

УДК 539.3:629.76

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-44-56

Дата поступления статьи: 24/XII/2018

Дата принятия статьи: 18/I/2019

А.А. Авраменко, О.И. Малыгина

## МЕТОД РЭЛЕЯ — РИТЦА И МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ БАЛОЧНОГО ТИПА

© Авраменко Александр Алексеевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** avramenko@ssau.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-6798-4196>

© Малыгина Ольга Игоревна — аспирант кафедры теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**E-mail:** maloliya@ya.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-9580-6853>

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается решение задачи определения динамических характеристик составных балочных конструкций с помощью вариационного подхода. Приводится способ аналитического определения собственных форм колебаний составной балочной конструкции на примере трехступенчатой балки. Предлагается методика формирования данных об изолированных подконструкциях путем независимого расчета динамических характеристик составных частей методом начальных параметров. Приводятся основные соотношения метода Рэля — Ритца, которые для предварительно выбранных координатных функций позволяют сформировать данные о подконструкциях в матричном виде и получить конденсированные модели подконструкций. Полученные таким образом данные используются для формирования полной модели упругой конструкции. Проведены тестовые расчеты для балки с переменными по длине массово-жесткостными характеристиками. Рассмотрены два варианта формирования координатных функций: с применением статических форм (статическая конденсация) и комбинированного использования статических и динамических форм (динамическая конденсация). Продемонстрирован способ увеличения размерности матричной модели подконструкции при использовании статической конденсации за счет включения в состав модели степеней свободы, соответствующих физическим перемещениям внутренних сечений подконструкции. Исследовано влияние числа внутренних степеней свободы, а также числа учитываемых динамических форм на точность расчета динамических характеристик составной конструкции. Показана хорошая сходимость частот и форм собственных колебаний полной конструкции к точным значениям.

**Ключевые слова:** динамический синтез, метод Рэля — Ритца, метод начальных параметров, балочная конструкция, упругая механическая система, статическая конденсация, динамическая конденсация.

**Цитирование.** Авраменко А.А., Малыгина О.И. Метод Рэля — Ритца и метод начальных параметров в задаче расчета динамических характеристик составных упругих конструкций балочного типа // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 44–56. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-44-56>.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

UDC 539.3:629.76  
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-44-56

Submitted: 24/XII/2018  
Accepted: 18/I/2019

*A.A. Avramenko, O.I. Malykhina*

## RAYLEIGH — RITZ METHOD AND METHOD OF INITIAL PARAMETERS IN THE PROBLEM OF CALCULATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF MULTIBEAM ELASTIC STRUCTURES

---

© *Avramenko Aleksandr Alekseevich* — Candidate of Engineering Sciences, associate professor, professor of the Department of Theoretical Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** avramenko@ssau.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-6798-4196>

© *Malykhina Olga Igorevna* — postgraduate student of the Department of Theoretical Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

**E-mail:** maloliya@ya.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-9580-6853>

---

### ABSTRACT

The solution of the problem of dynamic synthesis based on the application of the Rayleigh — Ritz method is considered. A method is proposed for determining the dynamic characteristics of a composite beam structure, taking into account the calculation of the shapes of oscillations of partial substructures using the method of initial parameters. Two variants of the formation of coordinate functions, using static and dynamic condensation, are considered. When carrying out static condensation, in order to increase the accuracy of the result, the internal physical degrees of freedom of the element were added to the boundary degrees of freedom to the reduced model degrees of freedom. When conducting dynamic condensation, modal degrees of freedom were added to the physical degrees of freedom of the boundary nodes of the reduced model, which are, in fact, coefficients in the accepted decomposition of the field of partial forms calculated with fixed boundary degrees of freedom. In the framework of the proposed approach, test calculations were carried out for a beam with variable mass-stiffness characteristics along the length, which showed good convergence of the target parameters to exact values. The proposed approach can be used to carry out calculations of composite elastic structures based on the method of initial parameters in cases where the application of the finite element method is irrational or difficult. In addition, if necessary, on the basis of the approach considered in this paper, the combined use of these two methods can be organized.

**Key words:** dynamic synthesis, Rayleigh-Ritz method, method of initial parameters, beam structure, elastic mechanical system, static condensation method, dynamic condensation method.

**Citation.** Avramenko A.A., Malykhina O.I. *Metod Releya-Rittsa i metod nachal'nykh parametrov v zadache rascheta dinamicheskikh kharakteristik sostavnykh uprugikh konstruktsii balochnogo tipa* [Rayleigh-Ritz method and method of initial parameters in the problem of calculation of dynamic characteristics of multibeam elastic structures]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 1, pp. 44–56. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-44-56> [in Russian].

## Введение

Метод Рэлея — Ритца относится к приближенным методам расчета параметров колебаний и позволяет проводить расчеты для сложных упругих механических систем [1]. В основе данного метода лежит принцип Гамильтона [2] — один из основных вариационных принципов механики. Данный метод позволяет варьировать как сами неизвестные параметры движения механической системы, так и число этих параметров, что делает этот подход достаточно универсальным, а также изменять размерность исследуемой системы с учетом требуемой точности проводимых расчетов.

Метод Рэлея — Ритца широко применяется в решении задач, связанных с расчетом сложных конструкций. Он лежит в основе методологии, заложенной в программном комплексе Nastran, предназначенном для расчета конструкций методом конечных элементов [3]. В некоторых случаях с помощью

этого метода можно получить аналитические решения функций формы, которые невозможно произвести другими способами.

Одной из важных задач, которая может быть решена с помощью метода Рэлея — Ритца — это динамический синтез, позволяющий получить динамические характеристики составной конструкции на основе результатов расчетов параметров изолированных составных частей (парциальных подконструкций).

Необходимость решения задачи динамического синтеза может определяться потребностью оптимизировать процесс проведения расчетных работ, важностью обмена данными между предприятиями-соисполнителями, обязательностью обобщения результатов испытаний.

Независимо от задачи, которую предстоит решить с помощью динамического синтеза, ему должны предшествовать два этапа. Первый — этап анализа, на котором должны быть выбраны варьируемые на этапе синтеза параметры, набор минимально необходимых данных о парциальных системах, методы, с помощью которых эти данные будут получены. Второй этап — расчет необходимых характеристик, который может быть назван процессом редукции или конденсации, т. к. в результате такого расчета, как правило, снижается размерность математических моделей составных частей конструкции.

