

УДК 539.376

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79

Дата поступления статьи: 19/ХІІ/2018

Дата принятия статьи: 5/ІІ/2019

Л.В. Степанова

ВЛИЯНИЕ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ М. УИЛЬЯМСА ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОПИСАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ. ЧАСТЬ I¹

© Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
E-mail: stepanovaLv@samsu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена многопараметрическому асимптотическому описанию поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин различной длины в бесконечной линейно-упругой изотропной пластине, находящейся в следующих условиях: 1) под действием нормального растягивающего напряжения; 2) под действием поперечного сдвига; 3) в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм нагружения, изменяющихся от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига. Построены многопараметрические асимптотические разложения компонент тензора напряжений, содержащие высшие приближения, в которых аналитически определены все масштабные (амплитудные) множители — коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса — как функции длин трещин, расстояния между ними и параметров нагружения. С помощью построенного разложения и полученных формул для коэффициентов разложения можно удерживать любое, наперед заданное число слагаемых в асимптотических представлениях механических полей у вершины трещин в пластине. Проведен анализ числа слагаемых, которые необходимо удерживать на различных расстояниях от кончика дефекта.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины, смешанное деформирование, коэффициент интенсивности напряжений, Т-напряжения, коэффициенты высших приближений, методы асимптотического анализа и синтеза в механике деформируемого твердого тела, теория возмущений.

Цитирование. Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 63–79. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79>.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00631.

L. V. Stepanova

INFLUENCE OF THE HIGHER ORDER TERMS IN WILLIAMS' SERIES EXPANSION OF THE STRESS FIELD ON THE STRESS-STRAIN STATE IN THE VICINITY OF THE CRACK TIP. PART I

© Stepanova Larisa Valentinovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: stepanovaLv@samsu.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ABSTRACT

The paper is devoted to the multi-parameter description of the stress fields in the vicinity of two collinear crack of different length in an infinite isotropic elastic medium subjected to 1) Mode I loading; 2) Mode II loading; 3) mixed (Mode I + Mode II) mode loading. The multi-parameter asymptotic expansions of the stress field in the vicinity of the crack tip in isotropic linear elastic media under mixed mode loading are obtained. The amplitude coefficients of the multi-parameter series expansion are found in the closed form. Having obtained the coefficients of the Williams series expansion one can keep any preassigned number of terms in the asymptotic series. Asymptotic analysis of number of the terms in the Williams asymptotic series which is necessary to keep in the asymptotic series at different distances from the crack tip. It is shown that the more distance from the crack tip the more terms in the Williams asymptotic expansion need to be kept.

Key words: stress-strain state at the crack tip, multiparameter description of stress field at the crack tip, mixed deformation, stress intensity factor, T-stress, higher approximation coefficients, methods of asymptotic analysis and synthesis in deformable solid mechanics, perturbation theory.

Citation. Stepanova L.V. *Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Uil'yamsa polya napryazhenii na opisanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' I.* [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part I]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 1, pp. 63–79. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79> [in Russian].

Введение. Смешанное нагружение тела с трещиной

Несмотря на глубокую математическую разработанность и огромное количество публикаций [1–16], механика хрупкого разрушения все еще содержит много открытых задач и вопросов [5; 6]. Например, механизмы разрушения, отвечающие нормальному растяжению пластины с трещиной, хорошо изучены.

Тем не менее разрушение, особенно на первой стадии [14], часто соответствует разрушению при смешанном деформировании тела с дефектом. Это обусловлено существованием случайно ориентированных микродефектов (микротрещин) вблизи вершины трещины в элементе конструкции. Поэтому особенно важными и актуальными представляются формулировка, верификация и апробирование критериев разрушения при реализации смешанных мод деформирования элементов конструкций с дефектами. К настоящему времени предложен целый ряд критериев разрушения и параметров, предназначенных специально для смешанного нагружения тела с трещиной [10; 13; 14].

В настоящей статье построены многокомпонентные асимптотические разложения поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин различной длины в бесконечной пластине в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого сдвига до чистого нормального отрыва и протестированы два критерия разрушения для данной конфигурации образца с трещинами: 1) критерий максимального тангенциального напряжения; 2) критерий минимума плотности энергии упругой деформации. Главным мотивом данного исследования является необходимость развития критериев разрушения, базирующихся на многочленном асимптотическом разложении поля напряжений у верши-

ны трещины, поскольку критерии разрушения, основанные на применении только одного параметра разрушения — коэффициента интенсивности напряжений, имеют существенные ограничения [10; 13; 14; 17–20]. В статье с помощью двух критериев вычислены углы распространения трещины в полном диапазоне смешанных форм деформирования. Показано, что однопараметрический критерий разрушения, основанный на удержании только одного слагаемого в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений в окрестности вершины трещины, приводит к углам распространения трещины, значительно отличающимся от значений углов распространения трещины, к которым приводит многопараметрический критерий с удержанием высших слагаемых в асимптотических разложениях поля напряжений.

Одним из наиболее известных критериев распространения трещины является критерий максимального тангенциального напряжения [10]. Согласно этому критерию трещина растет в направлении, в котором тангенциальное напряжение достигает максимума на некотором расстоянии от кончика дефекта. Таким образом, для вычисления максимума тангенциального напряжения должно быть введено некоторое критическое расстояние от кончика трещины. Немедленно возникает вопрос, из каких соображений выбрать критическое расстояние от кончика трещины? В этом отношении физически обоснованной представляется идея Ши [11], согласно которой решения механики сплошных сред перестают работать на некотором расстоянии от кончика трещины, ибо концепция сплошной среды на этом расстоянии нарушается. Критическое расстояние служит некоторым масштабным фактором, при котором работает концепция сплошности. Ши ввел в рассмотрение "ядро, окружающее вершину трещины", и плотность энергии упругой деформации, умноженной на это критическое расстояние от кончика трещины (радиус ядра). Однопараметрический критерий распространения трещины не учитывает критическое расстояние от кончика трещины, тогда как многопараметрические критерии разрушения требуют задания расстояния от кончика трещины, на котором оценивается тангенциальное напряжение или плотность энергии упругой деформации.

В настоящее время вопросам смешанного нагружения тел с разрезами и угловыми вырезами посвящается большое количество теоретических, вычислительных и экспериментальных работ [13; 14; 16; 17]. Экспериментальное определение параметров механики разрушения на основе асимптотического представления поля напряжений у вершины трещины сейчас привлекает внимание многих научных школ [14–17]. Экспериментальные исследования, нацеленные на построение многочленных асимптотических разложений поля напряжений у вершины трещины и нахождение коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса, проведены и обсуждаются в целом ряде работ [14–21]. Особенное внимание исследователей привлекает использование современного испытательного оборудования (трехмерные цифровые оптические системы) [22–24], применение новых методов (регистрация полей перемещений и деформаций методом корреляции цифровых изображений) [24–27], предложение и испытание новых образцов (образцов с новой геометрией, наиболее подходящих для изучения задач смешанного нагружения) [14; 21]. Например, в [14] рассмотрен образец на четырехточечный изгиб с несимметричным расположением надреза (всего изучена сорок одна конфигурация образца с различными расстояниями надреза от середины полосы). Данная геометрия образца особенно удобна для исследования смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм нагружения, однако в работе вид приложенной нагрузки и геометрия образца не связываются с определенным значением параметра смешанности нагружения, поэтому требуются дополнительные расчеты, связывающие параметры модели и вид нагружения. В [21] предложен образец новой формы: полукруговой диск с надрезом для испытания на сжатие. В работе подробно исследовано влияние геометрии образца (отношения глубины надреза к радиусу полудиска) на коэффициент интенсивности напряжений. Анализ включает экспериментальное определение коэффициента интенсивности напряжений методом фотоупругости и конечно-элементное решение задачи. Авторы работы [21] показывают, что для образцов данной конфигурации значения функции формы образца остаются постоянными величинами, не зависящими от отношения глубины надреза к радиусу полудиска, что является весомым преимуществом при обработке экспериментальной информации. Поэтому в настоящей работе рассматривается, с одной стороны, классический образец: пластина с двумя коллинеарными трещинами различной длины, для которой имеется аналитическое решение, полученное с помощью теории функции комплексного переменного [1], с другой стороны, пластина с двумя трещинами представляет собой новый образец для построения многопараметрических асимптотических разложений поля напряжений у вершины трещины и оценки направления роста трещины на основе многопараметрического асимптотического разложения компонент тензора напряжений. Имеющееся аналитическое решение задачи позволит сделать следующее: 1) проанализировать вклад высших слагаемых асимптотического разложения в общее представление поля напряжений у вершины трещины; 2) апробировать многопараметрические критерии разрушения (критерии максимального тангенциального напряжений и критерий минимума плотности энергии упругой деформации); 3) дать существенную информацию для экспериментального изучения полей перемещений, деформаций и напряжений у вершины трещины с помощью различных экспериментальных техник от традиционных (цифровая фотоупругость, голография и спекл-

интерферометрия) до новейших (метод корреляции цифровых изображений) и для цифровой обработки всей совокупности получаемой экспериментальной информации.

