

УДК 539.4
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-57-62

Дата поступления статьи: 15/I/2019
Дата принятия статьи: 20/II/2019

Р.М. Жаббаров

ТЕОРЕТИЧЕСКИ РЕКОНСТРУИРОВАННОЕ ПОЛЕ ИЗОХРОМАТИЧЕСКИХ ПОЛОС У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ¹

© *Жаббаров Рамиль Муритович* — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: were-wolff@yandex.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

АННОТАЦИЯ

В работе получено теоретически реконструированное поле изохроматических полос у вершины трещины. Рассмотрена задача об одноосном растяжении пластины с центральной горизонтальной трещиной. Написана программа, генерирующая изображение изохроматических полос у вершины трещины, с использованием асимптотического разложения поля напряжений в окрестности вершины трещины при известных масштабных множителях для случая бесконечной пластины. В качестве вводных параметров программа принимает две величины: количество удерживаемых слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Вильямса и угол наклона трещины. Проведен ряд вычислений, который иллюстрирует проблему необходимости удержания высших слагаемых в асимптотическом разложении М. Вильямса: чем дальше от края трещины находится рассматриваемая изохроматическая полоса, тем больше слагаемых необходимо удерживать в асимптотическом разложении.

Ключевые слова: метод фотоупругости, полное асимптотическое разложение М. Вильямса, механика хрупкого разрушения, окрестность вершины трещины.

Цитирование. Жаббаров Р.М. Теоретически реконструированное поле изохроматических полос у вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 57–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-57-62>.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00631.

UDC 539.4
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-57-62

Submitted: 15/I/2019
Accepted: 20/II/2019

R.M. Zhabbarov

THEORETICALLY RECONSTRUCTED ISOCHROMATIC FRINGES IN THE VICINITY OF THE CRACK TIP

© Zhabbarov Ramil Muritovich — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.
E-mail: were-wolff@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

ABSTRACT

Theoretically reconstructed isochromatic fringe in the vicinity of the crack tip was received. The problem for a plate with central horizontal crack under uniaxial tension was considered. Isochromatic fringe in the vicinity of the crack tip image generating programme using complete asymptotic expansion of M. Williams stress field with scaling factor for infinity plate was developed. It was demonstrated that using large term of sum in the asymptotic expansion is necessary. If target isochromatic fringe is located far from the vicinity of the crack tip, then using many terms of sum in the asymptotic expansion of M. Williams is required.

Key words: photoelasticity, complete asymptotic expansion of M. Williams stress field, fracture mechanics, vicinity of the crack tip

Citation. Zhabbarov R.M. *Teoreticheski rekonstruirovannoe pole izokhromaticheskikh polos u vershinny treshchiny* [Theoretically reconstructed isochromatic fringe in the vicinity of the crack tip]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 1, pp. 57–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-57-62> [in Russian].

Введение

Анализ влияния слагаемых высоких порядков на асимптотическое представление поля напряжений в окрестности вершины трещины является актуальной задачей механики разрушения [1]. Классическое решение, характеризующееся многопараметрическим описанием поля напряжений в окрестности вершины трещины, было предложено М. Вильямсом [2], однако чаще всего для решения задач в этой области использовался только первый член асимптотического разложения Вильямса, называемый коэффициентом интенсивности напряжений [3–5]. Искусственное двойное лучепреломление используется для изучения деформаций в прозрачных телах. Такой метод исследования деформации, называемый методом фотоупругости, нашел широкое применение в различных областях науки и техники. Одним из важных применений фотоупругости является использование данного метода при исследовании распределения напряжений в оптических стеклах, возникающих при их изготовлении, а также при исследовании остаточных напряжений. Также метод фотоупругости, иначе называемый поляризационно-оптическим методом, находит широкое применение в инженерной практике и в области научных исследований [6]. На данный момент известно [7–9], что существует большое количество задач, в которых поднимается вопрос использования высших слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Вильямса, что обусловлено необходимостью более точного анализа поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следует отметить, что также актуальной является цифровая обработка изображений, получаемых интерференционно-оптическими методами (метод фотоупругости). Экспериментальной оценке полей напряжений в окрестности вершины трещины посвящается большое количество работ [10–12].