Редукционные методы широко применяются в современных программных комплексах, основанных на применении метода конечных элементов. С их помощью удается эффективно решать проблему больших размерностей современных расчетных моделей. Вопросам разработки этих методов посвящено большое число научных работ [4–9]. При решении задач наиболее популярным является метод статической конденсации по Гайану [10], при решении динамических задач — метод динамической редукции Крейга — Бэмптона [11; 12]. Существует ряд работ, посвященных вопросам многоуровневой конденсации [13; 19], а также работы, в которых рассматривается решение частных задач [20–22]. Наиболее общее теоретическое описание рассматриваемых методов дано в работе [23], подробный обзор приведен в работе [24]. Таким образом, в настоящее время существует достаточно большое число исследований, посвященных вопросам динамического синтеза в рамках конечно-элементного подхода.

Настоящая статья посвящена вопросам оптимизации вычислительных работ в процессе проектирования ракетно-космической техники (РКТ). Практически все объекты РКТ являются упругими конструкциями, состоящими из отдельных составных частей, каждую из которых для решения ряда задач можно смоделировать с помощью совокупности элементарных упругих элементов с распределенными массово-жесткостными параметрами и сосредоточенными инерционными включениями. Конструкция изделий РКТ является блочной. Это означает, что конструктивно-компоновочная схема, определяющая параметры ряда составных частей (например, головных обтекателей, отсеков ракеты-носителя), остается неизменной. В то же время текущий набор блоков изделия изменяется в зависимости от задач конкретной миссии. При этом динамические параметры движения составной упругой системы будут зависеть от динамических характеристик ее составных частей. Пересчет параметров неизменяемых составных частей является нерациональным. В соответствии с вышесказанным в процессе проектирования РКТ актуальной является задача динамического синтеза. Она представляет собой задачу расчета параметров составной упругой балочной системы при известных заранее и не пересчитываемых на этапе объединения составных частей параметрах неизменяемых составных частей. В этом случае пересчету подлежат лишь параметры вновь вводимых составных частей системы (например, параметры выводимого полезного груза или головного обтекателя).

Несмотря на широкую распространенность метода конечных элементов, часто существует необходимость проведения расчетов альтернативными методами, позволяющими осуществлять контроль достоверности получаемых результатов. Кроме того, применение альтернативных методов для проведения большого объема расчетов является одним из путей преодоления общих трудностей, возникающих при решении задач с применением зарубежных типовых программных комплексов, основанных на методе конечных элементов. К ним можно отнести трудоемкость работ по подготовке исходных данных и анализу результатов расчетов, трудности формирования объединенных динамических моделей, ограниченное число лицензий на программные продукты в сочетании с интенсивным их использованием большим числом инженерных работников.

В данной работе в качестве базового метода расчета динамических характеристик подконструкций выбран метод начальных параметров. Данный метод можно встретить как в классических публикациях по строительной механике [26; 27] и теории механических колебаний [1; 28], так и в сравнительно недавних публикациях [29–32]. Метод начальных параметров является, наряду с методом конечных элементов, одним из наиболее распространенных и эффективных методов, применяемых для определения динамических характеристик ракетных конструкций [25].

Цель данной работы — разработка методологии решения задачи конденсации моделей составных частей балочной конструкции и последующего динамического синтеза, основанного на применении метода Рэлея — Ритца, с использованием для расчета динамических характеристик составных частей конструкции метода начальных параметров.

## 1. Основные соотношения метода Рэлея — Ритца

Рассмотрим упругую систему, которая совершает свободные колебания с частотой  $\omega$  ир. Примем, что смещение точек системы, отсчитываемое от положения равновесия, изменяется по гармоническому закону:

$$y(x, t) = f(x) \sin(\omega t),$$

где  $f(x)$  — функция формы, зависящая только от координаты  $x$ , отсчитываемой вдоль продольной оси изделия.

Применяя согласно методу Рэлея — Ритца вариационный принцип Гамильтона к рассматриваемой механической системе и выбирая в качестве интервала интегрирования один период колебаний, можно записать следующее уравнение:

$$\delta [\omega^2 T_{max} - \Pi_{max}] = 0, \quad (1)$$

где  $T_{max}$ ,  $\Pi_{max}$  — амплитудные значения соответственно кинетической и потенциальной энергии системы;  $\delta$  — знак вариации.

Рассмотрим поперечные колебания балки, имеющей переменную по длине массу  $m(x)$  и жесткость  $B(x)$ . Выражения для амплитудных значений потенциальной и кинетической энергии можно записать в виде:

$$\Pi_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l B(x) (f''(x))^2 dx, \quad T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l m(x) f^2(x) dx \quad (2)$$

В формуле (2) и далее в настоящей статье штрихами обозначены производные по координате  $x$ . Будем подбирать форму колебаний балки, входящую в выражения (2) исходя из условия (1). Для этого представим форму колебаний балки в виде ряда

$$f(x) = \sum_{j=1}^{Nj} u_j X_j(x), \quad (3)$$

где  $X_1(x), X_2(x), \dots, X_{Nj}(x)$  — некоторые линейно независимые координатные функции, удовлетворяющие условиям закрепления рассматриваемой балки,

$u_j$  — параметры, подлежащие определению,

$Nj$  — число членов ряда разложения, выбранное из соображения требуемой точности.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} [\omega^2 T_{max}(u_1, u_2, \dots, u_{Nj}) - \Pi_{max}(u_1, u_2, \dots, u_{Nj})] = 0, \quad (4)$$

где  $i = 1..Nj$ .

Или с учетом (2) и (3)

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^l \left[ \omega^2 m(x) \left( \sum_{j=1}^{Nj} u_j X_j(x) \right)^2 - B(x) \left( \sum_{j=1}^{Nj} u_j X_j''(x) \right)^2 \right] dx = 0. \quad (5)$$

Вычисляя частные производные в выражении (5), мы приходим к системе  $Nj$  линейных уравнений относительно параметров  $u_j$  ( $j = 1..Nj$ ), которую, приводя к матричному виду и обозначая  $\Omega = \omega^2$ , можно записать следующим образом:

$$(\Omega \cdot M - B) U = 0,$$

где  $U$  — вектор-столбец, составленный из неизвестных параметров  $u_j$ ,

$M$  и  $B$  — квадратные матрицы с элементами, равными соответственно:

$$m_{ij} = \int_0^l [m(x) X_i(x) X_j(x)] dx, \quad b_{ij} = \int_0^l [B(x) X_i''(x) X_j''(x)] dx. \quad (6)$$

Неизвестное значение квадрата собственной частоты  $\Omega$  может быть найдено путем решения характеристического уравнения:

$$|\Omega \cdot M - B| = 0,$$

однако удобнее привести систему уравнений (6) к формату задачи на отыскание собственных значений матрицы:

$$(Z - \Omega) U = 0,$$

где

$$Z = BM^{-1} \quad (7)$$

есть матрица с известными числовыми элементами.