1. Методы теории функции комплексного переменного. Формулы Колосова – Мусхелишвили

Методы теории функции комплексного переменного дают удобный подход для решения многих двумерных задач теории упругости [1]. В рамках данного подхода вводится в рассмотрение функция напряжений Эри $\Phi(x_1, x_2)$, с помощью которой компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \Phi_{,22}, \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = \Phi_{,11}, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = -\Phi_{,12}. \quad (1)$$

Функция напряжений Эри для линейно-упругого изотропного материала подчиняется бигармоническому уравнению, решение которого, следуя формализму Колосова – Мусхелишвили, можно представить через аналитические функции комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ – комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\Phi(x_1, x_2) = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad (2)$$

где Re обозначает действительную часть функции и черта сверху обозначает комплексно сопряженную функцию: $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Комбинация соотношений (1) и (2) приводит к классическим представлениям поля напряжений через комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(z) + \sigma_{22}(z) &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)], \\ \sigma_{22}(z) - \sigma_{11}(z) + 2i\sigma_{12}(z) &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi'(z)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты напряжений должны удовлетворять следующим краевым условиям в бесконечно удаленной точке: для трещины нормального отрыва (рис. 1):

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] = [\alpha, 0, 1] \sigma_{22}^{\infty}, \quad (4)$$

для трещины поперечного сдвига

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] = [0, 1, 0] \sigma_{12}^{\infty}. \quad (5)$$

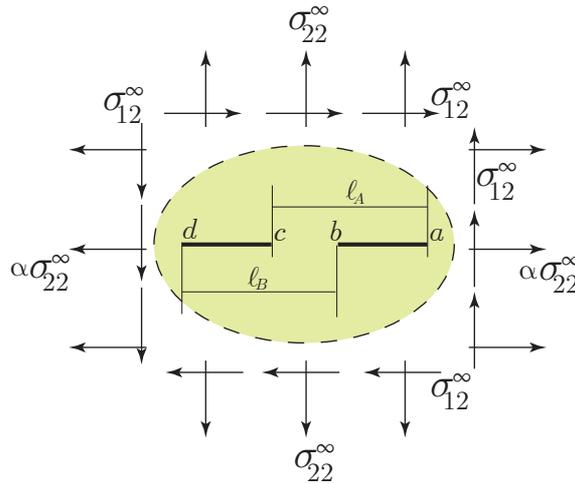


Рис. 1. Геометрия пластины с двумя коллинеарными трещинами: нормальный отрыв и поперечный сдвиг

1.1. Двухосное нагружение пластины с двумя коллинеарными трещинами различной длины (трещины типа I)

В случае симметричного нагружения касательное напряжение $\sigma_{12}(z)$ обращается в нуль всюду на линии $x_2 = 0$, следовательно, можно свести задачу к отысканию одной аналитической функции $\varphi'(z) = \varphi_1'(z)$ такой, что

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] + C_1, \\ \sigma_{22}^1(z) &= 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] - C_1, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -2x_2\operatorname{Re}[\varphi_1''(z)] + C_1, \quad C_1 = (\alpha - 1)\sigma_{22}^{\infty}/2. \end{aligned} \quad (6)$$

Следуя классическому формализму Колосова – Мухелишвили [1], можно найти комплексный потенциал $\varphi'_1(z)$:

$$\varphi'_1(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad c_0 = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2}. \quad (7)$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются согласно равенствам $c_1 = \Delta_1/\Delta$, $c_2 = \Delta_2/\Delta$, следующим из условий однозначности смещений,

$$\text{где } \Delta = I_2 J_3 - J_2 I_3, \quad \Delta_1 = c_0 I_3 (J_1 - I_1), \quad \Delta_2 = c_0 (I_1 J_2 - I_2 J_1), \quad (8)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a(c-b) + c(b+c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} K(k_1) + \frac{(a-c)(b-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} E(k_1) + \\ &+ \frac{a(b-c) + b(b+d) - c(c+d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \Pi(k_3, k_1), \\ J_1 &= \frac{a(a+d) + c(a-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} K(k_1) + \frac{(a-c)(b-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} E(k_1) - \\ &- \frac{[a(a+b) + c(a-d) - d(b+d)]}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \Pi(k_3, k_1), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2c}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} K(k_1) + \frac{2(b-c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \Pi(k_2, k_1), \\ J_2 &= \frac{2a}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} K(k_1) + \frac{2(d-a)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \Pi(k_3, k_1), \\ I_3 &= J_3 = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} K(k_1), \end{aligned} \quad (10)$$

где $k_1 = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$, $k_2 = \frac{a-b}{a-c}$, $k_3 = \frac{d-c}{a-c}$, $K(k_1) = F(k_1, \pi/2)$, $E(k_1) = E(k_1, \pi/2)$ – полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода (канонические эллиптические интегралы Лежандра) соответственно, $\Pi(k_3, k_1)$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра третьего рода:

$$\begin{aligned} K(k_1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 x}} = F(\pi/2, k_1), \quad E(k_1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 x} dx = E(\pi/2, k_1), \\ \Pi(\omega^2, k_1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-\omega^2 \sin^2 x) \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 x}} = \Pi(\pi/2, \omega^2, k_1). \end{aligned}$$

Выделяя действительную и мнимую части комплексного потенциала $\varphi'_1(z)$ в (6) и (7), можно получить аналитические выражения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{11}^1(x_1, x_2) = 3F_1 - 2x_2 F_4, \quad \sigma_{22}^1(x_1, x_2) = -F_1 + 2x_2 F_4, \quad \sigma_{12}^1(x_1, x_2) = -2x_2 F_3, \quad (11)$$

где приняты обозначения

$$F_1 = \frac{u_1 W_1 + u_2 W_2}{W_1^2 + W_2^2} + \frac{\alpha - 1}{4} \sigma_{22}^\infty, \quad F_2 = \frac{u_2 W_1 - u_1 W_2}{W_1^2 + W_2^2}, \quad (12)$$

F_1, F_2 – действительная и мнимая части комплексного потенциала $\varphi'_1(z)$;

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{u_3 W_1 + u_4 W_2}{W_1^2 + W_2^2} - \frac{1}{2(P_2^2 + Q_2^2)} [(u_1 P_2 + u_2 Q_2)A - (u_2 P_2 - u_1 Q_2)B], \\ F_4 &= \frac{u_4 W_1 - u_3 W_2}{W_1^2 + W_2^2} - \frac{1}{2(P_2^2 + Q_2^2)} [(u_1 P_2 + u_2 Q_2)B + (u_2 P_2 - u_1 Q_2)A], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= (X_1 X_2 - Y_1 Y_2)(X_3 X_4 - Y_3 Y_4) - (Y_1 X_2 + X_1 Y_2)(Y_3 X_4 + X_3 Y_4), \\ W_2 &= (X_1 X_2 - Y_1 Y_2)(Y_3 X_4 + X_3 Y_4) + (Y_1 X_2 + X_1 Y_2)(X_3 X_4 - Y_3 Y_4), \end{aligned}$$

$$Y_j = \sqrt{-(x_1 - x_j^0) + \sqrt{(x_1 - x_j^0)^2 + x_2^2/\sqrt{2}}}, \quad X_j = x_2/(2Y_j), \quad j = \overline{0, 4},$$

