для вычисления угла отклонения трещины от первоначального направления использован критерий максимального тангенциального напряжения. Рассмотрены различные геометрические параметры образца и включения. Показано, что обобщенный критерий максимального тангенциального напряжения сильно ограничен при наличии жесткого включения, поскольку вычисленные значения направления роста трещины не согласуются ни с классическим критерием максимального тангенциального напряжения, ни с результатами конечно-элементного расчета. Таким образом, необходимы дополнительные исследования области доминирования асимптотики М. Уильямса.

В [11] сформулирован новый критерий разрушения, исходящий из предположения, что хрупкое разрушение наступает, когда градиент деформации достигает предельного значения. Аналитически показано наличие градиента деформации на границе перепада температуры тела и отсутствие напряжения, нормального к прямолинейному фронту трещины, в нулевой момент времени. Представлены результаты предварительного эксперимента с образцами из силикатного стекла при резком изменении температуры. В работе [12] более подробно показано, что модуль градиента температуры, а следовательно, и деформации становится значительным в тонком пограничном слое, где происходит резкое изменение температур. Дано решение новой термоупругой задачи о резком изменении температуры в круговой области. При этом оказалось, что в случае криволинейной границы охлажденной области E_2 , где E_2 — евклидова плоскость, критерий разрушения усложняется и приобретает вид предельного значения модуля градиента суммы главных деформаций или просто суммы главных напряжений. Разрушение будет определяться тем критерием, время наступления которого меньше. Показано также: в случае нагретой круговой области в E_2 критерием хрупкого разрушения континуальной среды будет предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций. Представлены результаты предварительного эксперимента с образцами при резком изменении температуры.

Следует отметить, что в [2] в асимптотическом разложении М. Уильямса удерживаются два первых слагаемых. В работах [4; 5] подчеркивается влияние высших приближений в асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины на примере балки с трещиной, испытываемой на четырехточечный изгиб. Для определения коэффициентов полного асимптотического разложения в [4; 5] используется переопределенный метод для обработки вычислительного эксперимента, проведенного в расчетном комплексе, реализующем метод конечного элемента. Во многих работах [21] отмечаются вычислительные сложности. Таким образом, все масштабные (амплитудные) множители в данной работе определялись численно. В настоящей статье разработан подход, позволяющий сделать следующее: 1) аналитически отыскать все масштабные (амплитудные) коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений (найти аналитические зависимости амплитудных множителей как функций длин трещин, расстояния между ними и приложенной системой нагрузок); 2) удерживать любое наперед заданное число слагаемых в полном асимптотическом представлении поля напряжений и, следовательно, 3) предлагаемый метод дает возможность получить более точную оценку угла направления роста трещины.

1. Асимптотическое представление компонент тензора напряжений у вершины $z = c$. Идентификация коэффициентов асимптотического разложения

Во второй части статьи было описано точное решение задачи о линейно-упругой изотропной пластине, ослабленной двумя коллинеарными трещинами различной длины, в терминах комплексного пере-

менного z . Наряду с точным решением было приведено и использовано асимптотическое представление М. Уильямса [14] поля напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в виде асимптотического ряда по степеням расстояния от кончика трещины r :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{m,ij}^{(k)}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – универсальные угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые в ходе решения краевой задачи; r – расстояние от вершины трещины; θ – полярный угол; a_k^m – масштабные (амплитудные) коэффициенты, зависящие от геометрии образца с трещиной и приложенной нагрузки; постоянная m определяет тип нагружения и принимает значение 1 для нагружения, отвечающего нормальному отрыву, значение 2 – поперечному сдвигу. Универсальные угловые распределения компонент тензора напряжений $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$, фигурирующие в (1), хорошо известны и могут быть найдены в [15]

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= k [(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= k [(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= k [-(k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -k [(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -k [(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= k [-(k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Все многообразие конфигураций тел с трещинами, находящихся под действием разнообразных систем нагрузок, отражается в коэффициентах асимптотического разложения (1). Разложение точного аналитического решения задачи, полученного посредством теории функции комплексного переменного, позволяет определить все коэффициенты асимптотического решения М. Уильямса (1). С целью определения масштабных множителей – коэффициентов асимптотического разложения Уильямса (1) – разложим комплексный потенциал Колосова – Мухелишвили [13]

$$\varphi_1'(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4} \quad (3)$$

в ряд в окрестности вершины $z(r, \theta) = c + r e^{i\theta}$. Полагая в (3) $z = c + r e^{i\theta}$ и раскладывая комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ в ряд по степеням r , можно получить следующее асимптотическое разложение комплексного потенциала $\varphi_1'(z)$:

$$\varphi_1'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j (z-c)^{j-1/2} + \frac{\alpha-1}{4} \sigma_{22}^\infty, \quad (4)$$

где коэффициенты асимптотического разложения δ_j вычисляются как

$$\begin{aligned} \delta_m &= \sum_{j=0}^m \zeta_{m-j} \eta_j, \quad \zeta_m = \sum_{l=0}^m \xi_{m-l} \gamma_l, \quad \xi_k = \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \beta_i, \\ \alpha_k &= \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-c)^{-(2k+1)/2}, \quad \beta_k = \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (b-c)^{-(2k+1)/2}, \\ \gamma_k &= (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (c-d)^{-(2k+1)/2}, \quad \eta_0 = c_0 c^2 + c_1 c + c_2, \quad \eta_1 = 2c_0 c + c_1, \\ \eta_2 &= c_0, \quad \eta_k = 0 \quad \forall k > 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая асимптотическое представление М. Уильямса (1) и представление, полученное на основе формул Колосова – Мухелишвили (3), можно найти все коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса:

$$a_{2k+1}^1 = -\frac{2\delta_k}{f_{1,22}^{(2k+1)}(\theta=0)}, \quad a_2^1 = \frac{(\alpha-1)\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad a_{2k}^1 = 0 \quad \forall k > 1. \quad (6)$$

Следовательно, точное аналитическое решение задачи позволяет найти функциональную зависимость коэффициентов асимптотического разложения a_k^1 поля напряжений в окрестности вершины трещины $z = c$ от геометрических параметров задачи и приложенной нагрузки. Первые семь коэффициентов a_k^1 имеют вид:

$$\begin{aligned}
a_1^1 &= \frac{-2e}{\sqrt{(a-c)(b-c)(c-d)}}, \quad e = c_0c^2 + c_1c + c_2, \\
a_3^1 &= \frac{(bd - 2bc + 3c^2 - 2cd - 2ac + ad + ab)e}{3(a-c)^{3/2}(b-c)^{3/2}(c-d)^{3/2}} - \frac{2(2c_0c + c_1)}{3\sqrt{(a-c)(b-c)(c-d)}}, \\
a_5^1 &= \frac{(8bcd^2 - 22bc^2d + 8acd^2 - 2ab^2d - 2abd^2 - 22abc^2 + 8b^2cd + 8ab^2c - 22ac^2d)e}{20(a-c)^{5/2}(b-c)^{5/2}(c-d)^{5/2}} + \\
&+ \frac{(8a^2cd + 12abcd - 8b^2c^2 - 3b^2d^2 + 20bc^3 + 20c^3d - 8c^2d^2 + 20ac^3)e}{20(a-c)^{5/2}(b-c)^{5/2}(c-d)^{5/2}} + \\
&+ \frac{(8a^2bc - 8a^2c^2 - 3a^2d^2 - 15c^4 - 3a^2b^2 + 8a^2bc - 2a^2bd)e}{20(a-c)^{5/2}(b-c)^{5/2}(c-d)^{5/2}} + \\
&+ \frac{(-2bc + bd + 3c^2 - 2cd - 2ac + ad + ab)(2c_0c + c_1)}{5((a-c)(b-c)(c-d))^{3/2}} - \\
&- \frac{5\sqrt{(a-c)(b-c)(c-d)}}{2c_0}, \\
a_7^1 &= \frac{5\sqrt{(a-c)(b-c)(c-d)}}{(-12ab^3cd - 16b^3c^3 + 5b^3d^3 + 56b^2c^4 + 35c^6 + 62a^2bc^2d - 22a^2bcd^2)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(-70ac^5 + 56a^2c^4 + 3a^2bd^3 - 88a^2c^3d - 22a^2b^2cd + 65a^2c^2d^2 - 70bc^5)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(-70c^5d + 56c^4d^2 - 16c^3d^3 + 119abc^4 + 3ab^2d^3 - 88ab^2c^3 + 24bc^2d^3)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(-88bc^3d^2 + 119bc^4d + 24a^3c^2d - 18b^2cd^3 + 65b^2c^2d^2 - 88b^2c^3d - 18b^3cd^2)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(24b^3c^2d + 3b^3ad^2 + 24b^3ac^2 - 88a^2bc^3 + 24ac^2d^3 - 88ac^3d^2 + 119ac^4d)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(5a^3d^3 - 16a^3c^3 + 24a^3bc^2 + 65a^3b^2c^2 - 18a^3cd^2 + 2a^2b^2d^2 + 3a^2b^3d)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(-18a^2b^3c + 3a^3b^2d - 18a^3b^2c - 12a^3bcd + 5a^3b^3 - 18a^2cd^3 + 62ab^2c^2d)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(62abc^2d^2 - 22ab^2d^2 - 124abc^3 - 12abcd^3 + 3a^3bd^2)e} + \\
&+ \frac{56(a-c)^{7/2}(b-c)^{7/2}(c-d)^{7/2}}{(8bcd^2 - 22bc^2d + 8acd^2 - 2ab^2d - 2abd^2 - 22abc^2 + 8b^2cd)(2c_0c + c_1)} + \\
&+ \frac{28(a-c)^{5/2}(b-c)^{5/2}(c-d)^{5/2}}{(8ab^2c - 22ac^2d + 8a^2cd + 12abcd - 8b^2c^2 - 3b^2d^2 + 20bc^3)(2c_0c + c_1)} + \\
&+ \frac{28(a-c)^{5/2}(b-c)^{5/2}(c-d)^{5/2}}{(20c^3d - 8c^2d^2 + 20ac^3 - 8a^2c^2 - 3a^2d^2 - 15c^4 - 3a^2b^2 - 8a^2bc - 2a^2bd)(2c_0c + c_1)} + \\
&+ \frac{28(a-c)^{5/2}(b-c)^{5/2}(c-d)^{5/2}}{(bd - 2bc + 3c^2 - 2cd - 2ac + ad + ab)c_0} + \\
&+ \frac{7((a-c)(b-c)(c-d))^{3/2}}{7((a-c)(b-c)(c-d))^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Следующие коэффициенты здесь не приводятся в силу их громоздкости: они могут быть вычислены с помощью формул (5) и (6). Полагая в

$$\varphi_2'(z) = \frac{c_0z^2 + c_1z + c_2}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} + i\frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \tag{8}$$

$z = c + re^{i\theta}$ и раскладывая комплексный потенциал $\varphi_2'(z)$ в ряд по степеням r , можно получить следующее асимптотическое разложение комплексного потенциала $\varphi_2'(z)$:

$$\varphi_2'(z) = -i \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j (z-a)^{j-1/2} + i\frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \tag{9}$$

где $c_0 = \sigma_{12}^\infty/2$. Используя асимптотическое разложение в ряд комплексного потенциала $\varphi_2'(z)$ в окрестности вершины $z = a$, можно получить последовательность коэффициентов

$$a_{2k+1}^2 = \frac{-2\eta_k}{f_{2,12}^{(2k+1)}(\theta=0)}, \quad a_{2k}^2 = 0, \quad \forall k > 0, \tag{10}$$

(можно отметить, что $a_{2k+1}^2 = -a_{2k+1}^1$, для всех k .) С помощью полученных выражений для коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины $z = c$

можно построить линии уровня компоненты тензора напряжений и интенсивности напряжений и сравнить их с результатами точного аналитического решения, основанного на формулах Колосова – Мусхелишвили, для оценки вклада высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса. На рис. 1 изображены линии равных значений компоненты напряжений σ_{22} у вершины трещины $z = c$, построенные с помощью точного аналитического решения, базирующегося на теории функции комплексного переменного (показанного знаками "плюс"), и приближенного аналитического решения, базирующегося на многочленном разложении М. Уильямса (показанного сплошными линиями), в случае смешанного деформирования плоскости с двумя коллинеарными трещинами для параметра смешанности нагружения $M^e = 0.5$ [16; 18; 19]. На рис. 1, а показано точное решение, одночленное и N -членные асимптотические разложения. Видно, что на рассматриваемых расстояниях от вершины трещины одночленное асимптотическое разложение плохо согласуется с точным решением: кривые не совпадают. Однако увеличение числа удерживаемых в асимптотическом разложении до 3 слагаемых приводит к совпадающим кривым. Из рис. 1, а видно, что 5, 7, 9-членные асимптотические разложения практически совпадают с точным решением задачи. Таким образом, на рассматриваемых расстояниях достаточно удерживать три слагаемых асимптотического разложения. На рис. 1, б показаны линии уровня компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}_{22} = \sigma_{22}/\sigma_{22}^\infty = 1.75$. Из рис. 1 видно, что при удалении от вершины трещины трех-, пяти-, семи-членные асимптотические разложения становятся различимыми и не совпадают с точным решением задачи. Поэтому в полном асимптотическом разложении М. Уильямса необходимо удерживать высшие приближения, вплоть до 9 слагаемых.