Теперь неизвестные значения квадрата собственной частоты  $\Omega$  могут быть вычислены как собственные значения матрицы  $Z$ , а соответствующие наборы параметров  $u_j$  ( $j = 1..Nj$ ) как собственные векторы матрицы  $Z$ .

## 2. Применение метода Рэлея — Ритца для расчета динамических характеристик трехступенчатой балки

Проведем расчет динамических характеристик балки прямоугольного сечения шириной 1 см, изготовленной из алюминия. Балка имеет три участка, отличающихся высотой  $h$  поперечного сечения. Характеристики участков балки представлены в графическом виде на рис. 1, а.

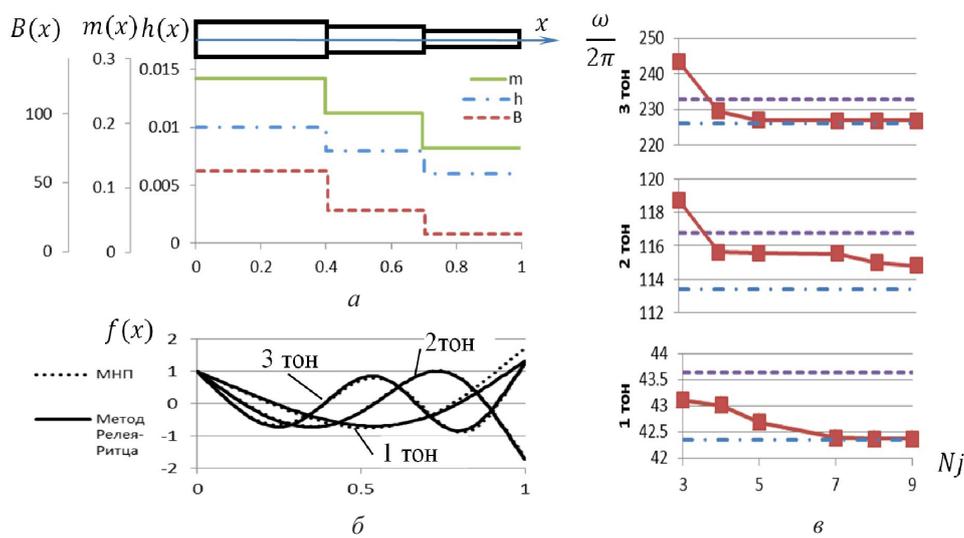


Рис. 1. Исходные данные (а), результаты расчета форм (б) и частот (в) собственных колебаний трехступенчатой балки методом Рэлея — Ритца

Для проведения расчетов будем использовать метод Рэлея — Ритца, при этом в качестве базовых функций разложения (3) выберем собственные формы колебаний свободной однородной балки с усредненными массовыми и жесткостными характеристиками. Данный выбор определяется тем, что для однородной балки известны аналитические выражения формы колебаний, которые записываются с помощью комбинации тригонометрических и гиперболических функций [25]. Вычисляя собственные векторы матрицы, определяемой выражением (7), и подставляя наборы полученных значений в выражение (3), можно получить аналитические выражения для функций формы различных тонов исследуемой трехступенчатой балки. Полученное выражение может быть использовано для проведения дальнейших исследований.

Результаты расчетов для случая, когда форма колебаний представлена в виде линейной комбинации четырех базовых функций, приведены на рис. 1, б. Для сравнения на том же рисунке приведены формы колебаний, рассчитанные методом начальных параметров. Результаты расчета частот колебаний для различного числа членов ряда  $Nj$  в представлении формы колебаний вида (3) приведены на рис. 1, в. На этом рисунке штрихпунктирной линией изображены точные значения частот, рассчитанные по методу начальных параметров. Пунктирная линия соответствует уровню трехпроцентной погрешности относительно точного значения частоты.

## 3. Применение статической конденсации в рамках метода начальных параметров

Рассмотрим неоднородную балку, имеющую большое число участков, на каждом из которых массовые и жесткостные характеристики остаются постоянными. Возьмем для определенности исходные данные, приведенные в работе [25] (рис. 2).

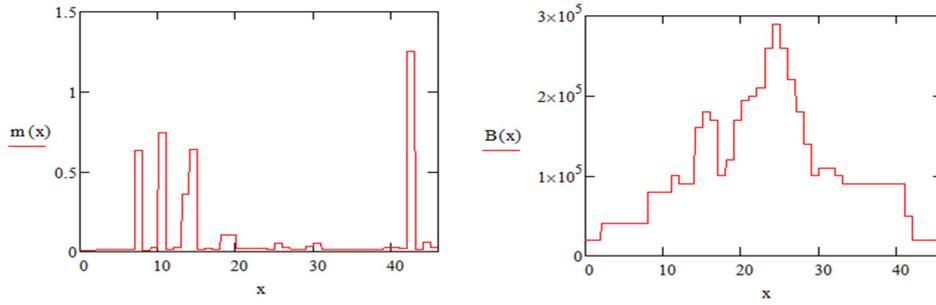


Рис. 2. Пример исходных данных неоднородной балки (распределенная масса  $m(x)$  и распределенная изгибная жесткость  $B(x)$ )

Такое распределение масс и жесткостей характерно для ракет-носителей [33]. Предположим, рассматриваемая балка является моделью некоторой ракеты космического назначения, состоящей из постоянной части (ракеты-носителя) и изменяемой части (головного обтекателя) длиной 12 м. В соответствии с принятым предположением разобьем всю балку на две части, каждая из которых будет иметь неоднородные массовые и жесткостные характеристики со ступенчатым характером изменения по длине. Предположим, перед нами стоит задача динамического синтеза, т. е. задача определения динамических параметров составной конструкции, на основе предварительно проведенного независимого расчета динамических характеристик рассматриваемых подконструкций в отдельности. Динамические характеристики будем определять для момента нахождения ракеты в полете, т. е. граничные условия будут соответствовать незакрепленной модели балки.