В рамках данной статьи при известных масштабных множителях, полученных для бесконечной пластины [13], выполнено теоретически реконструированное поле изохроматических полос с целью иллюстрации необходимости использования высших слагаемых асимптотического разложения М. Вильямса.

Метод фотоупругости. Экспериментальное определение полей напряжений у вершины трещины

Первым этапом эксперимента с помощью метода фотоупругости является тарировка — определение оптической константы материала f_s . Для этой процедуры используется несколько шагов нагружения, в качестве примера на рис. 1 изображена картина изохроматических полос в пластине с центральной трещиной при нагрузке 125 кг. Зафиксировав порядок полосы и приложенную нагрузку, для каждого

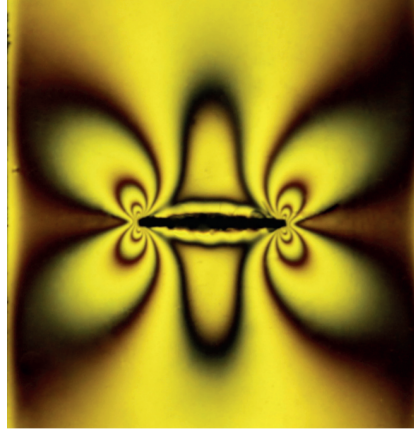


Рис. 1. Картина изохроматических полос у вершины трещины

шага нагружения измеряются диаметр и толщина диска и проводится поиск координат точки, лежащей на выбранной полосе. Связь между порядком полосы и разностью главных напряжений описывается законом Вертгейма:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N f_s / h,$$

где N — порядок изохроматической полосы, h — толщина пластины, σ_1, σ_2 — главные напряжения. В рамках работы [14] для определения цены изохроматической полосы был проведен ряд экспериментов на сжатие кругового диска парой сосредоточенных сил, направленных по вертикальной плоскости с началом координат, совпадающим с центром диска. Цена полосы N , проходящей через точку диаметра диска, при просвечивании монохроматическим светом описывается выражением

$$f_s = |\sigma_{22} - \sigma_{11}| h N,$$

поскольку в точках диаметра, которые совпадают с горизонтальной осью, напряжения σ_{11} и σ_{22} главные.

Полное асимптотическое разложение поля напряжений М. Уильямса

Асимптотическое разложение поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном линейно упругом материале имеет вид:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1},$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины; m — мода нагружения: $m = 1$ соответствует нормальному отрыву, $m = 2$ — поперечному сдвигу; a_k^m — масштабные множители, которые зависят от системы приложенных сил и геометрии образца; $f_k^{1,11}(\theta)$ — угловые распределения компонент тензора напряжений, которые определяются в ходе решения краевых задач:

$$f_k^{1,11}(\theta) = \frac{k}{2} [(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{1,22}(\theta) = \frac{k}{2} [(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{1,12}(\theta) = \frac{k}{2} [(k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta - (k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta],$$

$$f_k^{2,11}(\theta) = -\frac{k}{2} [(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{2,22}(\theta) = -\frac{k}{2} [(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{2,12}(\theta) = \frac{k}{2} [(k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta - (k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta].$$

Масштабные множители для бесконечной пластины принимают вид [13]:

$$a_{2n+1}^1 = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{3n+\frac{1}{2}}(n!)^2(2n-1)} \frac{\sigma_{22}^\infty}{a^{n-\frac{1}{2}}}, a_{2n+1}^2 = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{3n+\frac{1}{2}}(n!)^2(2n-1)} \frac{\sigma_{12}^\infty}{a^{n-\frac{1}{2}}}, n \leq 0,$$

$$a_2^1 = \frac{\sigma_{22}^\infty(\alpha - 1)}{4}, a_k^1 = 0, a_k^2 = 0.$$

Результаты исследования

На языке JavaScript написана программа, иллюстрирующая теоретически реконструированное поле изохроматических полос. В качестве входных данных программы принимаются два параметра: n – количество удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении М. Вильямса и α – угол наклона трещины. Интенсивность напряжений с количеством удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении М. Вильямса $n = 20$ при $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ проиллюстрированы на рис. 2. Из рис. 3, 4 видно, что изображения при $n = 4..7$ различаются в местах вдали от вершины трещины, что говорит о необходимости использования большего количества слагаемых в асимптотическом разложении.