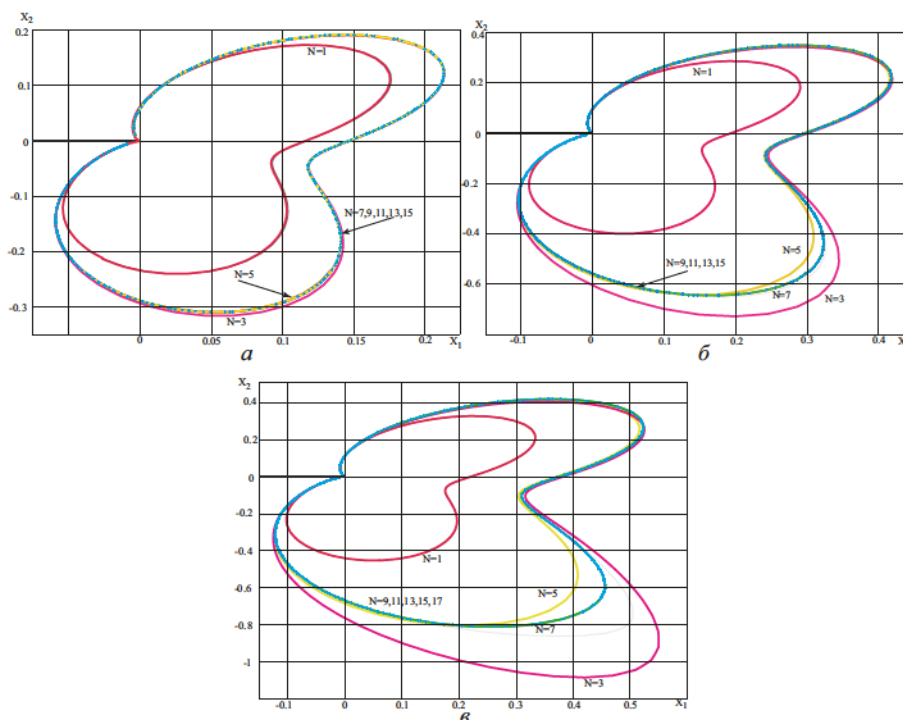


Рис. 1. Линии уровня компоненты тензора напряжений σ_{22} у вершины трещины $z = c$, построенные с помощью асимптотических разложений при удержании различного количества слагаемых

На рис. 1, в показаны линии уровня компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}_{22} = \sigma_{22}/\sigma_{22}^\infty = 1.635$. Из графиков следует еще более заметное отличие кривой, построенной посредством трехчленного асимптотического разложения компоненты σ_{22} , от точного решения. Следовательно, чем больше расстояние от вершины трещины, тем больше слагаемых следует сохранять в асимптотическом разложении. На рис. 2 изображены линии уровня интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = c$ в пластине для значения параметра смешанности нагружения $M^e = 0.5$ для случая плоского деформированного состояния. Показаны линии уровня: $\hat{\sigma}_e = \sigma_e/\sigma_{22}^\infty = 4.5$ (рис. 2, а), $\hat{\sigma}_e = \sigma_e/\sigma_{22}^\infty = 3.5$ (рис. 2, б), $\hat{\sigma}_e = \sigma_e/\sigma_{22}^\infty = 3.31$ (рис. 2, в).

Из рис. 2, а можно заключить, что одночленного разложения, показанного меткой $N = 1$, недостаточно для описания поля напряжений на рассматриваемых расстояниях. Очевидно, что также не хватает учета Т-напряжений (кривая, отмеченная меткой $N = 2$, построена с помощью двучленного асимптотического разложения интенсивности напряжений). Однако трехчленное асимптотическое разложение ($N = 3$) приводит к хорошему совпадению с точным решением, показанным знаками "плюс".

Из рис. 2, б следует, что если $\hat{\sigma}_e = 3.5$ (т. е. мы уходим от кончика трещины), то пятичленное асимптотическое разложение ($N = 5$) отличается от точного решения, а семичленное асимптотическое разложение ($N = 7$) хорошо согласуется с точным аналитическим решением. При дальнейшем удалении от вершины дефекта (рис. 2, в) заметно существенно отклонение семи- и девятичленных разложений от точного решения, в то время как одиннадцатичленное решение ($N = 11$) близко к точному решению, тринадцатичленное, пятнадцатичленное разложения приводят к полному совпадению с точным решением, основанным на теории функции комплексного переменного. На рис. 2, в линии уровня, определяемые трех- и пятичленным асимптотическими разложениями, не приведены, ибо они существенно различаются по своим размерам и форме от кривых, изображенных на графике.

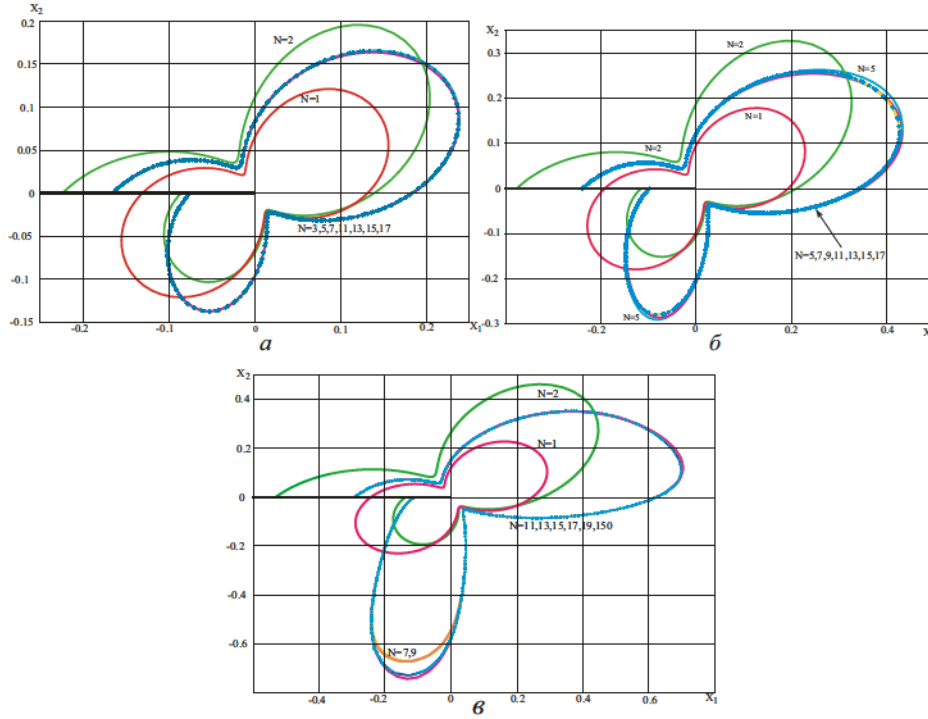


Рис. 2. Линии уровня интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = c$ в пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения $M^e = 0.5$: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение ($\hat{\sigma}_e = 4.25$); 2) точное решение (знаки "плюс") и приближенное пятичленное асимптотическое разложение ($\hat{\sigma}_e = 3.5$); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение ($\hat{\sigma}_e = 3.1$); (плоское деформированное состояние)

2. Асимптотическое представление компонент тензора напряжений у вершины $z = d$. Идентификация коэффициентов асимптотического разложения

Раскладывая комплексный потенциал $\varphi'_1(z)$ в ряд в окрестности вершины трещины $z = d$, можно получить

$$\varphi'_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \varrho_j (z-d)^{j-1/2} + (\alpha-1)\sigma_{22}^{\infty}/4, \quad (11)$$

где коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \varrho_n &= \sum_{j=0}^n v_{n-j} \varsigma_j, & v_n &= \sum_{j=0}^n \epsilon_{n-j} \iota_j, & \epsilon_n &= \sum_{j=0}^n \lambda_{n-j} \vartheta_j, \\ \varsigma_0 &= c_0 d^2 + c_1 d + c_2, & \varsigma_1 &= 2c_0 d + c_1, & c_2 &= c_0, & \varsigma_k &= 0, \quad \forall k > 2, \\ \lambda_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (a-d)^{-(2n+1)/2}, & \vartheta_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (b-d)^{-(2n+1)/2}, \\ \iota_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (c-d)^{-(2n+1)/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая асимптотическое представление М. Уильямса (1) и представление, полученное на основе формул Колосова – Мухелишвили (3), можно найти все коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса:

$$a_{2k+1}^1 = (-1)^k \frac{2\varrho_k}{f_{1,22}^{(2k+1)}(\theta=0)}, \quad a_2^1 = \frac{(\alpha-1)\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad a_{2k}^1 = 0 \quad \forall k > 1. \quad (13)$$

По аналогии с ранее рассмотренными вершинами трещин $z = a$ и $z = c$ можно отыскивать коэффициенты полного разложения М. Уильямса у вершины трещины $z = c$ в случае поперечного сдвига:

$$a_{2k+1}^2 = (-1)^k \frac{2\varrho_k}{f_{2,12}^{(2k+1)}(\theta=0)}, \quad a_{2k}^2 = 0 \quad \forall k > 1. \quad (14)$$

Первые семь коэффициентов a_{2k+1}^2 асимптотического разложения поля напряжений в окрестности точки $z = d$ в развернутой форме имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \frac{2e}{\sqrt{(a-d)(b-d)(c-d)}}, \quad e = c_0 d^2 + c_2 d + c_2, \\ a_3^1 &= -\frac{(bc - 2bd - 2cd + 3d^2 + ac - 2ad + ab)e}{3((a-d)(b-d)(c-d))^{3/2}} - \frac{2(2c_0 d + c_1)}{3\sqrt{(a-d)(b-d)(c-d)}}, \\ a_5^1 &= \frac{(2ab^2 c - 8a^2 cd - 8ab^2 d + 22bcd^2 + 2a^2 bc + 22abd^2 - 8a^2 bd - 8bc^2 d)e}{5((a-d)(b-d)(c-d))^{3/2}} + \\ &+ \frac{(22acd^2 - 8ac^2 d - 8b^2 cd + 2abc^2 - 20ad^3 - 20cd^3 + 8c^2 d^2 + 3b^2 c^2)e}{5((a-d)(b-d)(c-d))^{3/2}} + \\ &+ \frac{(15d^4 + 3a^2 c^2 - 20bd^3 - 12abcd + 3a^2 c^2 + 8a^2 d^2 + 3a^2 b^2 + 8b^2 d^2)e}{5((a-d)(b-d)(c-d))^{3/2}} + \\ &+ \frac{(bc - 2bd - 2cd + 3d^2 + ac - 2ad + ab)(2c_0 d + c_1)}{5((a-d)(b-d)(c-d))^{3/2}} + \\ &+ \frac{2c_0}{5\sqrt{(a-d)(b-d)(c-d)}}, \\ a_7^1 &= \frac{5\sqrt{(a-d)(b-d)(c-d)}}{(-119acd^4 - 24ac^3 d^2 + 88ab^2 d^3 + 18b^2 c^3 d - 119abd^4 + 88ac^2 d^3 + 3a^2 bc^3)e} + \\ &+ \frac{(18a^2 c^3 d - 3a^2 b^3 c - 65a^2 c^2 d^2 + 88a^2 b d^3 - 119bcd^4 + 88b^2 cd^3)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} + \\ &+ \frac{(18a^2 b^3 d - 24bc^3 d^2 + 3ab^2 c^3 - 65b^2 c^2 d^2 - 24b^3 cd^2 + 18b^3 c^2 d + 88bc^2 d^3)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} + \\ &+ \frac{(16b^3 d^3 - 5b^3 c^3 - 56b^2 d^4 + 70bd^5 + 16c^3 d^3 - 56c^2 d^4 + 70cd^5 - 35d^6)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} + \\ &+ \frac{(12abc^3 d - 62ab^2 cd^2 - 62abc^2 d^2 + 124abcd^3 + 22a^2 bc^2 d - 62a^2 bcd^2)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} + \\ &+ \frac{(22ab^2 c^2 d + 12ab^3 cd + 22a^2 b^2 cd + 12a^3 bcd + 70ad^5 - 56a^2 d^4 - 5a^3 c^3 + 16a^3 d^3 + 88a^2 cd^3)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} + \\ &+ \frac{(18a^3 c^2 d - 24a^3 cd^2 - 3ab^3 c^2 - 24ab^3 d^2 - 2a^2 b^2 c^2 - 65a^2 b^2 d^2)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} + \\ &+ \frac{(18a^3 b^2 d - 3a^3 bc^2 - 3a^3 b^2 c - 24a^3 bd^2 - 5a^3 b^3)e}{56((a-d)(b-d)(c-d))^{7/2}} - \\ &- \frac{(2ab^2 c - 8a^2 cd - 8ab^2 d + 22bcd^2 + 2a^2 bc + 22abd^2 - 8a^2 bd)(2c_0 d + c_1)}{28((a-d)(b-d)(c-d))^{5/2}} - \\ &- \frac{(22acd^2 - 8bc^2 d - 8ac^2 d - 8b^2 cd + 2abc^2 - 20ad^3 - 20cd^3)(2c_0 d + c_1)}{28((a-d)(b-d)(c-d))^{5/2}} - \\ &- \frac{(8c^2 d^2 + 3b^2 c^2 + 8b^2 d^2 - 20bd^3 - 12abcd15d^4 + 3a^2 c^2 + 8a^2 d^2 + 3a^2 b^2)(2c_0 d + c_1)}{28((a-d)(b-d)(c-d))^{5/2}} - \\ &- \frac{(bc - 2bd - 2cd + 3d^2 + ac - 2ad + ab)c_0}{7((a-d)(b-d)(c-d))^{3/2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Линии уровня интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = d$ в пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения $M^e = 0.25$, показаны на рис. 3, где точное решение изображено прерывистой кривой и приближенное асимптотическое разложение показано сплошной линией. На рис. 3, а показано асимптотическое решение, содержащее только одно слагаемое; на рис. 3, б показано точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (б);

на рис. 3 ϵ – точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 50 слагаемых. Все вычисления проведены для плоского деформированного состояния.