Для определения динамических характеристик каждой части исследуемой балки воспользуемся методом начальных параметров (МНП). Согласно этому методу параметры состояния некоторого сечения  $\zeta(x)$  могут быть определены через параметры состояния начального сечения  $\zeta(0)$ :

$$\zeta(x) = A \cdot \zeta(0), \tag{8}$$

где

$$\zeta(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

элементы матрицы  $A$  определяются по известным формулам МНП [2]. В качестве координатных функций примем так называемые статические формы, т. е. формы, получаемые под действием статических сил, вызывающих единичное смещение в направлении степеней свободы граничных сечений участков. Таким образом, мы получим по 4 вида координатных функций для каждого участка [1].

Запишем граничные условия для первой координатной функции:

$$\begin{aligned} X_1(0) = 1, \quad \varphi_1(0) = X_1''(0) = 0, \\ X_1(l) = 0, \quad \varphi_1(l) = X_1''(l) = 0. \end{aligned}$$

Тогда в терминах параметров состояния [3] можно записать:

$$\zeta(0) = [ 1 \ 0 \ M_0 \ Q_0 ]^T, \quad \zeta(l) = [ 0 \ 0 \ M \ Q ]^T. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), с учетом (9) получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} + a_{13}M_0 + a_{14}Q_0 = 0, \\ a_{21} + a_{23}M_0 + a_{44}Q_0 = 0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнения системы соответственно получим

$$M_0 = -\frac{a_{11} + a_{14}Q_0}{a_{13}}, \quad Q_0 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{24}a_{13} - a_{14}a_{23}}.$$

Мы получили выражения значений изгибающего момента и перерезывающей силы в начальном сечении участка. Проводя аналогичные преобразования для остальных координатных функций, получим выражения для недостающих граничных условий в начальном сечении. Принятые граничные условия и результаты указанного преобразования приведены в табл. 1.

Таблица 1

Граничные условия для координатных функций  $X_k(x)$ 

k	$X_k(0)$	$\varphi_k(0)$	$X_k(l)$	$\varphi_k(l)$	$M_k(0)$	$Q_k(0)$
1	1	0	0	0	$-\frac{a_{11}+a_{14}Q_0}{a_{13}}$	$\frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}}$
2	0	1	0	0	$-\frac{a_{14}+a_{12}Q_0}{a_{13}}$	$\frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}}$
3	0	0	1	0	$-\frac{a_{24}}{a_{23}}Q_0$	$-\frac{a_{23}}{a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}}$
4	0	0	0	1	$-\frac{a_{14}}{a_{13}}Q_0$	$\frac{a_{13}}{a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}}$

Разобьем каждую часть балки на некоторое число участков так, чтобы общее число участков разбиения составной конструкции было равно  $N_e$ . Вычисляя элементы матрицы  $A$  в соответствии с подходом метода начальных параметров для единичных собственных значений ( $\Omega = 1$ ) и рассчитывая значения параметров состояния в начальном сечении (табл. 1), можно найти координатные функции  $X_k^e(x)$  и вторые производные этих функций ( $X_k^e(x)''$ ) для каждого участка с номером  $e$  по формуле (8). Число  $N_s$  координатных функций  $\tilde{X}_S(x)$ , необходимых для описания рассматриваемой составной части, которое равно числу степеней свободы редуцированной подсистемы, можно найти по формуле:

$$N_s = (N_e - 1) \cdot 2 + 4.$$

Введем функции, определяющие координаты границ участков в зависимости от номеров участков ( $e$ ):

$$Ln(e) = \begin{cases} \sum_{r=1}^{e-1} l_r, & e \neq 1, \\ 0, & e = 1; \end{cases} \quad Lk(e) = \sum_{r=1}^e l_r.$$

Тогда можно записать выражения для координатных функций, соответствующих крайнему левому сечению балки:

$$\tilde{X}_1(x) = \begin{cases} X_1^1(x), & Ln(1) \leq x \leq Lk(1); \\ 0, & Ln(2) \leq x \leq Lk(N_e); \end{cases} \quad (11)$$

$$\tilde{X}_2(x) = \begin{cases} X_2^1(x), & Ln(1) \leq x \leq Lk(1); \\ 0, & Ln(2) \leq x \leq Lk(N_e). \end{cases} \quad (12)$$

Выражения вида (11, 12) определяют условия совместности деформации в местах сочленения отдельных участков. Можно записать аналогичные выражения для всех других сечений балки, а также выражения для вторых производных координатных функций составной конструкции  $\tilde{X}_s''(x)$ . Подставляя значения  $\tilde{X}_s(x)$  и  $\tilde{X}_s''(x)$  в (6), можно вычислить элементы матриц  $M$  и  $B$ , которые являются соответственно матрицами массы и жесткости рассматриваемой составной конструкции. Вычисляя значения элементов матриц  $Z$  по формуле (7), а также применяя стандартные функции математических пакетов для определения собственных значений и собственных векторов к матрице  $Z$ , можно найти соответственно набор собственных частот и векторов, содержащих коэффициенты  $U = (u_1 u_2 \dots u_{N_j})^T$ . Используя полученные векторы  $U$ , а также координатные функции  $\tilde{X}_s(x)$ , определяемые выражениями вида (11, 12), и вторые производные координатных функций  $\tilde{X}_s''(x)$ , по формуле (3) могут быть найдены формы колебаний, соответствующие рассматриваемой составной упругой механической системе. Применяя данный алгоритм для каждой подконструкции, рассчитанной методом начальных параметров, а также следуя алгоритму формирования матриц метода суперэлементов, можно находить матрицы масс и жесткостей более сложных конструкций.

С целью подтверждения правильности приведенных выше соотношений и определения области их применения были проведены тестовые расчеты для случаев, когда число участков разбиения составной балки  $N_e$  было равно 2, 4 и 6. Вид координатных функций для случая  $N_e = 2$ , полученных по формулам вида (11, 12), приведен на рис. 3.