где $x_1^0 = a$, $x_2^0 = b$, $x_3^0 = c$, $x_4^0 = d$, $P_1 = W_1^3 - 3W_2^2$, $Q_1 = 3W_1^2W_2 - W_2^3$,

$$u_1 = c_0(x_1^2 - x_2^2) + c_1x_1 + c_2, \quad u_2 = 2c_0x_1x_2 + c_1x_2, \quad u_3 = 2c_0x_1 + c_1, \quad u_4 = 2c_0x_2,$$

$$\begin{aligned} A &= [(x_1 - b)(x_1 - d) - x_2^2] (2x_1 - a - c) - 2x_2^2(2x_1 - b - d) + \\ &\quad + [(x_1 - a)(x_1 - c) - x_2^2] (2x_1 - b - d) - 2x_2^2(2x_1 - a - c), \\ B &= 2x_2 [(x_1 - b)(x_1 - d) - x_2^2] + 2x_2 [(x_1 - a)(x_1 - c) - x_2^2] + \\ &\quad + 2x_2(2x_1 - b - d)(2x_1 - a - c). \end{aligned}$$

Комплексный потенциал Колосова – Мухелишвили $\varphi_2'(z)$ для бесконечной линейно-упругой изотропной пластины с двумя коллинеарными трещинами различной длины в условиях поперечного сдвига имеет вид

$$\varphi_2'(z) = -i \frac{c_0z^2 + c_1z + c_2}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}. \quad (14)$$

Выделяя вещественную и мнимую части комплексного потенциала $\varphi_2'(z)$, можно представить компоненты тензора напряжений в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2 &= 4Re[\varphi_2'(z)] - 2x_2Im[\varphi_2''(z)], \\ \sigma_{22}^2 &= 2x_2Im[\varphi_2''(z)], \\ \sigma_{12}^2 &= -2Im[\varphi_2'(z)] - 2x_2Re[\varphi_2''(z)] + \sigma_{12}^\infty, \end{aligned}$$

или в окончательной форме

$$\sigma_{11}^2(x_1, x_2) = 2F_2 - 2x_2V_4, \quad \sigma_{22}^2(x_1, x_2) = 2x_2V_4, \quad \sigma_{12}^2(x_1, x_2) = -2V_2 - 2x_2F_4 - \sigma_{12}^\infty, \quad (15)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} V_2 &= -\frac{u_1W_1 + u_2W_2}{W_1^2 + W_2^2} + \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \quad V_4 = -\frac{u_3W_1 + u_4W_2}{W_1^2 + W_2^2} + \frac{1}{2} \frac{P_1P_2 + Q_1Q_2}{P_2^2 + Q_2^2}, \\ P_2 &= W_1^3 - 3W_1W_2^2, \quad Q_2 = 3W_1^2W_2 - W_2^3. \end{aligned} \quad (16)$$

В литературе [31; 32] хорошо известны выражения для коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещин $z = b$ и $z = c$:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \end{array} \right\}_{z=c} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{22}^\infty \\ \sigma_{12}^\infty \end{array} \right\} \sqrt{\pi b} \frac{1}{1 - \alpha_A} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_B} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\}, \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \end{array} \right\}_{z=b} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{22}^\infty \\ \sigma_{12}^\infty \end{array} \right\} \sqrt{\pi a} \frac{1}{1 - \alpha_B} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_A} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\}, \quad (18)$$

где $\alpha_A = 2a/l_A$, $\alpha_B = 2b/l_B$, $k = \sqrt{\alpha_A\alpha_B}$ (рис. 1). Целью настоящей статьи является определение всех масштабных (амплитудных) коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса (помимо коэффициентов интенсивности напряжений) и анализ вклада высших приближений в общее представление полей напряжений и перемещений в окрестности вершин трещины.

1.2. Асимптотическое представление компонент тензора напряжений у вершины $z = a$. Идентификация коэффициентов асимптотического разложения

Выше описано точное решение задачи о плоскости, ослабленной двумя коллинеарными трещинами различной длины, в терминах комплексного переменного z . С другой стороны, асимптотическое представление М. Уильямса [2] описывает поле напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в виде асимптотического ряда по степеням расстояния от кончика трещины r :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{m,ij}^{(k)}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (19)$$

где $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые в ходе решения краевой задачи; r – расстояние от вершины трещины; θ – полярный угол; a_k^m – масштабные (амплитудные) коэффициенты, зависящие от геометрии образца с трещиной и приложенной нагрузки; постоянная m

определяет тип нагружения и принимает значение 1 для нагружения, отвечающего нормальному отрыву, значение 2 – поперечному сдвигу (рис. 1). Угловые распределения компонент тензора напряжений $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$, фигурирующие в (19), хорошо известны [3]

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= k \left[(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= k \left[(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= k \left[-(k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -k \left[(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -k \left[(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= k \left[-(k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2. \end{aligned} \quad (20)$$

В первой части работы отмечалось, что в практических инженерных приложениях в (19), как правило, удерживается первое слагаемое ($k = 1$) и первый амплитудный коэффициент получил название коэффициента интенсивности напряжений $K_I = \sqrt{2\pi}a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0)$, $K_{II} = \sqrt{2\pi}a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0)$. Высшими приближениями в асимптотическом разложении М. Уильямса обычно пренебрегают, тогда как в целом ряде работ показано [3; 13; 14; 16; 28], что высшие приближения ($k > 1$) во многих случаях могут оказывать существенное влияние при описании напряженно-деформированного состояния у вершины трещины.

Разложение точного аналитического решения задачи, полученного посредством теории функции комплексного переменного, позволяет определить все коэффициенты асимптотического решения М. Уильямса (19). С целью определения масштабных множителей – коэффициентов асимптотического разложения Уильямса (19) – разложим комплексный потенциал Колосова – Мухелишвили (7) в ряд в окрестности вершины $z(r, \theta) = a + re^{i\theta}$. Полагая в (7) $z = a + re^{i\theta}$ и раскладывая комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ в ряд по степеням r , можно получить следующее асимптотическое разложение комплексного потенциала $\varphi_1'(z)$

$$\varphi_1'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j (z - a)^{j-1/2} + \frac{\alpha - 1}{4} \sigma_{22}^{\infty}, \quad (21)$$

где коэффициенты асимптотического разложения t_j вычисляются как

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{j=0}^m p_{m-j} s_j, \quad p_m = \sum_{l=0}^m a_{m-l} b_l, \quad s_k = \sum_{i=0}^k d_{k-i} e_i, \\ a_k &= (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-b)^{-(2k+1)/2}, \quad b_k = (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-c)^{-(2k+1)/2}, \\ d_k &= (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-d)^{-(2k+1)/2}, \quad e_0 = c_0 a^2 + c_1 a + c_2, \quad e_1 = 2c_0 a + c_1, \\ e_2 &= c_0, \quad e_k = 0 \quad \forall k > 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая асимптотическое представление М. Уильямса (19) и представление, полученное на основе выражений (6) и (22), можно найти все коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса:

$$a_{2k+1}^1 = \frac{2t_k}{f_{1,22}^{(2k+1)}(\theta=0)}, \quad a_2^1 = \frac{(\alpha-1)\sigma_{22}^{\infty}}{4}, \quad a_{2k}^1 = 0 \quad \forall k > 1. \quad (23)$$