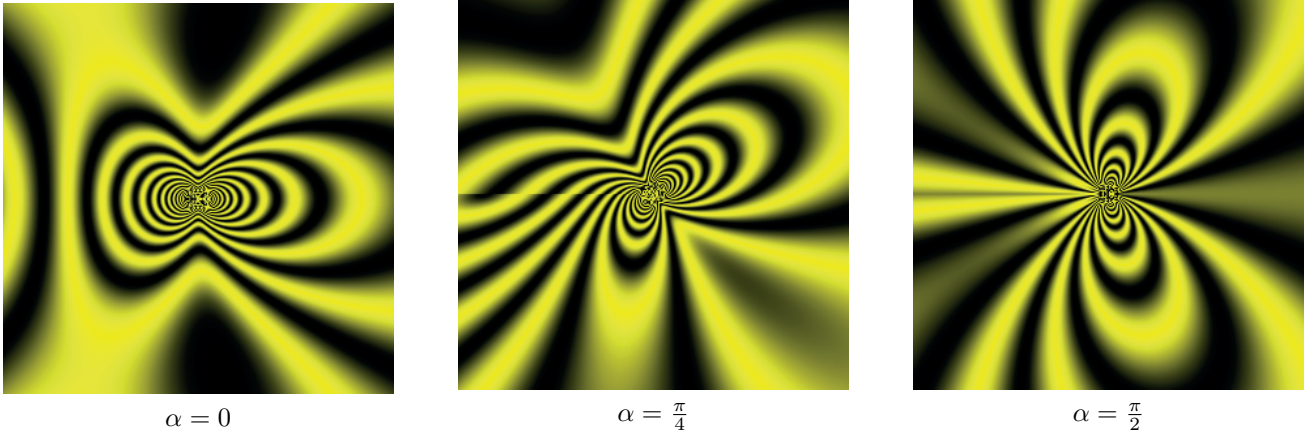


Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений при $n = 20$

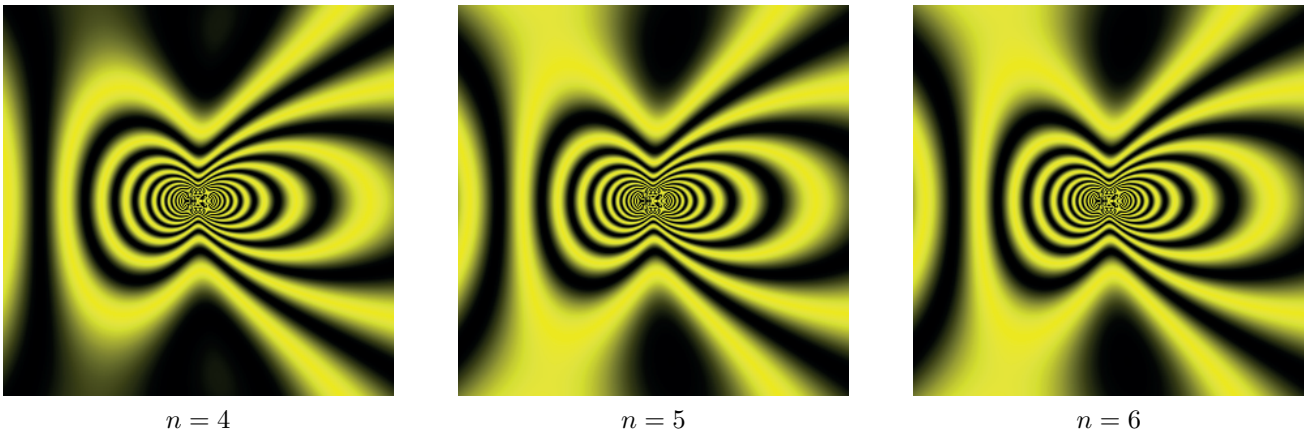
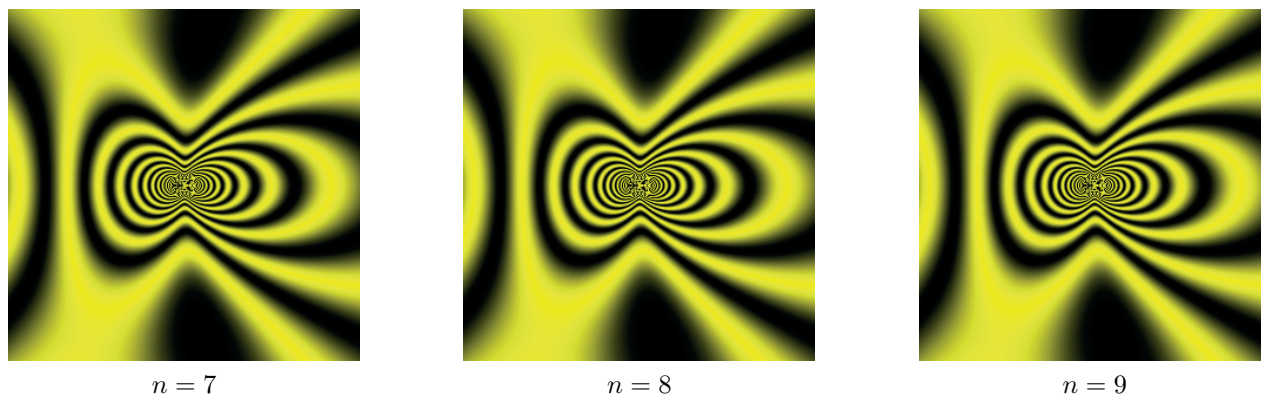


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений при $\alpha = 0$

Рис. 4. Распределение интенсивности напряжений при $\alpha = 0$

Выводы

В рамках данной работы была написана программа, генерирующая изображение поля изохроматических полос у вершины трещины в пластине с помощью полного асимптотического разложения М. Вильямса. В качестве масштабных множителей использовались известные значения в случае бесконечной пластины. Наглядно проиллюстрированы различия результатов при некоторых значениях количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении. Отсюда следует, что чем дальше интересующая точка находится относительно вершины трещины, тем больше необходимо использовать слагаемых в асимптотическом разложении М. Вильямса.

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований проект 19-01-00631.

Литература

- [1] Брок Д. Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с. URL: https://www.studmed.ru/broek-d-osnovy-mehaniki-razrusheniya_95e0e618676.html.
- [2] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19. P. 109–114. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/fec1/283d078a3d14bd0f3eee30bb482cefa70567.pdf>.
- [3] Игонин С.А., Степанова Л.В. Асимптотика полей напряжений и сплошности у вершины усталостной трещины в поврежденной среде в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 9–2(110). С. 97–108. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=305&option_lang=rus.