Для указанных случаев проведена статическая конденсация составных частей конструкции и последующий синтез, т. е. расчет собственных значений, частот и форм колебаний составной конструкции. Результаты расчета собственных частот колебаний составной конструкции для всех рассмотренных случаев и сравнение с результатами, полученными при проведении расчетов по методу начальных параметров, приведены в табл. 2 и 3. Вид функций формы, полученных по предложенной методике, для

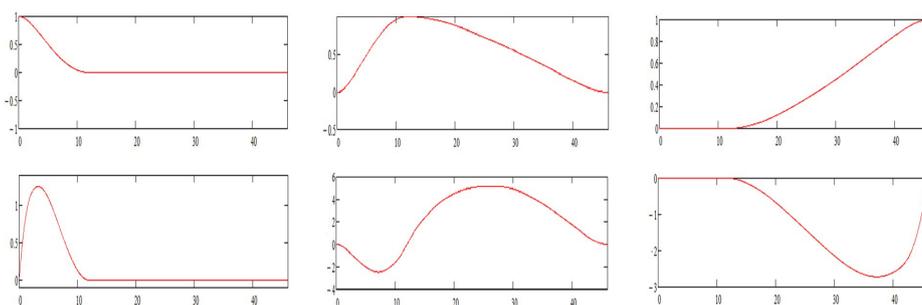


Рис. 3. Вид координатных функций для составной балки

1, 2 и 3-го тона колебаний составной балки с различным числом участков, в сравнении с функциями формы, полученными в результате расчета по методу начальных параметров, приведены на рис. 4.

Таблица 2

Результаты расчета частоты с применением статической конденсации							
Тон №	Точное решение	Метод парциальных форм					
		Число участков					
		1	2	3	1	2	3
$f$ , Гц			$\Delta f$ , %				
1	2.990	3.099	3.041	2.997	4	2	0
2	7.920	12.74	8.126	7.921	61	3	0
3	16.04	20.44	16.49	16.04	27	3	0

Таблица 3

Результаты расчета частоты с применением динамической конденсации							
Тон №	Точное решение	Метод парциальных форм					
		Число учитываемых тонов					
		1	2	3	1	2	3
$f$ , Гц			$\Delta f$ , %				
1	2.990	3.054	2.997	2.996	2	0	0
2	7.920	8.348	8.113	7.936	5	2	0
3	16.04	18.64	17.62	16.13	16	10	1

Мы получили хорошее совпадение как по частоте, так и по форме колебаний при условии разбиения каждой подконструкции на 3 участка. Очевидно, что точность представления колебаний составной конструкции с помощью статических форм тем выше, чем больше число участков разбиения подконструкции.

Следовательно, можно сделать вывод, что формирование данных о подконструкции с помощью статической конденсации не внесет значительной погрешности в результаты расчета составной конструкции в том случае, если подконструкция имеет относительно небольшой размер либо в состав варьируемых параметров подконструкции включены не только граничные, но и внутренние степени свободы.

Если же число участков увеличить значительно, а в качестве координатных функций формы принять функции, изменяющиеся по линейному закону внутри каждого участка и соответствующие граничным условиям, представленным в табл. 1, мы придем к методологии, заложенной в современных программах конечно-элементного моделирования. Этот факт объясняет большую погрешность в представлении формы колебаний, которая является ломаной кривой в случае, если для моделирования балки с помощью метода конечных элементов выбран слишком низкий уровень дискретизации.

#### 4. Динамическая конденсация с применением метода начальных параметров

С целью учета динамических свойств элементов в составе координатных функций, содержащих статические формы, добавим собственные формы колебаний элементов, рассчитанные при жестко закреплен-

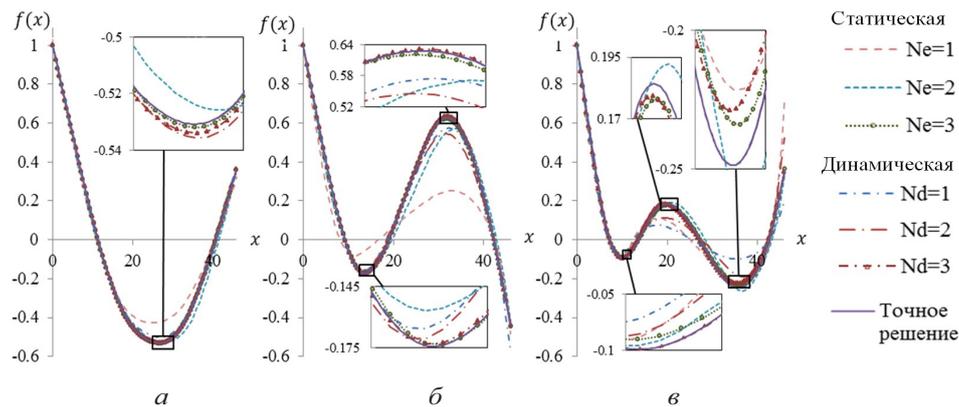


Рис. 4. Сравнение форм 1-го (а), 2-го (б) и 3-го (в) тона колебаний балки, рассчитанных по методу частичных форм с помощью статической (пунктирные линии) и динамической (штрихпунктирные линии) конденсации с точным решением (сплошная линия)

ных границах участков элементов (рис. 5). Такой подход к формированию данных о подконструкциях будем называть динамической конденсацией.

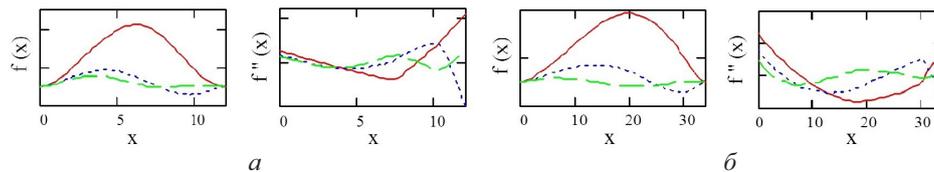


Рис. 5. Вид функций формы и вторых производных формы для первого (а) и второго (б) элемента составной балочной конструкции с жестко заделанными граничными сечениями

Статические формы будем вычислять только для граничных степеней свободы подконструкций, т. е. для случая, когда каждой подконструкции соответствует один участок в соответствии с описанным выше подходом. Таким образом, для каждой балочной подконструкции были вычислены четыре статические формы.

При вычислении матриц масс и жесткостей к статическим формам были добавлены динамические формы. При этом были проведены расчеты для трех различных случаев: при добавлении одной (первой) динамической формы колебаний в набор координатных функций каждой подконструкции ( $N_d = 1$ ), при добавлении двух динамических форм ( $N_d = 2$ ) и при добавлении трех форм ( $N_d = 3$ ).

Результаты расчета собственных частот колебаний составной конструкции для указанных случаев и сравнение с результатами, полученными при проведении расчетов по методу начальных параметров, приведены в табл. 2 и 3. Вид функций формы, полученных по предложенной методике, для 1, 2 и 3-го тона колебаний составной балки с различным числом добавленных динамических форм  $N_d$ , в сравнении с функциями формы, полученными в результате расчета по методу начальных параметров, приведены на рис. 5.