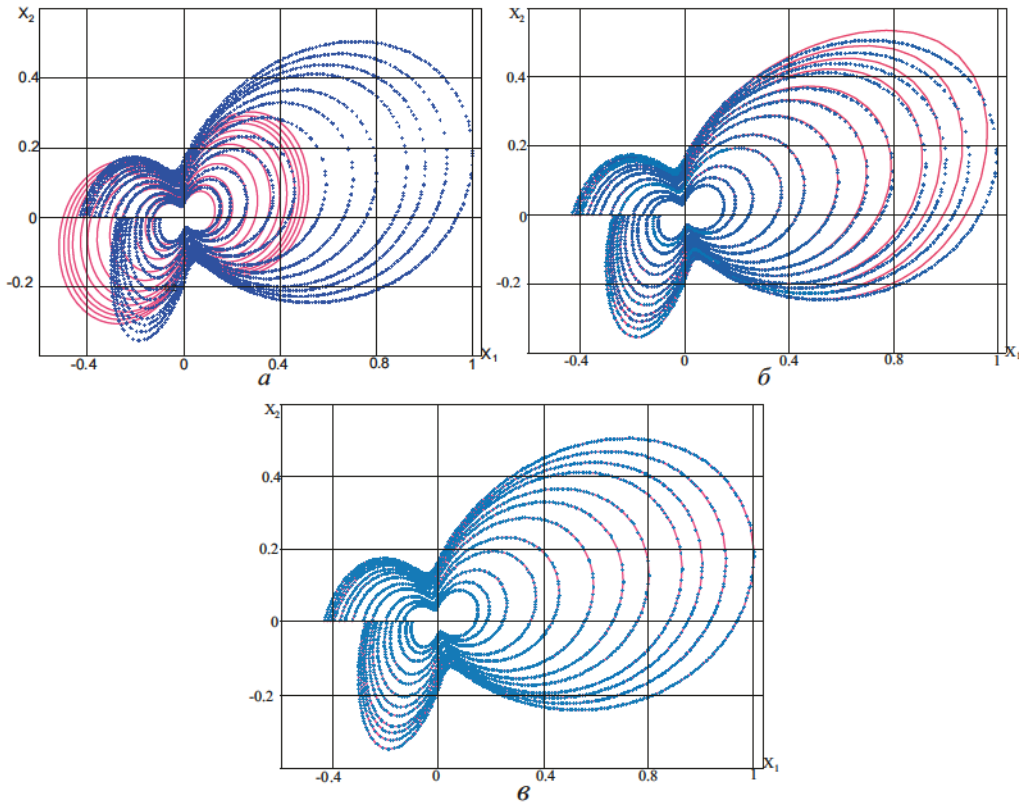


Рис. 3. Линии уровня интенсивности касательных напряжений у вершины трещины в пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения $M^e = 0.25$: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее только одно слагаемое (а); 2) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (б); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 50 слагаемых (в); (плоское деформированное состояние)

Развитый в настоящем исследовании подход показал следующее: 1) с помощью компьютерного алгоритма, реализованного в системе символьных вычислений Maple, достаточно просто построить высшие приближения в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений у вершины трещины; 2) многочисленные тесты компьютерного алгоритма и сравнение результатов с имеющимся точным решением рассматриваемой задачи о нагружении пластины с двумя коллинеарными трещинами различной длины приводят к сходящимся к точному решению асимптотическим разложениям механических полей; 3) удержание высших приближений приводит к существенному расширению области действия асимптотики М. Уильямса.

3. Многопараметрические критерии разрушения

Полученные многопараметрические асимптотические разложения позволяют вычислить угол направления распространения трещины в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого поперечного сдвига до чистого нормального отрыва, характеризуемых параметром смешанности нагружения M^e [18]. В настоящей работе были вычислены углы распространения правой трещины у вершины $z = a$ посредством двух критериев: 1) критерия максимального тангенциального напряжения:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (17)$$

(результаты вычислений приведены в табл. 1); 2) критерия минимума плотности энергии упругой деформации:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0, \quad S = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\kappa + 1}{8} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}^2 \right]. \quad (18)$$

Результаты вычислений по последнему критерию приведены в табл. 2, 3 (где $\hat{r} = r/((c-d)/2)$). Для каждого критерия очевидным является существенная зависимость угла направления распространения от высших приближений: в первом столбце приведены углы направления роста трещины, вычисленные с помощью однопараметрического асимптотического разложения ($N = 1$), где N – число удерживаемых слагаемых. Поскольку $N = 1$, то значения угла не зависят от расстояния от кончика трещины. В следующих столбцах приведены значения углов распространения трещины, полученные с удержанием высших приближений (во всех случаях удерживалось 100 слагаемых). Зависимость угла направления распространения трещины от расстояния от вершины более ярко выражена для нагружений, близких к поперечному сдвигу. Данная зависимость сглаживается для нагружений, близких к нормальному отрыву. Результаты вычислений приведены в табл. 4 и 5.

Как показали проведенные вычисления, критерий максимума тангенциального напряжения менее чувствителен к расстояниям от кончика трещины, на которых вычисляется значение угла: после значения $\hat{r} = 0.5$ полученные значения углов стабилизируются.

На рис. 4 показан доведенный до разрушения образец с двумя коллинеарными трещинами. Пластина с двумя наклонными под углом 45° параллельными трещинами находилась в условиях одноосного растяжения, что соответствует смешанному нагружению горизонтальных трещин и значению параметра смешанности нагружения $M^e = 0.5$. Видно, что результаты проведенных вычислений по многопараметрическому критерию максимального тангенциального напряжения хорошо подтверждаются экспериментом, поскольку угол направления распространения трещины составляет 45° (табл. 1, второй столбец).

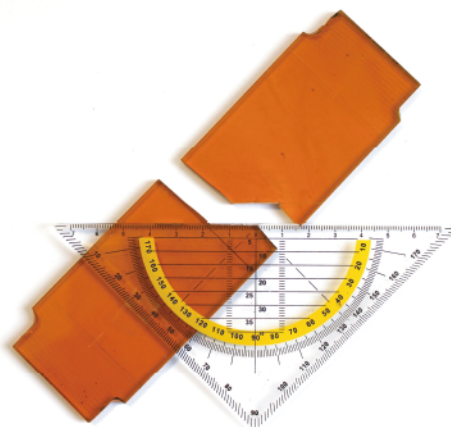


Рис. 4. Доведенный до разрушения образец с двумя коллинеарными трещинами

Таблица 1

Углы направлений роста трещины, вычисленные с помощью критерия максимального тангенциального напряжения