- [4] Кукушкин Е.В., Меновщиков В.А., Ереско Т.Т. Анализ современных представлений и подходов при исследовании усталостных разрушений игольчатых подшипников // Решетневские чтения. 2013. № 17. С. 287–288. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-sovremennyh-predstavleniy-i-podhodov-pri-issledovanii-ustalostnyh-razrusheniy-igolchatyh-podshpnikov>.
- [5] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // Вестник Пермского национального технического университета. Механика. 2015. № 4. С. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12.
- [6] Годжаев Н.М. Оптика. М.: Высшая школа, 1977. 432 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=636960>.
- [7] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity revisited // Engineering Fracture Mechanics. 1997. Vol. 56. P. 25–41, 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
- [8] Vivekannadan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. Vol. 99. P. 104–117.
- [9] Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // Engineering Fracture Mechanics. 2009. Vol. 76. P. 1771–1784. URL: http://staff.polito.it/alberto.carpinteri/papers/CARPINTERI_2009_N.549_EFM.pdf.
- [10] A simple approach to photoelastic calibration of glass using digital photoelasticity / K. Ramesh [et al.] // Journal of Non-Crystalline Solids. 2013. Vol. 378. P. 7–14. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2013.06.004.
- [11] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2018. Vol. 109. P. 7–16. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.05.004.