Получено хорошее совпадение как по частоте, так и по форме колебаний при условии включения в состав координатных функций 3-х динамических форм. Очевидно, что точность представления колебаний составной конструкции с помощью совокупности динамических и статических форм тем выше, чем больше динамических форм будет учтено.

## Заключение

В данной статье рассмотрено решение задачи определения динамических характеристик конструкций, составленных из балочных подконструкций с помощью вариационного подхода.

Приведенные здесь методы формирования аналитических выражений функций форм собственных колебаний составных балочных конструкций могут быть использованы для углубленного анализа движения механической системы.

Предлагаемый в данной статье подход для формирования конденсированных моделей подконструкций базируется на применении метода начальных параметров и может использоваться в тех случаях, когда употребление метода конечных элементов нерационально или затруднительно. Кроме того, в случае необходимости на основе этого подхода может быть организовано комбинированное применение двух указанных методов. Сведения, представленные в настоящей статье, могут быть также использованы при организации обмена данными между предприятиями-соисполнителями, использующими различные подходы для проведения расчетов, т. к. позволяют прийти к единообразному способу представления данных.

## Литература

- [1] Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов. М.: Высш. школа, 1980. 480 с. URL: <http://bookfi.net/book/635808>.
- [2] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960. 296 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/gantmacher.html>.
- [3] Рычков С.П. MSC.visualNASTRAN для Windows. М.: НТППресс, 2004. 552 с.
- [4] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / пер. с англ.; под ред. А.Ф. Смирнова. М., 1982. 448 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=584992>.
- [5] Игнатъев В.А. Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем. Саратов: СГУ, 1992. 142 с.
- [6] Игнатъев В.А., Ромашкин В.Н. Последовательная частотно-динамическая конденсация // Материалы науч.-техн. интернет-конференции. Волгоград: ВолгАСУ, 2010. С. 63–87.
- [7] Игнатъев В.А., Макаров А.В. Решение неполной алгебраической проблемы собственных векторов и собственных значений для задач динамики и устойчивости методом частотно-динамической конденсации // Строительная механика и расчет сооружений. 2005. № 1. С. 14–20.
- [8] Пржемницкий Е.С. Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур // Ракетная техника и космонавтика. 1963. № 1. С. 88–95.
- [9] Саложников А.И. Методы суперэлементов в статике и динамике панельных зданий // Строительство и архитектура. 1980. С. 33–37.
- [10] Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. № 2. P. 380. URL: <https://ru.scribd.com/document/409169074/1965-Reduction-of-Stiffness-and-Mass-Matrices>.
- [11] Craig R.R., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. P. 1313–1319. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01537654/document>.
- [12] Жидяев К.А. Использование метода динамического синтеза (Крейга-Бемптона) в MSC.NASTRAN // Методические материалы MSC.Software. 1999. 5 с.
- [13] Leung Y. T. Multilevel dynamic substructures // Computers and structures. 2011. Vol. 89. Pp. 302–315. URL: <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-0024304803&origin=recordpage>.
- [14] Xian L. Simplified dynamic condensation in multi-substructure systems // Computers and structures. 1988. Vol. 30. P. 851–854.
- [15] Bennisghof J.K., Lehoucq R.B. An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics // SIAM Journal on computing. 2004. Vol. 25. Pp. 2084–2106. DOI:10.1137/S1064827502400650.
- [16] Kim C.W. Analysis of vibration levels of large structural system with recursive component mode synthesis method: theory and convergence // Proceedings of the Institution of mechanical engineers. 2006. Vol. 220. P. 1339–1345. DOI: 10.1243/09544062JMES274.
- [17] Ивантеев В.И., Чубань В.Д. Расчет форм и частот свободных колебаний конструкций методом многоуровневой динамической конденсации // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV. № 4. С. 81–92. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/raschet-form-i-chastot-svobodnyh-koлебaniy-konstruktsiy-metodom-mnogourovnevoy-dinamicheskoy-kondensatsii>.
- [18] Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений / пер. с англ. М., 1984. 333 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=789003&pg=1>.
- [19] Voss H., Yin J., Chen P. Preconditioning Subspace Iteration for Large Eigenvalue Problems with Automated Multi-Level Sub-structuring // Proc. Conference on Applied Linear Algebra — in honor of Ivo Marek. Prague, 2013. P. 1–20. DOI: 10.13140/2.1.3119.3929.
- [20] Дмитриев С.Н. Применение метода синтеза форм для расчета колебаний космического летательного аппарата: учеб. пособие / С.Н. Дмитриев, И.Ю. Калугин, О.Н. Тушев; Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 16 с. URL: [http://www.medcollegelib.ru/book/bauman\\_0174.html](http://www.medcollegelib.ru/book/bauman_0174.html).