Угол направления роста трещины	$N = 1$	$\hat{r} = 0.05$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.25$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.75$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$	M^e
		-70.53	-67.66	-65.02	-58.80	-52.91	-49.91	-47.20	-46.55	-46.11
	-67.53	-63.81	-60.94	-54.79	-49.79	-46.81	-44.50	-43.95	-43.60	0.1
	-64.47	-59.77	-56.72	-50.75	-45.94	-43.68	-41.74	-41.30	-41.01	0.2
	-62.86	-57.64	-54.52	-48.68	-44.16	-42.07	-40.31	-39.92	-39.66	0.25
	-61.18	-55.41	-52.23	-46.55	-42.32	-40.41	-38.83	-38.47	-38.25	0.3
	-57.48	-50.56	-47.32	-42.05	-38.43	-36.86	-35.62	-35.36	-35.20	0.4
	-53.13	-45.01	-41.82	-37.10	-34.10	-32.88	-31.98	-31.80	-31.70	0.5
	-47.72	-38.52	-35.52	-31.49	-29.15	-28.27	-27.68	-27.59	-27.54	0.6
	-40.61	-30.83	-28.22	-25.03	-23.36	-22.79	-22.48	-22.45	-22.45	0.7
	-36.12	-26.46	-24.14	-21.42	-20.08	-19.65	-19.46	-19.46	-19.47	0.75
	-30.81	-21.73	-19.77	-17.56	-16.52	-16.22	-16.12	-16.13	-16.16	0.8
	-17.19	-11.30	-10.23	-9.10	-8.62	-8.50	-8.50	-8.53	-8.55	0.9

Таблица 2

Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума плотности энергии упругой деформации ($\nu = 0.3$) (плоское деформированное состояние)

Угол роста трещины	$N = 1$	$\hat{r} = 0.05$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.25$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.75$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$	M^e
	-82.34	-82.36	-82.36	-82.18	-81.11	-79.15	-74.26	-71.98	-69.96	0
	-76.19	-76.02	-75.95	-75.56	-74.20	-72.17	-67.72	-63.74	-63.99	0.1
	-70.14	-69.44	-69.43	-68.75	-67.11	-65.10	-61.13	-59.42	-57.92	0.2
	-67.14	-66.42	-66.12	-65.26	-63.51	-61.53	-57.80	-56.22	-54.84	0.25
	-64.14	-63.14	-62.74	-61.70	-59.86	-57.93	-54.45	-52.99	-51.72	0.3
	-58.10	-56.39	-55.74	-54.36	52.42	-50.64	-47.63	-46.41	-45.35	0.4
	-51.91	-49.22	-48.31	-46.67	-44.74	-43.16	-40.65	-39.65	-38.78	0.5
	-45.34	-41.43	-40.30	-38.53	-36.76	-35.43	-33.40	-32.61	-31.93	0.6
	-38.01	-32.75	-31.53	-29.83	-28.36	-27.32	-25.80	-25.21	-24.71	0.7
	-33.82	-28.00	-26.81	-25.25	-23.96	-23.09	-21.82	-21.33	-20.92	0.75
	-29.04	-22.93	-21.84	-20.48	-19.42	-18.71	-17.70	-17.32	-16.99	0.8
-16.75	-11.89	-11.23	-10.46	-9.91	-9.55	-9.05	-8.86	-8.70	0.9	

Таблица 3

Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума плотности энергии упругой деформации ($\nu = 0.5$) (плоское деформированное состояние)

Угол роста трещины	$N = 1$	$\hat{r} = 0.05$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.25$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.75$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$	M^e
	-90.00	-89.53	-89.06	-87.55	-84.61	-82.28	-75.05	-72.50	-70.31	0
	-83.99	-83.18	-82.53	-80.63	-77.36	-74.11	-68.54	-66.31	-64.41	0.1
	-77.91	-76.63	-75.76	-73.42	-69.94	-66.87	-61.93	-60.00	-58.37	0.2
	-74.82	-73.25	-72.25	-69.70	-66.17	-63.20	-58.59	-56.80	-55.29	0.25
	-71.68	-69.78	-68.64	-65.90	-62.35	-59.51	-55.21	-53.56	-52.16	0.3
	-65.19	-62.49	-61.07	-58.03	-54.58	-52.03	-48.33	-46.94	-45.76	0.4
	-58.28	-54.60	-52.94	-49.77	-46.57	-44.35	-41.25	-40.01	-39.12	0.5
	-50.68	-45.91	-44.10	-41.04	-38.24	-36.40	-33.89	-32.97	-32.19	0.6
	-41.90	-36.18	-34.41	-31.73	-29.47	-28.05	-26.14	-25.45	-24.87	0.7
	-36.84	-30.85	-29.21	-26.82	-24.89	-23.69	-22.09	-21.51	-21.03	0.75
	-31.13	-25.21	-23.76	-21.74	-20.16	-19.19	-17.91	-17.44	-17.06	0.8
-17.21	-13.01	-12.18	-11.10	-10.28	-9.78	-9.14	-8.91	-8.72	0.9	

Таблица 4

Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума плотности энергии упругой деформации ($\nu = 0.5$) (плоское напряженное состояние)

Угол роста трещины	$N = 1$	$\hat{r} = 0.05$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.25$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.75$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$	$\hat{r} = 2$	M^e
	-79.66	-79.90	-80.10	-80.41	-79.96	-78.43	-73.98	-71.79	-68.83	68.11	0
	-77.53	-77.23	-77.05	-76.39	-74.72	-72.49	-67.86	-65.83	-64.06	-62.52	0.1
	-71.51	-70.85	-70.51	-69.54	-67.59	-65.40	-61.27	-59.52	-58.00	-56.68	0.2
	-68.51	-67.61	-67.17	-66.01	-63.96	-61.82	-57.94	-56.32	-54.91	-53.70	0.25
	-65.50	-64.31	-63.76	-62.42	-60.29	-58.20	-54.58	-53.08	-51.79	-50.67	0.3
	-59.42	-57.48	-56.68	-55.00	-52.79	-50.88	-47.76	-46.50	-45.42	-44.42	0.4
	-53.13	-50.20	-49.15	-47.22	-45.06	-43.37	-40.75	-39.72	-38.84	-38.08	0.5
	-46.41	-42.27	-41.00	-38.98	-37.02	-35.60	-33.49	-32.68	-31.98	-31.38	0.6
	-38.83	-33.42	-32.08	-30.18	-28.56	-27.45	-25.86	-25.25	-24.74	-24.29	0.7
	-34.47	-28.56	-27.27	-25.54	-24.13	-23.20	-21.87	-21.37	-20.94	-20.56	0.75
	-29.51	-23.39	-22.21	-20.72	-19.56	-18.80	-17.74	-17.34	-16.99	-16.70	0.8
-16.86	-12.12	-11.41	-10.58	-9.97	-9.60	-9.07	-8.87	-8.70	-8.56	0.9	

Таблица 5
 Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума плотности энергии упругой деформации ($\nu = 0.3$) (плоское напряженное состояние)