Таким образом, точное аналитическое решение задачи позволяет найти функциональную зависимость коэффициентов асимптотического разложения a_k^1 от геометрических параметров задачи и приложенной нагрузки. Первые одиннадцать коэффициентов a_k^1 ($a_{2k}^1 = 0 \forall k > 1$) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \frac{2e}{\sqrt{(a-b)(a-c)(a-d)}}, \quad e = c_0 a^2 + c_1 a + c_2, \\ a_3^1 &= -\frac{(2a-c-d)e}{3\sqrt{a-b}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} + \frac{3c_0 a^2 - 4c_0 ab + c_1 a - 2c_1 b - c_2}{3(a-b)^{3/2}\sqrt{(a-c)(a-d)}}, \\ a_5^1 &= \frac{e(8a^2 - 8ac + 3c^2 - 8ad + 2cd + 3d^2)}{20\sqrt{a-b}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} - \\ &\quad - \frac{(3c_0 a^2 - 4c_0 ab + c_1 a - 2c_1 b - c_2)(2a-c-d)}{10(a-b)^{3/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} + \\ &\quad + \frac{3c_0 a^2 - 8c_0 ab + 8c_0 b^2 - c_1 a + 4c_1 b + 3c_2}{20(a-b)^{5/2}\sqrt{(a-c)(a-d)}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
a_7^1 = & \frac{-e(16a^3 - 24a^2c + 18ac^2 - 5c^3 - 24a^2d + 12acd - 3c^2d + 18ad^2 - 3cd^2 - 5d^3)}{56\sqrt{a-b}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(8a^2 - 8ac + 3c^2 - 8ad + 2cd + 3d^2)}{56(a-b)^{3/2}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 8c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 4c_1b + 3c_2)(2a - c - d)}{56(a-b)^{5/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} - \\
& - \frac{c_0a^2 - 4c_0ab + 8c_0b^2 - c_1b^2 - c_1a + 6c_1b + 5c_2}{56(a-b)^{7/2}\sqrt{(a-c)(a-d)}},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
a_9^1 = & \frac{(192a^2cd - 96ac^2d - 96acd^2 + 128a^4 + 35c^4 + 35d^4 + 288a^2c^2 - 256a^3c)e}{576\sqrt{a-b}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \\
& + \frac{(-256a^3d + 20c^3d + 288a^2d^2 + 18c^2d^2 - 160ad^3 + 20cd^3 - 160ac^3)e}{576\sqrt{a-b}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(16a^3 - 24a^2c + 18ac^2 - 5c^3 - 24a^2d)}{144(a-b)^{3/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 8c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 4c_1b + 3c_2)(8a^2 - 8ac + 3c^2 - 8ad + 2cd + 3d^2)}{288(a-b)^{5/2}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(12acd - 3c^2d)}{144(a-b)^{3/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} + \\
& + \frac{(c_0a^2 - 4c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 6c_1b + 5c_2)(2a - c - d)}{144(a-b)^{7/2}} + \\
& + \frac{3c_0a^2 - 16c_0ab + 48c_0b^2 - 5c_1a + 40c_1b + 35c_2}{576(a-b)^{9/2}\sqrt{(a-c)(a-d)}},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}^1 = & \frac{-e(200acd^3 - 30c^3d^2 + 200ac^3d - 480a^2c^2d + 640a^3cd - 480a^2cd^2 - 30c^2d^3)}{1408\sqrt{a-b}(a-c)^{11/2}(a-d)^{11/2}} - \\
& - \frac{e(180ac^2d^2 - 640a^4c + 960a^3c^2 - 800a^2c^3 + 350ac^4 + 256a^5 - 35cd^4)}{1408\sqrt{a-b}(a-c)^{11/2}(a-d)^{11/2}} - \\
& - \frac{e(960a^3c^2 - 63c^5 - 63d^5 - 640a^4d - 35c^4d - 800a^2c^3 + 350ad^4)}{1408\sqrt{a-b}(a-c)^{11/2}(a-d)^{11/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^5 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(192a^2cd - 96ac^2d - 96acd^2)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^5 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(128a^4 + 35c^4 + 35d^4 - 256a^3c)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^5 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(288a^2c^2 - 160ac^3 - 256a^3d + 20c^3d)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^5 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(288a^2d^2 + 18c^2d^2 - 160ad^2 + 20cd^3)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} - \\
& - \frac{(3c_0a^2 - 8c_0b(a-b) - c_1(a-4b) + 3c_2)(16a^3 - 24a^2c + 18ac^2 - 5c^3 - 24a^2d)}{704(a-b)^{5/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} - \\
& - \frac{(3c_0a^2 - 8c_0b(a-b) - c_1(a-4b) + 3c_2)(18ad^2 - 3c^2d - 3cd^2 - 5d^3 + 12acd)}{704(a-b)^{5/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} - \\
& - \frac{(c_0a^2 - 4c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 6c_1b + 5c_2)(8a^2 - 8ac + 3c^2 - 8ad + 2cd + 3d^2)}{704(a-b)^{7/2}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} - \\
& - \frac{(3c_0a^2 - 16c_0ab + 48c_0b^2 - 5c_1a + 40c_1b + 35c_2)(2a - c - d)}{1408(a-b)^{9/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} - \\
& - \frac{3c_0a^2 - 20c_0ab + 80c_0b^2 - 7c_1a + 70c_1b + 63c_2}{1408(a-b)^{11/2}\sqrt{(a-c)(a-d)}}.
\end{aligned}$$

Следующие коэффициенты здесь не приводятся в силу их громоздкости: они могут быть вычислены с помощью формул (22) и (23). Полагая в (14) $z = a + re^{i\theta}$ и раскладывая комплексный потенциал $\varphi_2'(z)$ в ряд по степеням r , можно получить следующее асимптотическое разложение комплексного потенциала $\varphi_2'(z)$:

$$\varphi_2'(z) = -i \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j (z - a)^{j-1/2} + i \frac{\sigma_{12}^{\infty}}{2}, \tag{27}$$

где коэффициенты асимптотического разложения вычисляются как

$$\begin{aligned} \eta_m &= \sum_{j=0}^m p_{m-j} \zeta_j, & \zeta_k &= \sum_{i=0}^k d_{k-i} \xi_i, \\ \xi_0 &= c_0 a^2 + c_1 a + c_2, & \xi_1 &= 2c_0 a + c_1, & \xi_2 &= c_0, & \xi_k &= 0 \quad \forall k > 2, \end{aligned} \quad (28)$$

где коэффициенты c_1 и c_2 определяются по формулам (8) и $c_0 = \sigma_{12}^\infty/2$. Используя асимптотическое разложение в ряд комплексного потенциала $\varphi_2'(z)$ в окрестности вершины $z = a$, можно получить последовательность коэффициентов асимптотического ряда

$$a_{2k+1}^2 = \frac{\eta_k}{f_{2,12}^{(k+1)}(\theta = 0)}, \quad a_{2k}^2 = 0, \quad \forall k > 0. \quad (29)$$