- [21] Ахтулов А.Д., Ахтулова Л.Н. Расчет колебаний конструкции автоматического космического аппарата методом подконструкций // Динамика систем, механизмов и машин. 2012. № 2. С. 112–115. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21653603>.
- [22] Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Потапенко А.Л. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. № 6. С. 45.
- [23] Григорьев В.Г. Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем: дис. . . д-ра техн. наук. М., 2000. 328 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=488721>.
- [24] Игнатьев В.А., Ромашкин В.Н. Алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задачах динамики и устойчивости конструкций (обзор). ISSN 1994-0351 // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 2(38). URL: [www.vestnik.vgasu.ru](http://vestnik.vgasu.ru). 54 с. URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/7IgnatievRomashkin-2015\\_2\\_38\\_.pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/7IgnatievRomashkin-2015_2_38_.pdf).
- [25] Кирилин А.Н., Ахметов Р.Н., Соллогуб А.В. Проектирование, динамика и устойчивость движения ракет-носителей: Методы, модели, алгоритмы, программы в среде MathCad. М.: Машиностроение, 2013. 296 с. URL: <http://epizodsspace.airbase.ru/bibl/kirilin/proektirovanie/01.html>.
- [26] Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. 154 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/8998>.
- [27] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 491 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/10476>.
- [28] Бабаков И.М. Теория колебаний: учеб. пособие. М.: Дрофа, 2004. 591 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=486366>.
- [29] Основы отработки прочности ракетно-космических конструкций / А.В. Кармишин [и др.]. М.: Машиностроение, 2007. 480 с. URL: <http://elast.math.msu.su/Sites/companysite/Uploads/Seminar%2020kurs%20Sukhinin.6D0F1C57201345DAACB6A989FC0855EE.pdf>.
- [30] Чадаев Ю.А. Определение спектра поперечных колебаний стержней, нагруженных продольной нагрузкой // Известия ТулГУ. Естественные науки. Механика. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 225–231. URL: [https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview\\_therest\\_en.php?x=tsu\\_izv\\_natural\\_sciences\\_2014\\_01\\_part\\_1&year=2014](https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview_therest_en.php?x=tsu_izv_natural_sciences_2014_01_part_1&year=2014).
- [31] Чадаев Ю.А. Поперечные колебания составных стержней, сжатых продольной нагрузкой // Известия ТулГУ. Технические науки. Машиностроение и машиноведение. 2014. Вып. 5. С. 3–10. URL: [https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview\\_therest\\_ru.php?x=tsu\\_izv\\_technical\\_sciences\\_2014\\_05&year=2014](https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview_therest_ru.php?x=tsu_izv_technical_sciences_2014_05&year=2014).
- [32] Головин К.А., Сарычев В.И., Воронцов И.И. Современный подход к оценке несущей способности водопроводных труб в дорожных насыпях для повышения надежности конструкции и обеспечения безопасности движения // Известия ТулГУ. Науки о Земле. 2017. Вып. 4. С. 152–161. URL: [https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview\\_therest\\_ru.php?x=tsu\\_izv\\_earth\\_science\\_2017\\_04&year=2017](https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview_therest_ru.php?x=tsu_izv_earth_science_2017_04&year=2017).
- [33] Колесников К.С. Динамика ракет: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2003. 520 с. URL: <http://bookre.org/reader?file=592344>.

## References

- [1] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebanii: Uchebnik dlya vuzov* [Theory of mechanical vibrations: Textbook for universities]. М.: Vyssh. shkola, 1980, 480 p. Available at: <http://bookfi.net/book/635808>.
- [2] Gantmakher F.R. *Lektsii po analiticheskoi mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. М.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1960, 296 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/gantmacher.html> [in Russian].
- [3] Rychkov S.P. *MSC.visualNASTRAN dlya Windows* [MSC.visualNASTRAN for Windows]. М.: NTPress, 2004, 552 p. [in Russian].
- [4] Bate K.-J., Wilson E.L. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov. Per. s angl.; pod red. Smirnova A.F* [Numerical methods in finite element analysis. Transl. from English; Smirnov A.P. (Ed.)]. М., 1982, 448 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=584992> [in Russian].
- [5] Ignatyev V.A. *Reduktsionnye metody rascheta v statike i dinamike plastinchatykh sistem* [Reduction methods of calculation in statics and dynamics of plate systems]. Saratov: SGU, 1992, 142 p. [in Russian].
- [6] Ignatyev V.A., Romashkin V.N. *Posledovatel'naya chastotno-dinamicheskaya kondensatsiya: Materialy nauch.-tekhn. Internet-konferentsii* [Successive and dynamical condensation: Materials of research and technological Internet-conference]. Volgograd: VolgGASU, 2010, pp. 63–87 [in Russian].

- [7] Ignatyev V.A., Makarov A.V. *Reshenie nepolnoi algebraicheskoi problemy sobstvennykh vektorov i sobstvennykh znachenii dlya zadach dinamiki i ustoychivosti metodom chastotno-dinamicheskoi kondensatsii* [Solution of an incomplete algebraic problem of proper vectors and proper meanings for tasks of dynamics and stability by means of partial and dynamic condensation]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions], 2005, no. 1, pp. 14–20 [in Russian].
- [8] Przhemnit'skiy E.S. *Matrichnyi metod issledovaniya konstruksii na osnove analiza podstruktur* [Matrix method for the study of structures based on the analysis of substructures]. *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika*, 1963, no. 1, pp. 88–95 [in Russian].
- [9] Sapozhnikov A.I. *Metody superelementov v statike i dinamike panel'nykh zdaniy* [Methods of superelements in statics and dynamics of panel buildings]. *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and architecture], 1980, pp. 33–37 [in Russian].
- [10] Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 1965, Vol. 3, no. 2, 380 p. Available at: <https://ru.scribd.com/document/409169074/1965-Reduction-of-Stiffness-and-Mass-Matrices> [in English].
- [11] Craig R.R., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 1968, Vol. 6, pp. 1313–1319. Available at: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01537654/document> [in English].
- [12] Zhidyayev K.A. *Ispol'zovanie metoda dinamicheskogo sinteza (Kreiga-Bemptona) v MSC.NASTRAN* [Using the dynamic synthesis method (Craig-Bampton) in MSC.NASTRAN]. In: *Metodicheskie materialy MSC.Software* [Methodical materials MSC.Software], 1999, 5 p. [in Russian].
- [13] Leung Y.T. Multilevel dynamic substructures. *Computers and structures*, 2011, Vol. 89, pp. 302–315 [in English].
- [14] Xian L. Simplified dynamic condensation in multi-substructure systems. *Computers and structures*, 1988, Vol. 30, pp. 851–854 [in English].
- [15] Bennighof J.K., Lehoucq R.B. An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics. *SIAM Journal on computing*, 2004, Vol. 25, pp. 2084–2106. DOI:10.1137/S1064827502400650 [in English].
- [16] Kim C.W. Analysis of vibration levels of large structural system with recursive component mode synthesis method: theory and convergence. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 2006, Vol. 220, pp. 1339–1345. DOI: 10.1243/09544062JMES274 [in English].
- [17] Ivanteev V.I., Chuban V.D. *Raschet form i chastot svobodnykh kolebaniy konstruksii metodom mnogourovnevoi dinamicheskoi kondensatsii* [Calculation of the forms and frequencies of free vibrations of structures by the method of multi-level dynamic condensation]. *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal], 1984, Vol. XV, no. 4, pp. 81–92. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/raschet-form-i-chastot-svobodnyh-kolebaniy-konstruksiy-metodom-mnogourovnevoy-dinamicheskoy-kondensatsii>.
- [18] George A., Liu J.W.-H. *Chislennoe reshenie bol'shikh razrezhennykh sistem uravneniy. Per. s angl.* [Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. Translation from English]. M., 1984, 333 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=789003&pg=1> [in Russian].
- [19] Voss H., Yin J., Chen P. Preconditioning Subspace Iteration for Large Eigenvalue Problems with Automated Multi-Level Sub-structuring. *Proceedings of the Conference on Applied Linear Algebra — in honor of Ivo Marek*. Prague, 2013, pp. 1–20. DOI: 10.13140/2.1.3119.3929 [in English].
- [20] Dmitriev S.N. *Primenenie metoda sinteza form dlya rascheta kolebaniy kosmicheskogo letatel'nogo apparata: uchebnoe posobie / S.N. Dmitriev, I.Yu. Kalugin, O.N. Tushev; Moskovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet imeni N.E. Baumana* [Application of the method of form synthesis for the calculation of oscillations of a spacecraft: study guide. S.N. Dmitriev, I.Yu. Kalugin, O.N. Tushev; Bauman Moscow State Technical University]. M.: Izdatel'stvo MGTU im. N.E. Baumana, 2009, 16 p. Available at: [http://www.medcollegelib.ru/book/bauman\\_0174.html](http://www.medcollegelib.ru/book/bauman_0174.html) [in Russian].
- [21] Akhtulov A.D., Akhtulova L.H. *Raschet kolebaniy konstruksii avtomaticheskogo kosmicheskogo apparata metodom podkonstruksii* [Calculation of oscillations of the structure of an automatic spacecraft using the substructure method]. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin* [Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)], 2012, no. 2, pp. 112–115. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21653603> [in Russian].
- [22] Belostotskiy A.M., Dubinskiy S.I., Potapenko A.L. *Metody dinamicheskogo sinteza podkonstruksii v zadachakh modelirovaniya slozhnykh inzhenernykh sistem* [Methods of dynamic synthesis of substructures in the problems of modeling complex engineering systems]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions], 2006, no. 6, p. 45.
- [23] Grigoriev V.G. *Metodologiya issledovaniya dinamicheskikh svoystv slozhnykh uprugikh i gidrouprugikh sistem: dis... d-ra tekhn. nauk* [Methodology for the study of dynamic properties of complex elastic and hydroelastic systems: Doctoral of Technical Sciences thesis]. M., 2000, 328 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=488721> [in Russian].