Угол направления распространения трещины	распространения трещины												
	$N = 1$	$\hat{r} = 0.05$	$\hat{r} = 0.1$	$\hat{r} = 0.25$	$\hat{r} = 0.5$	$\hat{r} = 0.75$	$\hat{r} = 1.25$	$\hat{r} = 1.5$	$\hat{r} = 1.75$	$\hat{r} = 2$	M^e		
	-79.67	-79.90	-80.10	-80.41	-79.95	-78.43	-73.98	-71.79	-68.83	68.11	0		
	-73.35	-73.49	-73.66	-73.84	-73.11	-71.49	-67.43	-65.54	-63.84	-62.36	0.1		
	-67.19	-67.10	-67.18	-67.11	-66.11	-64.47	-60.84	-59.21	-57.76	-56.49	0.2		
	-64.16	-63.88	-63.89	-63.67	-62.55	-60.93	-57.52	-56.00	-54.68	-53.51	0.25		
	-61.14	-60.64	-60.55	-60.18	-58.95	-57.35	-54.17	-52.78	-51.56	-50.48	0.3		
	-55.14	-53.99	-53.69	-52.98	-51.61	-50.12	-47.38	-46.22	-45.20	-44.31	0.4		
	-49.10	-47.01	-46.47	-45.46	-44.04	-42.71	-40.42	-39.47	-38.65	-37.93	0.5		
	-42.83	-39.51	-38.73	-37.52	-36.18	-35.05	-33.22	-32.48	-31.83	-31.27	0.6		
	-36.01	-31.23	-30.29	-29.05	-27.91	-27.03	-25.66	-25.12	-24.64	-24.23	0.7		
	-32.17	-26.70	-25.75	-24.58	-23.58	-22.84	-21.71	-21.26	-20.87	-20.53	0.75		
	-27.82	-21.88	-20.99	-19.94	-19.11	-18.52	-17.62	-17.26	-16.96	-16.69	0.8		
	-16.44	-11.36	-10.79	-10.19	-9.76	-9.46	-9.02	-8.84	-8.69	-8.56	0.9		

Выводы и обсуждение результатов

В настоящей работе выполнен асимптотический анализ влияния высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в бесконечной линейно-упругой изотропной пластине, ослабленной двумя коллинеарными трещинами разной длины. Показано, что высшие приближения в асимптотическом разложении играют существенную роль при оценке поля напряжений при увеличении расстояния от кончика трещины: чем больше слагаемых удерживается в асимптотическом разложении, тем больше область действия асимптотики М. Уильямса. Полученное решение может быть полезно при обработке результатов экспериментов, нацеленных на определение параметров механики разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжений), поскольку только правильная интерпретация экспериментальных данных ведет к надежным и достоверным результатам [29; 34]. Вычислены углы распространения трещины в условиях смешанного нагружения с помощью многопараметрического разложения поля напряжений посредством: 1) критерия максимального тангенциального напряжения; 2) критерия минимума плотности энергии упругой деформации. Показано, что высшие приближения оказывают существенное влияние на угол направления распространения трещины в условиях смешанного нагружения и следует прибегать к многопараметрическим критериям разрушения.

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку работы (проект 19-01-00631).

Литература

- [1] Пахалина Н.С., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. Расчет траектории трещины при растяжении клина вариационным методом // XXVI Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов МИКМУС-2014. Труды конференции. М., 2015. С. 544–548. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23169597>.
- [2] Matvienko Y.G., Morozov E.M. Two basic approaches in a search of the crack propagation angle // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2017. Vol. 40. Issue 8, pp. 1190–1200. DOI: 10.1111/ffe.12583 [in English].
- [3] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter failure assessment of a bi-material V-notch — Crack initiation from a free-edge singularity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 100. P. 233–241. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.01.021.
- [4] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 143. P. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [5] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // *International Journal of fatigue*. 2016. V. 89. P. 99–107. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010.
- [6] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution // *Numerical Analysis and Applications*. 2015. № 8(2). P. 168–181. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423915020081>.
- [7] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 2014, Vol. 75, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>.
- [8] Malikova L., Vesely V. Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria // *Frattura ed Integrita Strutturale*. 2015. V. 33. P. 25–32.
- [9] Malikova L., Vesely V. Influence of the elastic mismatch on crack propagation in a silicate-based composite // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2017.
- [10] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 20–35. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016.
- [11] Кулиев В.Д., Морозов Е.М. Градиентный деформационный критерий хрупкого разрушения // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. С. 528–530. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27626845>.
- [12] Кулиев В.Д., Морозов Е.М. Градиентный деформационный критерий хрупкого разрушения. Аналитическое обоснование и экспериментальное обоснование // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2016. № 2(28). С. 87–102.
- [13] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=469235>.

- [14] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. P. 109–114. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf> [in English].
- [15] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. V. 49. P. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [16] Stepanova L.V., Igonin S.A. Rabotnov damage parameter and description of delayed fracture: Results, current status, application to fracture mechanics, and prospects // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. V. 56. № 2. P. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894415020145>.
- [17] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009. Vol. 50. Issue 1. P. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9>.
- [18] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. № 100–101. P. 11–28. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032).
- [19] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. Vol. 55, № 5, pp. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186>.
- [20] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. V. 10. № 3. P. 367–393. DOI: [10.2140/jomms.2015.10.367](https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367).
- [21] Sobek J., Frantik P., Vesely V. Analysis of accuracy of Williams series approximation of stress field in cracked body — influence of area of interest around crack-tip on multi-parameter regression performance // *Frattura ed Integrita Strutturale*. 2017. V. 39. № 1. P.129–142. DOI <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14>
- [22] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD) // *Engineering Fracture Mechanics*. 2013. V. 102. P. 235–248. DOI: [10.1016/j.engfracmech.2013.02.014](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.02.014).
- [23] Akbardoost J., Rastin A. Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk-type specimens under mixed mode loading // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. V. 76. P. 75–90. DOI: [10.1016/j.tafmec.2015.01.004](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.01.004).
- [24] Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика. I. Поле действующих напряжений / С.И. Елеонский [и др.] // *Ученые записки ЦАГИ*. 2015. Т. 46. № 7. С. 55–80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617>.
- [25] Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study / M. Mokhtarishirazabad [et al.] // *International Journal of Fatigue*. 2016. V. 89. P. 11–19. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.03.006>.
- [26] Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data // *Measurement Science and Technology*. 2016. V. 27. № 12. P. 125203. DOI: [10.1088/0957-0233/27/12/125203](https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/12/125203).
- [27] Ayatollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension // *Optic and Lasers in Engineering*. 2017. V. 90. P. 26–33. DOI: [10.1016/j.optlaseng.2016.09.011](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.09.011).
- [28] Chernyatin A.S., Matvienko Yu.G., Lopez-Crespo P. Mathematical and numerical correction of the DIC displacements for determination of stress field along crack front // *Procedia Structural Integrity*. 2016. V. 2. P. 2650–2658. DOI: [10.1016/j.prostr.2016.06.331](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2016.06.331).
- [29] Prataprao Patil, Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least square approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. 2017. V. 93. P. 182–194. DOI: [10.1016/j.optlaseng.2017.02.003](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003).
- [30] Aliha M.R.M. On predicting mode II fracture toughness (K_{IIc}) of hot mix asphalt mixtures using the strain energy criterion // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. V. 99. P. 36–43.
- [31] Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed-mode loading // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. V. 172–173. P. 51–69. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2019.05.011](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.05.011).
- [32] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vols. 144–145. P. 265–275. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012).
- [33] On the stress singularity at crack tip in elasticity / F. Zhu [et al.] // *Results in Physics*. 2019. V. 13. P. 102210.