В развернутой форме первые одиннадцать коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{-e}{\sqrt{(a-b)(a-c)(a-d)}}, \\ a_3^2 &= \frac{e(2a-c-d)}{3\sqrt{a-b}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} - \frac{3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2}{3\sqrt{a-b}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}}, \\ a_5^2 &= -\frac{e(8a^2 - 8ac + 3c^2 - 8ad + 2cd + 3d^2)}{20\sqrt{a-b}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} + \\ &+ \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(2a - c - d)}{10(a-b)^{3/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}}, \\ a_7^2 &= \frac{e(16a^3 - 24a^2c + 18ac^2 - 5c^3 - 24a^2d + 12acd - 3c^2d - 3cd^2)}{56\sqrt{a-b}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} - \\ &- \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(8a^2 - 8ac + 3c^2 - 8ad + 2cd + 3d^2)}{56(a-b)^{3/2}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} - \\ &- \frac{(3c_0a^2 - 8c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 4c_1b + 3c_2)(2a - c - d)}{56(a-b)^{5/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} - \\ &- \frac{c_0a^2 - 4c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 6c_1a + 6c_1b + 5c_2}{56(a-b)^{7/2}(a-c)^{1/2}(a-d)^{1/2}} + \\ &+ \frac{e(18ad^2 - 5d^3)}{56\sqrt{a-b}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}}, \\ a_9^2 &= \frac{e(160ad^3 - 192a^2cd + 96ac^2d + 96acd^2 - 128a^4 - 35c^4 - 35d^4 + 256a^3c)}{576(a-b)^{1/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} - \\ &- \frac{e(288a^2c^2 - 160ac^3 - 256a^3d + 20c^3d + 288a^2d^2 + 18c^2d^2 + 20cd^3)}{576(a-b)^{1/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \\ &+ \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(16a^3 - 24a^2c + 18ac^2 - 5c^3 - 24a^2d)}{144(a-b)^{3/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} + \\ &+ \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(18ad^2 - 3c^2d - 3cd^2 - 5d^3 + 12acd)}{144(a-b)^{3/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} - \\ &- \frac{(3c_0a^2 - 8c_0b(a-b) - c_1(a-4b) + 3c_2)(8a(a-c-d) + c(3c+2d) + 3d^2)}{288(a-b)^{5/2}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} - \\ &- \frac{(c_0a^2 - 4c_0ab + 8c_0b^2 - c_1a + 6c_1b + 5c_2)(2a - c - d)}{144(a-b)^{7/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} - \\ &- \frac{3c_0a^2 - 16c_0ab + 48c_0b^2 - 5c_1a + 40c_1b + 35c_2}{576(a-b)^{9/2}(a-c)^{1/2}(a-d)^{1/2}}, \\ a_{11}^2 &= \frac{e(200ac(d^2 + c^2) - 480a^2c^2d + 640a^3cd - 480a^2cd^2 + 180ac^2d^2 - 640a^4c)}{1408(a-b)^{1/2}(a-c)^{11/2}(a-d)^{11/2}} + \\ &+ \frac{e(960a^3c^2 - 800a^2c^3 + 350ac^4 + 256a^5 - 63(c^5 + d^5) - 640a^4d - 35c^4d)}{1408(a-b)^{1/2}(a-c)^{11/2}(a-d)^{11/2}} + \\ &+ \frac{e(350ad^4 - 30c^3d^2 - 800a^2d^3 - 30c^2d^3 - 35cd^4 + 960a^3d^2)}{1408(a-b)^{1/2}(a-c)^{11/2}(a-d)^{11/2}} - \\ &- \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(192a^2cd - 96ac^2d - 96acd^2 + 128a^4 + 35c^4)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} - \\ &- \frac{(3c_0a^2 - 4c_0ab + c_1a - 2c_1b - c_2)(20c^3d - 160ac^3 - 256a^3d + 288a^2d^2 + 35d^4)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} - \\ &- \frac{(c_0a(3a-4b) + c_1(a-2b) - c_2)2(144a^2c^2 + 9c^2d^2 - 80ad^3 + 10cd^3 - 128a^3c)}{1408(a-b)^{3/2}(a-c)^{9/2}(a-d)^{9/2}} + \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(3c_0a^2 - 8c_0b(a-b) - c_1(a-4b) + 3c_2)(16a^3 - 24a^2c + 18ac^2 - 5c^3 - 24a^2d)}{704(a-b)^{5/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 8c_0b(a-b) - c_1(a-4b) + 3c_2)(12ac - 3c^2 + 18ad - 3cd - 5d^2)d}{704(a-b)^{5/2}(a-c)^{7/2}(a-d)^{7/2}} + \\
& + \frac{(c_0(a^2 - 4ab + 8b^2) - c_1(a-6b) + 5c_2)(8a(a-c-d) + 3(c^2 + d^2) - 8ad + 2cd)}{704(a-b)^{7/2}(a-c)^{5/2}(a-d)^{5/2}} + \\
& + \frac{(3c_0a^2 - 16c_0ab + 48c_0b^2 - 5c_1a + 40c_1b + 35c_2)(2a - c - d)}{1408(a-b)^{9/2}(a-c)^{3/2}(a-d)^{3/2}} + \\
& + \frac{3c_0a^2 - 20c_0ab + 80c_0b^2 - 7c_1a + 70c_1b + 63c_2}{1408(a-b)^{11/2}(a-c)^{1/2}(a-d)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

С помощью полученных выражений для коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса можно построить линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений и сравнить их с результатами точного аналитического решения, основанного на формулах Колосова – Мухелишвили для оценки вклада высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса. На рис. 2 изображены линии равных значений интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = a$, построенные с помощью точного аналитического решения, базирующегося на теории функции комплексного переменного (показанного прерывистой линией – знаками "плюс"), и приближенного аналитического решения, базирующегося на многочленном разложении М. Уильямса (показанного сплошными линиями), в случае нормального растяжения плоскости с двумя коллинеарными трещинами. На рис. 2, а показано точное решение и одночленное асимптотическое разложение. Видно, что на рассматриваемых расстояниях от вершины трещины одночленное асимптотическое разложение плохо согласуется с точным решением: кривые совпадают только у самой вершины трещины. Увеличение числа удерживаемых в асимптотическом разложении слагаемых приводит к совпадающим кривым на расстояниях порядка $X_1 \sim 1$, где $X_1 = x_1/((c-d)/2)$ – безразмерное расстояние от вершины трещины (рис. 2, б). На рис. 2, в сплошные кривые получены с помощью многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, в котором удерживалось 100 слагаемых. Видно, что кривые, отвечающие точному и приближенному решениям, полностью совпадают. Таким образом, построение многочленных асимптотических разложений и сохранение высших слагаемых в разложении приводит к заметному расширению области действия асимптотики М. Уильямса.

На рис. 3 изображены линии равных значений интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = a$, построенные с помощью точного аналитического решения, основанного на методах теории функции комплексного переменного (показанного знаками "плюс"), и приближенного аналитического решения, базирующегося на многочленном разложении М. Уильямса (показанного сплошными линиями), в случае поперечного сдвига плоскости с двумя коллинеарными трещинами. Из рис. 3 видно, что и для трещины поперечного сдвига сохраняется сформулированный вывод: чем больше число удерживаемых слагаемых, тем больше область действия асимптотического решения. На рис. 4 изображены линии равных значений компоненты тензора напряжений σ_{11} у вершины трещины $z = a$, построенные с помощью точного аналитического решения, основанного на методах теории функции комплексного переменного (показанного знаками "плюс"), и приближенного аналитического решения, базирующегося на многочленном разложении М. Уильямса (показанного сплошными линиями), в случае поперечного сдвига плоскости с двумя коллинеарными трещинами. На рис. 4, а показано асимптотическое решение, в котором удерживается лишь лидирующее слагаемое. Из рис. 4 следует, что одночленное асимптотическое разложение хорошо работает на расстояниях порядка $X_1 \sim 0.25$, но при удалении от вершины трещины точное решение и асимптотическое решение в целом плохо согласуются друг с другом. Линии уровня, построенные с помощью пятичленного асимптотического разложения поля напряжений, показаны на рис. 4, б. Очевидно, что пятичленное асимптотическое разложение существенно лучше согласуется с точным решением задачи, тогда как на указанных на рис. 4, в расстояниях многопараметрическое асимптотическое разложение, в котором удерживается 50 слагаемых, полностью совпадает с точным решением.