- [12] Ramesh K., Vivek R. Digital photoelasticity of glass: A comprehensive review // *Optics and Lasers in Engineering*. 2016. Vol. 87. P. 59–74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.03.017.
- [13] Hello G., Tahar B., Roelandt J. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solid and Structures*. 2012. Vol. 49. P. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [14] Степанова Л.В., Долгих В.С. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений. Метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений // *Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*. 2017. Т. 21. № 4. С. 717–735. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1544>.

References

- [1] Broek D. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Foundations of fracture mechanics]. M.: Vysshaya shkola, 1980, 368 p. Available at: https://www.studmed.ru/broek-d-osnovy-mekhaniki-razrusheniya_95e0e618676.html [in Russian].
- [2] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *Journal of Applied Mechanics*. 1952, Vol. 19, pp. 109–114. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/fec1/283d078a3d14bd0f3eee30bb482cefa70567.pdf> [in English].
- [3] Igonin S.A., Stepanova L.V. *Asimptotika polei napryazhenii i sploshnosti u vershiny ustalostnoi treshchiny v povrezhdennoi srede v usloviyakh ploskogo napryazhennogo sostoyaniya* [Asymptotics of stress and continuity fields near a fatigue growing crack in a damaged medium in conditions of state of plane stress]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2013, no. 9–2(110), pp. 97–108. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=305&option_lang=rus [in Russian].
- [4] Kukushkin E.V., Menovshchikov V.A., Eresko T.T. *Analiz sovremennykh predstavlenii i podkhodov pri issledovanii ustalostnykh razrushenii igol'chatykh podshipnikov* [The analysis of modern representations and approaches at the research of fatigue failures of needle bearings]. *Reshetnevskie chteniya* [Reshetnev Readings], 2013, no. 17, pp. 287–288. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-sovremennykh-predstavleniy-i-podkhodov-pri-issledovanii-ustalostnykh-razrusheniy-igolchatykh-podshipnikov> [in Russian].
- [5] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. *Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M. Uil'yamsa u vershin dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine* [Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2015, no. 4, pp. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12 [in Russian].
- [6] Godzhaev N.M. *Optika* [Optics]. M.: Vysshaya shkola, 1977, 432 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=636960> [in Russian].
- [7] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity — revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 56, Issue 1, January 1997, pp. 25–41, 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7) [in English].
- [8] Vivekannadan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, Vol. 99, pp. 104–117 [in English].
- [9] Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, Vol. 76, pp. 1771–1784. Available at: http://staff.polito.it/alberto.carpinteri/papers/CARPINTERI_2009_N.549_EFM.pdf [in English].
- [10] Ramesh K., Vivek, Dore P.T., Sanyal D. A Simple Approach to Photoelastic Calibration of Glass Using Digital Photoelasticity. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2013, Vol. 378, pp. 7–14. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2013.06.004 [in English].
- [11] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, Vol. 109, pp. 7–16. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.05.004 [in English].
- [12] Ramesh K., Vivek R. Digital photoelasticity of glass: A comprehensive review. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, Vol. 87, pp. 59–74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.03.017 [in English].
- [13] Hello G., Tahar B., Roelandt J. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solid and Structures*, Volume 49, Issues 3–4, February 2012, pp. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024> [in English].
- [14] Stepanova L.V., Dolgikh V.S. *Tsifrovaya obrabotka rezul'tatov optoelektronnykh izmerenii. Metod fotouprugosti i ego primeneniye dlya opredeleniya koeffitsientov mnogoparametricheskogo asimptoticheskogo razlozheniya M. Uil'yamsa polya napryazhenii* [Digital processing of the results of optoelectronic measurements. The photoelasticity method and its application for determination of coefficients of the multiparameter asymptotic Williams expansion of the stress field]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2017, Vol. 21, no. 4, pp. 717–735. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1544> [in Russian].