УДК 517+531.01
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43

Дата поступления статьи: 16/I/2019
Дата принятия статьи: 11/II/2019

М.В. Шамолин

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ НЕИСПРАВНОСТЕЙ

© *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, академик РАЕН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9534-0213

АННОТАЦИЯ

В предлагаемом цикле работ исследование начинается с изучения движения летательного аппарата, которое описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, представлено понятие диагностического пространства и его математической структуры. Данная статья является первой работой цикла, при этом обсуждаются уравнения движения, а также дается классификация возможных неисправностей. Она также является подготовительной частью к задаче диагностики, которая представляется в виде двух последовательно решаемых задач: задачи контроля, то есть задачи определения наличия неисправности в системе управления, и задачи диагностирования, то есть задачи распознавания конкретной происшедшей неисправности. Эту работу следует рассматривать как иллюстрацию предлагаемого подхода.

Ключевые слова: диагностика системы управления движением летательного аппарата, измеряемые координаты, классификация неисправностей.

Цитирование. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 32–43. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43.

UDC 517+531.01
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43

Submitted: 16/I/2019
Accepted: 11/II/2019

M.V. Shamolin

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART 1. MOTION EQUATIONS AND CLASSIFICATION OF MALFUNCTIONS

© *Shamolin Maxim Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, full professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, academic of the Russian Academy of Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9534-0213

ABSTRACT

In the proposed cycle of work, we begin the study of the motion of an aircraft which is described by nonlinear ordinary differential equations. Based on these equations, the probable malfunctions in the motion control system are classified, the concepts of reference malfunctions and their neighborhoods are introduced, the mathematical modeling of these malfunctions and their neighborhoods is carried out, the concept of diagnostic space is introduced, and the mathematical structure of this space is defined. Proposed work is the first in the cycle, therefore, the classification of malfunctions is given. This activity is also a preparatory part of the diagnostic problem, which can be represented in the form of two successively solved problems, i.e., control problem, that is the problem of determining the presence of a malfunction in the system, and diagnostic problem, that is the recognition problem of malfunction specification. This activity is just an illustration of the proposed approach.

Key words: aircraft motion, control system diagnostics, measured coordinates, classification of malfunctions

Citation. Shamolin M.V. *Zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Chast' 1. Uravneniya dvizheniya i klassifikatsiya neispravnostei* [Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43 [in Russian].

Памяти Ивана Терентьевича Борисенка

Предыдущие исследования автора по дифференциальной диагностике [1–3] уже касались похожих проблем. Отличие данного цикла работ от предыдущих исследований состоит в обобщающем характере нового цикла, а также в более подробном описании динамических процессов.

В дальнейшем будет дана постановка задачи диагностики системы управления движением летательного аппарата (ЛА). Она будет представлена в виде двух последовательно решаемых задач: задачи контроля, то есть задачи определения наличия неисправности в системе управления, и задачи диагностирования, то есть задачи распознавания конкретной происшедшей неисправности. Обнаружение неисправностей происходит в процессе функционирования ЛА.

В задаче контроля естественным образом будет введено понятие поверхности контроля, лежащей в фазовом пространстве системы. Критерием наличия неисправности является выход фазовой траектории на эту поверхность. Будут даны способы построения поверхности контроля.

Далее будет сформулирована и доказана теорема диагностирования. В силу этой теоремы предлагаются так называемые внешнетраекторные алгоритмы, при помощи которых после выхода фазовой траектории на поверхность контроля или в процессе непрерывной экспресс-диагностики осуществляется решение задачи диагностирования неисправностей, возникших в диагностическом пространстве, то есть в рассматриваемом случае в каналах управления движением ЛА. Будут сформулированы расширенные задачи контроля и диагностирования, а также общая задача диагностики, и показано, что решение этих задач существует.

В дальнейшем также будет дано статистическое решение задачи диагностики в случае траекторных измерений с шумом, который является случайным процессом типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром; при этом получен функционал диагностики, который ранее выбирался априори, а его минимизация приводит к ранее полученному алгоритму диагностирования.