На рис. 5 приведены линии уровня касательного напряжения σ_{12} у вершины трещины $z = a$ в случае поперечного сдвига. На рис. 5, а изображены линии уровня, построенные с помощью точного решения (показанного прерывистой кривой), и асимптотического решения (показанного сплошной кривой), в котором удерживается главный член асимптотического разложения. Усеченное асимптотическое разложение работает, но в самой непосредственной окрестности вершины трещины. Линии уровня компоненты тензора напряжений σ_{12} , построенные с помощью пятичленного асимптотического разложения, представлены на рис. 5, б. Из рис. 5 следует, что удержание пяти слагаемых приводит к почти полному совпадению асимптотического решения с точным решением. Использование многочленного асимптотического разложения, усеченного на 50-том слагаемом (рис. 5, в), на рассматриваемых расстояниях позволяет полностью "воспроизвести" точное решение. На рис. 6 приведены линии уровня нормального напряжения σ_{22}

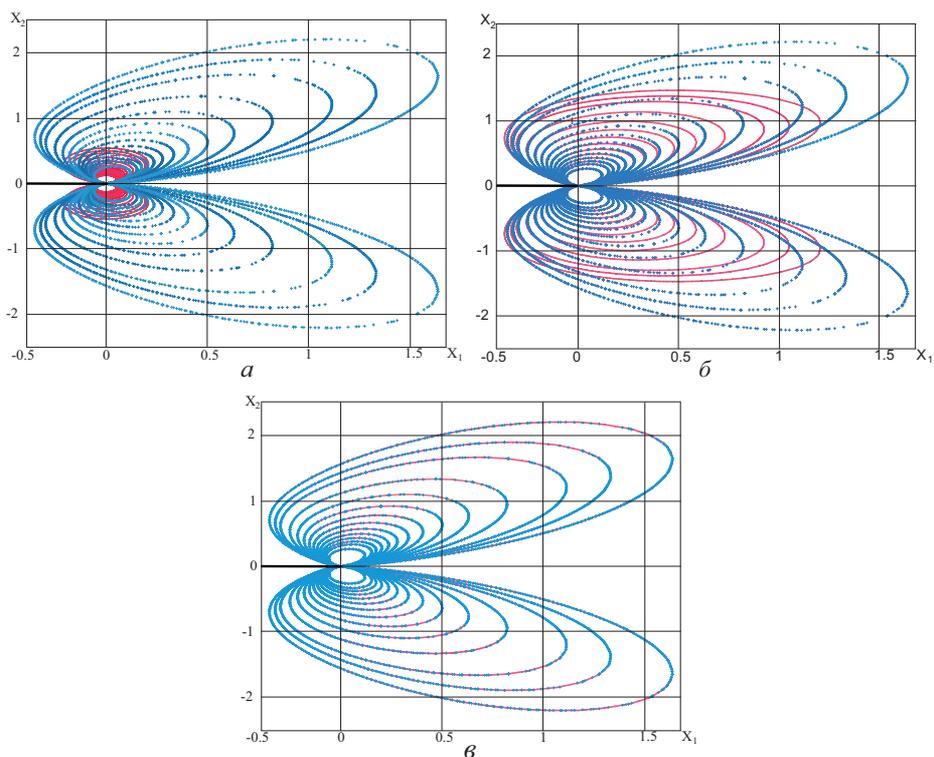


Рис. 2. Линии уровня интенсивности касательных напряжений у вершины трещины нормального отрыва: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее только одно слагаемое (сплошная кривая) (а); 2) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (сплошная кривая) (б); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 100 слагаемых (сплошная кривая) (в); (плоское деформированное состояние)

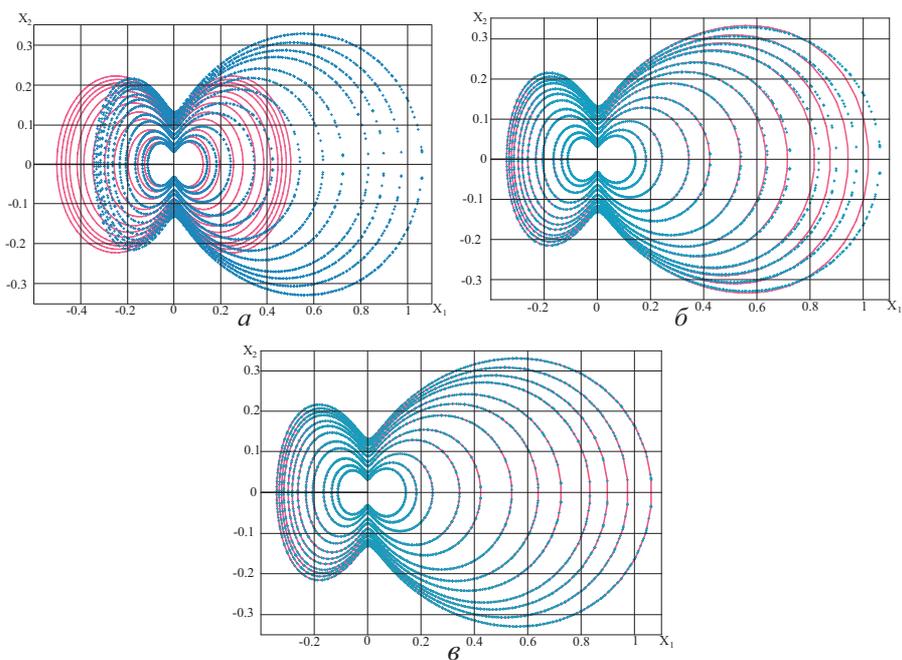


Рис. 3. Линии уровня интенсивности касательных напряжений у вершины трещины поперечного сдвига: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее только одно слагаемое (а); 2) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (б); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 50 слагаемых (сплошная кривая) (в); (плоское деформированное состояние)

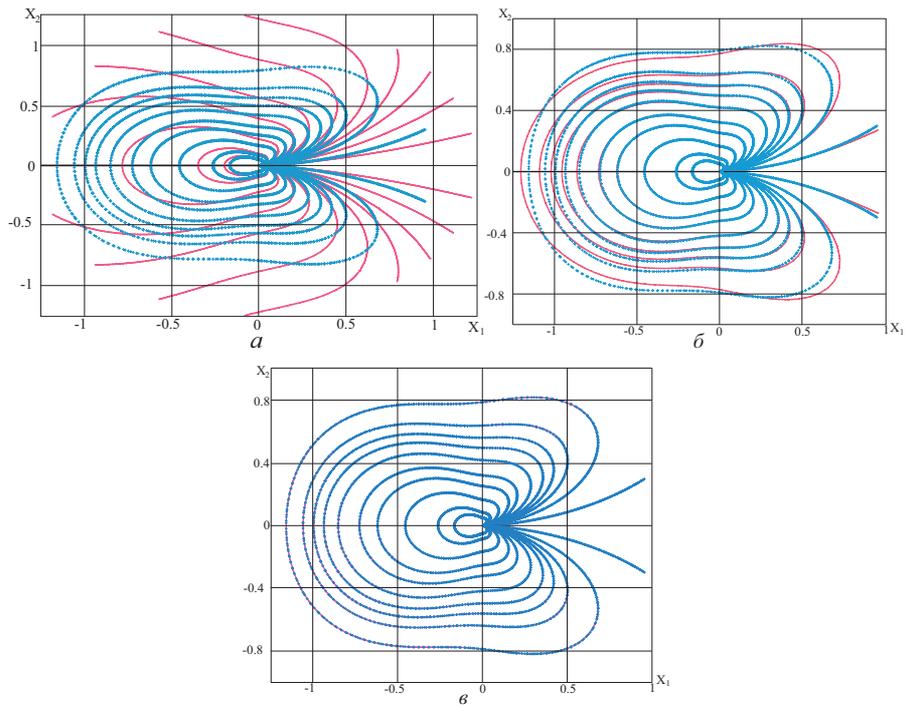


Рис. 4. Линии уровня компоненты тензора напряжений σ_{11} у вершины трещины поперечного сдвига: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее только одно слагаемое (сплошная кривая)(а); 2) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (сплошная кривая)(б); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 50 слагаемых (сплошная кривая)(в)