- [24] Ignat'ev V.A., Romashkin V.N. *Algebraichesкая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задаче динамики и устойчивости конструкции (обзор)* [Algebraic problem of eigenvector and eigenvalues of high order in tasks of dynamics and stability of a construction]. ISSN 1994-0351. Internet-vestnik VolgGASU, 2015, Vol. 2(38), www.vestnik.vgasu.ru, 54 p. Available at: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/7IgnatievRomashkin-2015\\_2\\_38\\_.pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/7IgnatievRomashkin-2015_2_38_.pdf) [in Russian].
- [25] Kirilin A.N., Akhmetov R.N., Sollogub A.V. *Proektirovanie, dinamika i ustoychivost' dvizheniya raket-nositelei: Metody, modeli, algoritmy, programmy v srede MathCad* [Design, dynamics and stability of the movement of launch vehicles: Methods, models, algorithms, programs in the MathCad environment]. M.: Mashinostroenie, 2013, 296 p. Available at: <http://epizodsspace.airbase.ru/bibl/kirilin/proektirovanie/01.html> [in Russian].
- [26] Krylov A.N. *O raschete balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii* [On the calculation of beams lying on an elastic foundation]. L.: Izd-vo AN SSSR, 1931, 154 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/8998> [in Russian].
- [27] Vlasov V.Z., Leontyev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, slabs and shells on an elastic base]. M.: Izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1960, 491 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/10476> [in Russian].
- [28] Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy: ucheb. posobie* [Theory of oscillations: textbook]. M.: Drofa, 2004, 591 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=486366> [in Russian].
- [29] *Osnovy otrabotki prochnosti raketno-kosmicheskikh konstruktsii. A.V. Karmishin [et al.]*. [A.V. Karmishin [et al.]. Fundamentals of testing the strength of rocket and space structures]. M.: Mashinostroenie, 2007, 480 p. Available at: <http://elast.math.msu.su/Sites/companysite/Uploads/Seminar%202%20kurs%20Sukhinin.6D0F1C57201345DAACB6A989FC0855EE.pdf> [in Russian].
- [30] Chadaev Y.A. *Opreделение спектра поперечных колебаний стержней, нагруженных продольной нагрузкой* [Determination of the transverse vibrations spectrum for rods under longitudinal load]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki. Mekhanika* [News of the Tula state university. Natural Sciences. Mechanics], 2014, Issue 1, Part 1, pp. 225–231. Available at: [https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview\\_therest\\_en.php?x=tsu\\_izv\\_natural\\_sciences\\_2014\\_01\\_part\\_1&year=2014](https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview_therest_en.php?x=tsu_izv_natural_sciences_2014_01_part_1&year=2014) [in Russian].
- [31] Chadaev Y.A. *Poperechnye kolebaniya sostavnykh stержней, szhatykh продольной нагрузкой* [Transverse vibrations of complex rods under longitudinal load]. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki. Mashinostroenie i mashinovedenie* [News of the Tula state university. Technical Sciences. Mechanical Engineering and Machine Science], 2014, Vol. 5, pp. 3–10. Available at: [https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview\\_therest\\_ru.php?x=tsu\\_izv\\_technical\\_sciences\\_2014\\_05&year=2014](https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview_therest_ru.php?x=tsu_izv_technical_sciences_2014_05&year=2014) [in Russian].
- [32] Golovin K.A., Sarychev V.I., Voroncov I.I. *Sovremennyyi podkhod k otsenke nesushchei sposobnosti vodoprovodnykh trub v dorozhnykh насыпях для повышения надежности конструкции и обеспечения безопасности движения* [Modern approach to load-bearing capacity estimation of culverts in the road embankment for improving construction and safety traffic reliability]. News of the Tula state university. Sciences of Earth, 2017, Issue 4, pp. 152–161. Available at: [https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview\\_therest\\_ru.php?x=tsu\\_izv\\_earth\\_sciences\\_2017\\_04&year=2017](https://tidings.tsu.tula.ru/tidings/pdf/web/preview_therest_ru.php?x=tsu_izv_earth_sciences_2017_04&year=2017) [in Russian].
- [33] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket: Uchebnik dlya vuzov* [Rocket Dynamics: A Textbook for High Schools]. M.: Mashinostroenie, 2003, 520 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=592344> [in Russian].