Введение

Сложность современных управляемых систем, задач, решаемых этими системами, многообразие этих задач, снижение аппаратурной избыточности [4], высокая ответственность и интенсивность работы операторов, их высвобождение требуют эффективной автоматической диагностики функционального состояния [5] в процессе их движения. По результатам диагностики можно произвести ремонт системы управления, отключение неисправного элемента, которое бывает эффективнее его неправильной информации, или осуществить коррекцию закона управления.

Современные интеллектуальные объекты имеют модульную структуру и обладают конечным набором возможных неисправностей. Движение таких объектов и элементов их систем управления, как исправных, так и неисправных, с высокой степенью точности априори можно описать, исходя из опыта и законов классической механики, обыкновенными дифференциальными уравнениями. В силу этого научное направление исследований диагностики функционального состояния управляемых систем и получило название “Дифференциальной диагностики” (хотя оно и не совсем устоялось). В основе ее лежат дифференциальные уравнения, описывающие движение исправной и возможных неисправных систем.

Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления такого рода может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам [1–3]: задаче контроля, то есть установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, то есть поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность π_k. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри поверхности π_k.

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля π_k.

Процедура контроля включает в себя фиксирование выхода траектории объекта на поверхность контроля π_k, что является выходом алгоритма контроля, то есть информацией о наличии неисправности в системе, а также выдачу начальной информации для алгоритма диагностирования.

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля π_k. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. На это указывается, в частности, в [5].

Исходной информацией для решения задачи диагностирования являются конечный набор математических моделей неисправных систем, отличающихся друг от друга и от исходной системы той или иной возможной неисправностью, ограниченная область их начальных условий и информация с выхода алгоритма контроля.

Процедура диагностирования включает в себя описание информации, поступающей от датчиков, включая датчик контроля, организацию этой информации, определение последовательности действий, сравнение результатов наблюдений с расчетными возможными ожидаемыми результатами, процесс минимизации в пространстве поиска и выдачу результата, то есть номера происшедшей неисправности.

Процедура диагностирования может состоять из двух этапов: сначала определяется подсистема (например, один из каналов управления), в которой произошла неисправность, а затем осуществляется диагностирование конкретной неисправности в ней. Процедура диагностирования может предусматривать не только указание конкретно происшедшей неисправности, но и определение последствий возникших ситуаций, составление рецептов исправления неправильного функционирования системы, выполнение последовательных предписанных исправлений, повторную диагностику, советы по исправлению поведения обучаемого оператора при управлении системой в целом.

Существует множество приемов определения неисправностей, основанных в основном на анализе внутреннего состояния объекта. В то же время имеется возможность определения неисправностей динамического объекта по характеру его поведения, по измерению его траектории, то есть с помощью внешнетраекторного контроля. В этом случае возможно автоматическое определение неисправностей чисто вычислительными средствами на базе информации о траектории объекта. Автор желает лишь указать на ее принципиальную осуществимость, дать ей на уровне математических моделей и программ математическое обоснование.

Отметим основные особенности, которые отличают данную работу от других.

1. Даны определения и классификация опорных неисправностей, вводится понятие окрестности опорной неисправности, предложены простейшие математические модели опорных неисправностей и их окрестностей; вводится понятие диагностического пространства, рассматривается его математическая структура, формализующая непрерывность процессов в диагностическом пространстве, показано, что в этом пространстве рассматриваемые опорные неисправности и соответствующие им дифференциальные уравнения невырождены, то есть измеряемые траектории рассматриваемого ЛА с двумя различными опорными неисправностями не могут совпадать.

2. Сформулирована и решена в детерминированной и в статистической постановке задача контроля; при выборе поверхности контроля π_k в основу положено программное движение ЛА.

3. Доказана предельная теорема, позволившая значительно упростить внешнетраекторный алгоритм диагностирования; параметры алгоритма определяются детерминированным способом. Показано, что предложенный алгоритм диагностирования работает в случае меньшей по сравнению с вектором состояния размерности вектора диагностирования и в условиях шумов.

4. Показана принципиальная возможность диагностирования не только включенных в априорный список опорных неисправностей, но и по опорным неисправностям и таких, закон возникновения и изменения которых заранее не известны и которые поэтому не предусмотрены априорным списком. Он может содержать неисправности, необязательно доставляющие неустойчивость ЛА.