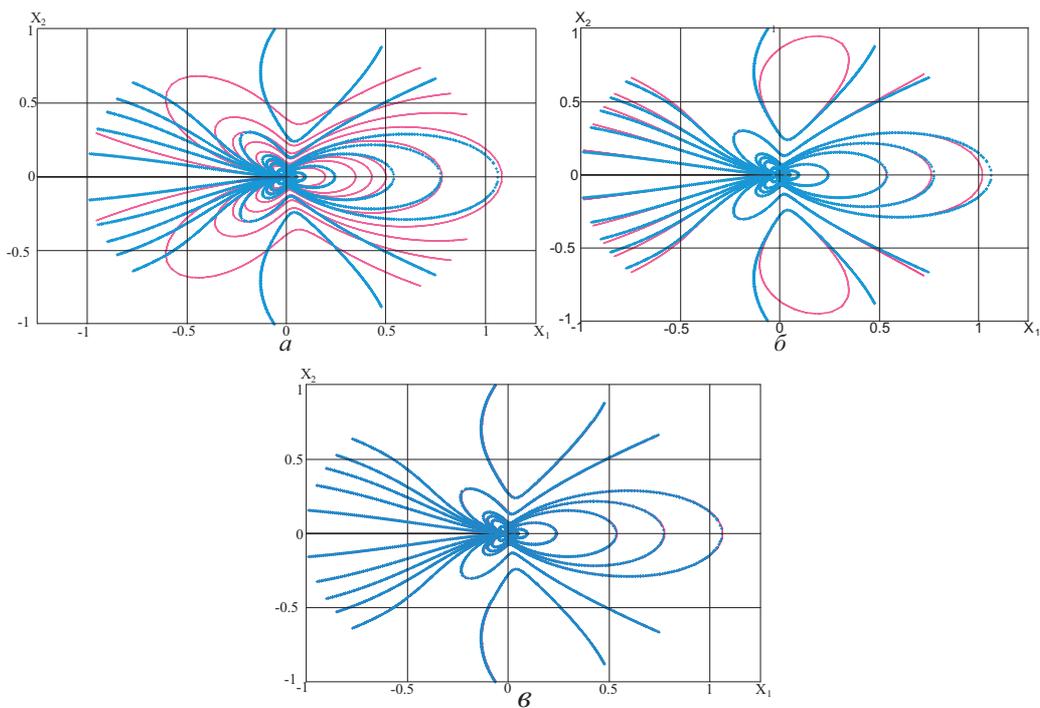


Рис. 5. Линии уровня компоненты тензора напряжений σ_{12} у вершины трещины поперечного сдвига: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее только одно слагаемое (сплошная кривая)(а); 2) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (сплошная кривая)(б); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 50 слагаемых (сплошная кривая)(в)

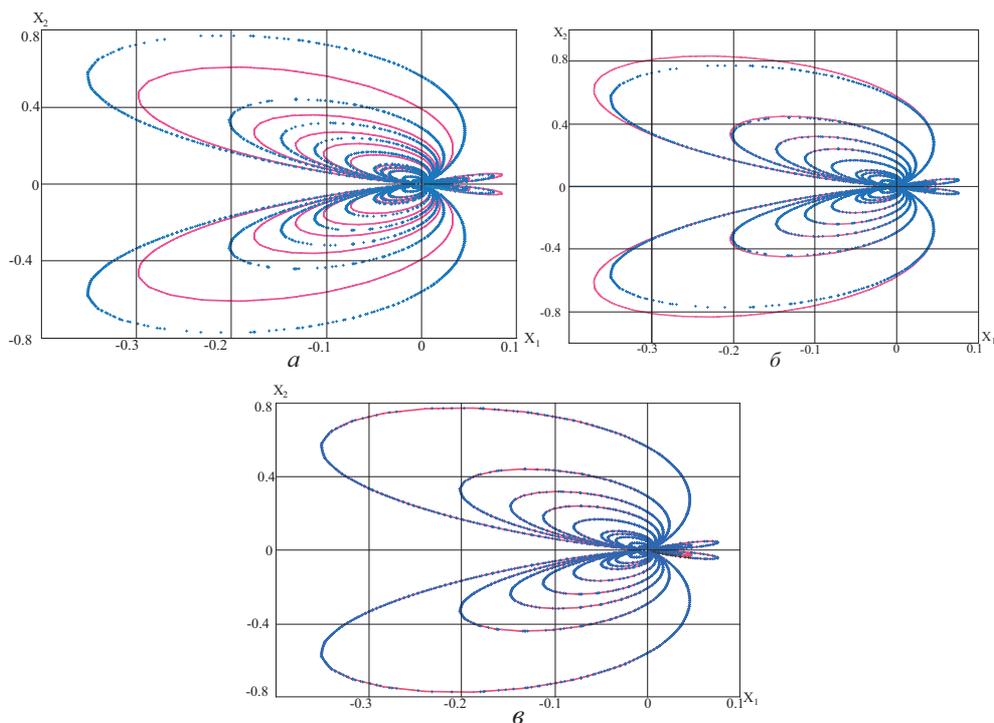


Рис. 6. Линии уровня компоненты тензора напряжений σ_{22} у вершины трещины поперечного сдвига: 1) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее только одно слагаемое (сплошная кривая)(а); 2) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное пятичленное асимптотическое разложение (сплошная кривая)(б); 3) точное решение (прерывистая кривая) и приближенное асимптотическое разложение, содержащее 50 слагаемых (сплошная кривая)(в)

вблизи вершины трещины $z = a$ в случае поперечного сдвига пластины с двумя коллинеарными трещинами различной длины. На рис. 6, а изображены линии уровня, построенные с помощью точного аналитического решения (показанного прерывистой кривой), и приближенного асимптотического решения (показанного сплошной линией), в котором удерживается только главный член асимптотического разложения М. Уильямса. Усеченное на главном члене асимптотическое разложение работает, но в самой непосредственной окрестности вершины трещины. Линии уровня компоненты тензора напряжений σ_{22} , построенные с помощью пятичленного асимптотического разложения, представлены на рис. 6 б. Из рис. 6, в следует, что удержание пяти слагаемых в асимптотическом разложении приводит к почти полному совпадению асимптотического решения с точным аналитическим решением. Использование многопараметрического асимптотического разложения, усеченного на 50-том слагаемом (рис. 5, а), на рассматриваемых расстояниях также позволяет полностью "воспроизвести" точное решение.

Следует отметить, что главный недостаток асимптотических методов заключается в том, что не всегда первое приближение обеспечивает нужную точность. Построение же высших приближений часто связано с трудоемкими вычислениями. Оценка точности асимптотических техник и области применимости получаемых асимптотических решений представляет собой весьма сложную задачу. Развитый в настоящем исследовании подход показал следующее: 1) с помощью компьютерного алгоритма, реализованного в системе символьных вычислений Maple, достаточно просто построить высшие приближения в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений у вершины трещины; 2) многочисленные тесты компьютерного алгоритма и сравнение результатов с имеющимся точным решением рассматриваемой задачи о нагружении пластины с двумя коллинеарными трещинами различной длины приводят к сходящимся к точному решению асимптотическим разложениям механических полей; 3) удержание высших приближений приводит к существенному расширению области действия асимптотики М. Уильямса.

Выводы и обсуждение результатов

В настоящей статье выполнен асимптотический анализ влияния высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в бесконечной линейно-упругой изотропной пластине, ослабленной двумя коллинеарными трещинами разной длины. По-

казано, что высшие приближения в асимптотическом разложении играют существенную роль при оценке поля напряжений при увеличении расстояния от кончика трещины: чем больше слагаемых удерживается в асимптотическом разложении, тем больше область действия асимптотики М. Уильямса. Полученное решение может быть полезно при обработке результатов экспериментов, нацеленных на определение параметров механики разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжений), поскольку только правильная интерпретация экспериментальных данных ведет к надежным и достоверным результатам [29; 30].

Проведенный асимптотический анализ может быть полезен для разработки теории и практики методов асимптотического анализа и синтеза в механике деформируемого твердого тела, в частности, для развивающихся в настоящее время эффективных методов суммирования асимптотических рядов, для построения аппроксимаций Паде механических полей у вершины трещины и использования преимуществ аппроксимаций Паде для построения физически содержательных асимптотик.

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку работы (проект 19-01-00631).