- [34] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem // *Procedia Structural Integrity*. 2018. V. 13. P. 1279–1284. DOI: 10.1016/j.prostr.2018.12.261.
- [35] Torabi A.R., Bahrabi B., Ayatollahi M.R. Experimental determination of the notch stress intensity factor for sharp V-notched specimens by using the digital image correlation method // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. V. 103. Art. 102244.

References

- [1] Pachalina N.S., Morozov E.M., Matvienko Y.G. *Raschet traektorii treshchiny pri rastyazhenii klina variatsionnym metodom* [Crack trajectory calculation in the wedge under tension by variational method]. In: *XXVI Mezhdunarodnaya innovatsionno-orientirovannaya konferentsiya molodykh uchenykh i studentov MIKMUS-2014. Trudy konferentsii* [XXVI International Conference of Young Scientists and students MIKMUS 2014. Materials of the conference], M., 2015, pp. 544–548. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23169597> [in Russian].
- [2] Matvienko Y.G., Morozov E.M. Two basic approaches in a search of the crack propagation angle. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2017, Vol. 40, Issue 8, pp. 1191–1200. DOI: 10.1111/ffe.12583 [in English].
- [3] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter failure assessment of a bi-material V-notch - Crack initiation from a free-edge singularity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, April 2019, Vol. 100, pp. 233–241. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.01.021 [in English].
- [4] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 143, July 2015, pp. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029> [in English].
- [5] Malikova L., Vesely V., Seitl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, August 2016, Vol. 89, pp. 99–107. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010 [in English].
- [6] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution. *Numerical Analysis and Applications*, April 2015, Volume 8, Issue 2, pp. 168–181. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423915020081> [in English].
- [7] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, Vol. 75, January 2014, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001> [in English].
- [8] Malikova L., Vesely V. Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2015, Vol. 33, pp. 25–32. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.33.04 [in English].
- [9] Malikova L., Vesely V. Influence of the elastic mismatch on crack propagation in a silicate-based composite. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017 [in English].
- [10] Vesely V., Sobek J., Seitl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. *International Journal of Fatigue*, February 2016, Vol. 89, pp. 20–35. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016 [in English].
- [11] Kuliev V.D., Morozov E.M. *Gradientnyi deformatsionnyi kriterii khrupkogo razrusheniya* [Gradient deformation criterion for brittle fracture]. *Doklady Akademii Nauk* [Doklady Physics], 2016, Vol. 61, № 10, pp. 502–504. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27626845> [in Russian].
- [12] Kuliev V.D., Morozov E.M. *Gradientnyi deformatsionnyi kriterii khrupkogo razrusheniya. Analiticheskoe obosnovanie i eksperimental'noe obosnovanie* [Gradient deformation criterion of brittle fracture. Analytical and experimental rationale for confirmation]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya* [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State], 2016, № 2(28), pp. 87–102. Available at: <http://limit21.ru/upload/articles/254.pdf> [in Russian].
- [13] Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. M.: Nauka, 1966, 708 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=469235> [in Russian].
- [14] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pp. 109–114. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf> [in English].
- [15] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, Issues 3–4, February 2012, pp. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024> [in English].

- [16] Stepanova L.V., Igonin S.A. Rabotnov damageparameter and description of delayed fracture: Results, current status, application to fracture mechanics, and prospects. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, March 2015, Volume 56, Issue 2, pp. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894415020145> [in English].
- [17] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, January 2009, Vol. 50, Issue 1, pp. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9> [in English].
- [18] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, September 2016, № 100–101, pp. 11–28. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032) [in English].
- [19] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, September 2014, Volume 55, Issue 5, pp. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186> [in English].
- [20] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, August 2015, Vol. 10, № 3, pp. 367–393. DOI: [10.2140/jomms.2015.10.367](https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367) [in English].
- [21] Sobek J., Frantik P., Vesely V. Analysis of accuracy of Williams series approximation of stress field in cracked body — influence of area of interest around crack-tip on multi-parameter regression performance. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2017, Vol. 11, No. 39 (2017): January 2017, pp. 129–142. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14> [in English].
- [22] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD). *Engineering Fracture Mechanics*, April 2013, Vol. 102, pp. 235–248. DOI: [10.1016/j.engfracmech.2013.02.014](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.02.014) [in English].
- [23] Akbardoost J., Rastin A. Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk-type specimens under mixed mode loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, January 2015, Vol. 76, pp. 75–90. DOI: [10.1016/j.tafmec.2015.01.004](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.01.004) [in English].
- [24] *Issledovanie protsessa rasprostraneniya treshchiny po dannym izmerenii lokal'nogo deformatsionnogo otklika. I. Pole deistvuyushchikh napryazhenii. S.I. Eleonskii [et al].* [S.I. Eleonskii [et al]. Investigation of the crack propagation process according to measurements of the local deformation response. I. Field of the acting stresses]. *Uchenye zapiski TsAGI [TsAGI Science Journal]*, 2015, Vol. 46, № 7, pp. 55–80. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617> [in Russian].
- [25] Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study. M. Mokhtarishirazabad [et al.]. *International Journal of Fatigue*, Volume 89, August 2016, pp. 11–19. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.03.006> [in English].
- [26] Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data. *Measurement Science and Technology*, December 2016, Vol. 27, Issue 12, p. 125203. DOI: [10.1088/0957-0233/27/12/125203](https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/12/125203) [in English].
- [27] Ayatollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension. *Optic and Lasers in Engineering*, March 2017, Vol. 90, pp. 26–33. DOI: [10.1016/j.optlaseng.2016.09.011](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.09.011) [in English].
- [28] Chernyatin A.S., Matvienko Yu.G., Lopez-Crespo P. Mathematical and numerical correction of the DIC displacements for determination of stress field along crack front. *Procedia Structural Integrity*, 2016, Vol. 2, pp. 2650–2658. DOI: [10.1016/j.prostr.2016.06.331](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2016.06.331) [in English].
- [29] Prataprao Patil, Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least square approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, February 2017, Volume 93, pp. 182–194. DOI: [10.1016/j.optlaseng.2017.02.003](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003) [in English].
- [30] Aliha M.R.M. On predicting mode II fracture toughness (K_{IIc}) of hot mix asphalt mixtures using the strain energy criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, Vol. 99, pp. 36–43 [in English].
- [31] Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed-mode loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, Vol. 172–173, pp. 51–69. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2019.05.011](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.05.011) [in English].
- [32] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, May 2018, Vols. 144–145, pp. 265–275. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012) [in English].
- [33] On the stress singularity at crack tip in elasticity. F. Zhu [et al.]. *Results in Physics*, 2019, Vol. 13, p. 102210 [in English].

- [34] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem. *Procedia Structural Integrity*, 2018, Vol. 13, pp. 1279–1284. DOI: 10.1016/j.prostr.2018.12.261 [in English].
- [35] Torabi A.R., Bahrabi B., Ayatollahi M.R. Experimental determination of the notch stress intensity factor for sharp V-notched specimens by using the digital image correlation method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, Vol. 103, Art. 102244 [in English].