5. Настоящий цикл работ автора с методологической направленностью имеет практическое значение. В качестве расчетных математических моделей рассмотрены системы нелинейных дифференциальных уравнений с существенно нелинейным управлением. В частности, рассмотрена диагностика неисправностей системы управления в условиях шума при планирующем полете в пространственном движении ЛА с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости, и диагностика реальных неисправностей системы управления в условиях шума в плоском движении при посадке ЛА.

1. Уравнения движения

Рассмотрим динамическую управляемую систему, движение которой может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений, запишем ее в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t), \tag{1}$$

где $x(t)$ и $X(t)$ — n-мерные вектор-функции, каждая из которых содержит по набору $x_1(t), \dots, x_n(t)$ и $X_1(x,t), \dots, X_n(x,t)$, соответственно. Функцию $X(x,t)$ в дальнейшем будем считать непрерывной в некоторой открытой области D. Система (1) задает закон движения некоторой начальной точки $x_0(t_0)$ из $(n+1)$-мерного расширенного фазового пространства по траектории

$$x(t) = x(t, x_0(t_0)).$$

Через $\|x\|$ обозначим норму вектора x. В простейшем случае норма вектора может совпадать с евклидовой длиной вектора, то есть

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Наряду с системой (1) рассмотрим “измененную” систему

$$\frac{dy}{dt} = X(y,t) + R(y,t). \tag{3}$$

Предположим, что вектор-функция $R(y,t)$ непрерывна в области D, и в этой области при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ выполняется неравенство

$$\|R(y,t)\| < \eta, \tag{4}$$

где η — постоянное число и $\eta \geqslant 0$.

Пусть начальные условия, определяющие решения $x = x(t,x_0)$ и $y = y(t,y_0)$ систем (1) и (3), удовлетворяют условиям

$$\|y_0 - x_0\| < \delta, \tag{5}$$

где $\delta \geqslant 0$.

Предположим, кроме того, что функция $X(x,t)$ удовлетворяет в любой замкнутой области G, лежащей в D, условиям Липшица

$$\|X(y,t) - X(x,t)\| < L\|y - x\|, \tag{6}$$

где L — положительная постоянная.

В этом случае, то есть при выполнении условий (4)–(6) и условия Липшица в G для $R(y,t)$, гарантируется существование единственного решения $x = x(t, x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0, x_0)$, и справедлива оценка отклонения решения

$$\|y(t) - x(t)\| \leqslant \frac{\eta}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right) + \delta e^{L(t-t_0)}. \tag{7}$$

Отметим, в частности, что если возмущены только начальные условия, а правые части неизменны, то $\eta = 0$ и оценка (7) принимает вид

$$\|y(t) - x(t)\| \leqslant \delta e^{L(t-t_0)}.$$

Выбирая δ достаточно малым на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, можно удовлетворить неравенству

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Значит, решение уравнения (1) является непрерывной функцией начальных условий, что можно трактовать как свойства устойчивости решений на конечном интервале времени, присущее любой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (в настоящее время устойчивость на конечном интервале времени называется непрерывной зависимостью). Второй предельный случай ($\delta = 0$, $\eta \neq 0$) выражает свойство непрерывности решения в некотором функциональном пространстве правых частей.

Эти факты хорошо известны, но они именно в таком виде потребуются нам.

В дальнейшем будем рассматривать автономные системы, все решения которых продолжаемы.

Рассмотрим автономную динамическую управляемую систему, функциональное состояние которой может быть описано векторным дифференциальным уравнением

$$x' = X(x). \tag{8}$$

Нас особенно будет интересовать поведение решений системы (8) в окрестности некоторого решения x_*. Пусть в системе имеется управляющее устройство, целью которого является удержание всех решений системы (8) как можно ближе к решению x_*. Предположим, что все компоненты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x можно разделить на два множества: координаты системы (объекта) $y_1, \ldots, y_p$ и координаты управления $z_1, \ldots, z_q$, где $p + q = n$. Координаты системы определяют p-мерный вектор y функционального состояния системы, а координаты управления являются составляющими q-мерного вектора управления z.