Литература

- [1] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=469235>.
- [2] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. P. 109–114. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf>.
- [3] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [4] Адылина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9(100). С. 70–83. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=101&option_lang=rus.
- [5] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 144–145. P. 265–275. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012).
- [6] On the stress singularity at crack tip in elasticity / F. Zhu [et al.] // Results in Physics. 2019. V. 13. 102210.
- [7] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem // Procedia Structural Integrity. 2018. V. 13. P. 1279–1284.
- [8] Moazzami M., Ayatollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique // Optic and Laser Technology. 2018. V. 107. P. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.
- [9] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. С. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919010053>.
- [10] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Materials Science and Engineering: R: Reports, 2014, Vol. 75, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>.
- [11] Sih G.C. A Special Theory of Crack Propagation: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems // Mechanics of Fracture. Noordhoff: International Publishing. Leiden, 1973. P. 21–45. URL: <http://bookre.org/reader?file=1279909>.
- [12] Stepanova L.V., Igonin S.A. Rabotnov damage parameter and description of delayed fracture: Results, current status, application to fracture mechanics, and prospects // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. V. 56. № 2. P. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894415020145>.
- [13] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 143. P. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [14] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // International Journal of Fatigue. 2016. Vol. 89. P. 99–107. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010).
- [15] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2009. Vol. 50. Issue 1. P. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9>.

- [16] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. № 100-101. P. 11–28. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032.
- [17] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 20–35. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016.
- [18] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. Vol. 55, № 5, pp. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186>.
- [19] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. V. 10. № 3. P. 367–393. DOI: 10.2140/jomms.2015.10.367.
- [20] Sobek J., Frantik P., Vesely V. Analysis of accuracy of Williams series approximation of stress field in cracked body – influence of area of interest around crack-tip on multi-parameter regression performance // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2017. V. 39. № 1. P.129–142. DOI <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14>.
- [21] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD) // *Engineering Fracture Mechanics*. 2013. V. 102. P. 235–248. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.02.014.
- [22] Akbardoost J., Rastin A. Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk-type specimens under mixed mode loading // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. V. 76. P. 75–90. DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.01.004.
- [23] Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика. I. Поле действующих напряжений / С.И. Елеонский [и др.] // *Ученые записки ЦАГИ*. 2015. Т. 46. № 7. С. 55–80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617>.
- [24] Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study / M. Mokhtarishirazabad [et al.] // *International Journal of Fatigue*. 2016. V. 89. P. 11–19. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.03.006>.
- [25] Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data // *Measurement Science and Technology*. 2016. V. 27. № 12. P. 125203. DOI: 10.1088/0957-0233/27/12/125203.
- [26] Ayatollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension // *Optic and Lasers in Engineering*. 2017. V. 90. P. 26–33. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.09.011.
- [27] Chernyatin A.S., Matvienko Yu.G., Lopez-Crespo P. Mathematical and numerical correction of the DIC displacements for determination of stress field along crack front // *Procedia Structural Integrity*. 2016. V. 2. P. 2650–2658. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.331.
- [28] Malikova L., Vesely V. Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2015. V. 33. P. 25–32. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.33.04.
- [29] Prataprao Patil, Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least square approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. 2017. V. 93. P. 182–194. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2017.02.003.
- [30] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 99. P. 104–117. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.011.
- [31] Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. *Handbook of Elasticity Solutions*. Dordrecht: Springer-Science+Business Media. 2003. 329 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3.
- [32] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The stress analysis of cracks handbook*. New York: ASME Press, 2000. 696 p. URL: <http://bookfi.net/book/1398445>.

References

- [1] Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. M.: Nauka, 1966, 708 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=469235> [in Russian].
- [2] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pp. 109–114. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf> [in English].

- [3] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, Issues 3–4, February 2012, pp. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024> [in English].
- [4] Adylina E.M., Stepanova L.V. *O postroenii mnogomasshtabnykh modelei neuprugogo razrusheniya* [On development of multiscale fracture models]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, no. 9(100), pp. 70–83. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=101&option_lang=rus [in Russian].
- [5] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, Vol. 144–145, pp. 265–275. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012) [in English].
- [6] F. Zhu [et al.]. On the stress singularity at crack tip in elasticity. *Results in Physics*, 2019, Vol. 13, 102210 [in English].
- [7] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem. *Procedia Structural Integrity*, 2018, Vol. 13, pp. 1279–1284 [in English].
- [8] Moazzami M., Ayatollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique. *Optic and Laser Technology*, Volume 107, November 2018, pp. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010> [in English].
- [9] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation. *Physical Mesomechanics*, January 2019, Volume 22, pp. 18–31. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919010053> [in English].
- [10] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, Vol. 75, January 2014, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001> [in English].
- [11] Sih G.C. A Special Theory of Crack Propagation: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. In: *Mechanics of Fracture*. Noordhoff: International Publishing, Leiden, 1973, pp. 21–45. Available at: <http://bookre.org/reader?file=1279909> [in English].
- [12] Stepanova L.V., Igonin S.A. Rabotnov damageparameter and description of delayed fracture: Results, current status, application to fracture mechanics, and prospects. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, March 2015, Volume 56, Issue 2, pp. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894415020145> [in English].
- [13] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 143, July 2015, pp. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029> [in English].
- [14] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, August 2016, Vol. 89, pp. 99–107. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010) [in English].
- [15] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, January 2009, Vol. 50, Issue 1, pp. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9> [in English].
- [16] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, September 2016, № 100–101, pp. 11–28. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032) [in English].
- [17] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. *International Journal of Fatigue*, February 2016, Vol. 89, pp. 20–35. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016) [in English].
- [18] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, September 2014, Volume 55, Issue 5, pp. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186> [in English].
- [19] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, August 2015, Vol. 10, № 3, pp. 367–393. DOI: [10.2140/jomms.2015.10.367](https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367) [in English].
- [20] Sobek J., Frantik P., Vesely V. Analysis of accuracy of Williams series approximation of stress field in cracked body - influence of area of interest around crack-tip on multi-parameter regression performance. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2017, Vol. 11, No. 39 (2017): January 2017, pp. 129–142. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14>.
- [21] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD). *Engineering Fracture Mechanics*, April 2013, Vol. 102, pp. 235–248. DOI: [10.1016/j.engfracmech.2013.02.014](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.02.014) [in English].

- [22] Akbaridoost J., Rastin A. Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk-type specimens under mixed mode loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, January 2015, Vol. 76, pp. 75–90. DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.01.004 [in English].
- [23] Eleonskii S.I., Odintsev I.N., Pisarev V.S., Chernov A.V. *Issledovanie protsessa rasprostraneniya treshchiny po dannym izmerenii lokal'nogo deformatsionnogo otklika. I. Pole deistvuyushchikh napryazhenii* [Investigation of the crack propagation process according to measurements of the local deformation response. I. Field of the acting stresses]. *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal], 2015, Vol. 46, № 7, pp. 55–80. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617> [in Russian].
- [24] Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study. M. Mokhtarishirazabad [et al.] *International Journal of Fatigue*, Volume 89, August 2016, pp. 11–19. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.03.006> [in English].
- [25] Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data. *Measurement Science and Technology*, December 2016, Vol. 27, Issue 12, p. 125203. DOI: 10.1088/0957-0233/27/12/125203 [in English].
- [26] Ayatollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension. *Optic and Lasers in Engineering*, March 2017, Vol. 90, pp. 26–33. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.09.011 [in English].
- [27] Chernyatin A.S., Matvienko Yu.G., Lopez-Crespo P. Mathematical and numerical correction of the DIC displacements for determination of stress field along crack front. *Procedia Structural Integrity*, 2016, Vol. 2, pp. 2650–2658. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.331 [in English].
- [28] Malikova L., Vesely V. Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2015, Vol. 33, pp. 25–32. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.33.04 [in English].
- [29] Prataprao Patil, Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least square approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, February 2017, Volume 93, pp. 182–194. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2017.02.003 [in English].
- [30] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, Vol. 99, pp. 104–117. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.011 [in English].
- [31] Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. Handbook of Elasticity Solutions. Dordrecht: Springer-Science+Business Media, 2003, 329 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3 [in English].
- [32] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. The stress analysis of cracks handbook. New York: ASME Press, 2000. 696 p. Available at: <http://bookfi.net/book/1398445>.