Перепишем уравнения (8) рассматриваемой системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} y' &= Y(y,z),\ Y(0,0) = 0, \\ z' &= Z(y,z),\ Z(0,0) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Система (9) является системой с так называемым непрямым управлением или с управлением по производным. Такие системы применительно к управлению движением корабля впервые рассматривались в [6].

Объект управления описывается уравнением

$$y' = Y(y,0),$$

а управляющее свойство уравнением

$$z' = Z(0,z).$$

Задачей управляющего устройства является обеспечение или улучшение устойчивости объекта, то есть вектора y, и обеспечение желаемого движения объекта.

Отметим, что часто приходится прибегать к частичной или полной линеаризации системы (9). Предположение о линейности системы, то есть замена системы (9) ее линейным приближением, дает возможность продвинуться в исследовании достаточно далеко. Однако при этом могут ускользнуть некоторые важные свойства функционального поведения системы. Кроме того, многие системы и их управляющие устройства работают вне линейной области их характеристик.

Наряду с системами непрямого управления (9) рассматриваются также системы прямого управления

$$\begin{aligned} y' &= Y(y,z),\ Y(0,0) = 0, \\ z' &= Z(y,z),\ Z(0,0) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

при котором управляющий сигнал, то есть сигнал обратной связи, воздействует на объект непосредственно.

При проведении математических экспериментов по диагностике управляемых систем использовались математические модели типа (9) и (10). Классификация неисправностей, определение их окрестностей, простейшие подходы математического моделирования неисправностей и их окрестностей, обсуждение невырожденности опорных неисправностей, введение понятия диагностического пространства, а также первоначальная постановка задачи даются на базе уравнений типа (10), которые имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} x' &= X(x) + A(x)\xi, \\ \xi' &= \Phi(\delta), \\ \delta &= Bx + \phi(\sigma), \\ \sigma &= Cx, \end{aligned} \tag{11}$$

где x — фазовый n-мерный вектор состояния, $X(x)$ и $A(x)$ — определенные непрерывные матрицы-функции; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения рулей высоты, элеронов, направления; $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, \ldots, n)$ — следующие матрицы коэффициентов:

$$b_{ij}^0 \leqslant b_{ij} \leqslant b_{ij}^*; \quad c_{ij}^0 \leqslant c_{ij} \leqslant c_{ij}^*; \tag{12}$$

здесь b_{ij}^0, b_{ij}^* и c_{ij}^0, c_{ij}^* — некоторые положительные постоянные.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\phi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h и принадлежат к классу так называемых допустимых характеристик, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \Phi_h(\delta_h) = 0, \quad \text{если } \delta_h = 0; \quad \phi_h(\sigma_h) = 0, \quad \text{если } \sigma_h = 0. \\ &2)\ \delta_h \Phi_h(\delta_h) > 0, \quad \text{если } \delta_h \neq 0; \quad \sigma_h \phi_h(\sigma_h) > 0, \quad \text{если } \sigma_h \neq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Впрочем, условие 1 (для непрерывных функций) является следствием условия 2.

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0, +\infty)$ и $[0, -\infty)$ от этих функций расходятся. Это условие гарантирует сходимость решений при $t \to \infty$.

Что же касается условий существования и единственности траекторий системы, то дополнительно отметим весьма полную теорему существования, а также теоремы [7], определяющие достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши с фазовыми ограничениями. Отметим, кроме того, работу [8], в которой обсуждаются достаточные и необходимые условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем; при рассмотрении необходимых условий вводятся функции, отличные от функций Ляпунова (см. также [9; 10]).

В дальнейшем условия существования и единственности для систем вида (11) будем считать выполненными и возвращаться к этому вопросу уже не будем.

Уравнения (11) приводятся к уравнениям (1) или (10) путем исключения переменных. Будем считать, что система уравнений (11) обладает всеми свойствами, которые приписываются уравнению (1).

Последние три уравнения в (11) описывают систему управления (СУ) движением динамического объекта. Целью управления является удержание траектории $x(t)$, близкой к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Допустим, что такое управление построено, то есть подобраны функции ϕ и Φ, а также значения коэффициентов матриц B и C, и именно эти ϕ, Φ, B и C присутствуют в (11).

Допустим, что в процессе функционирования в СУ могут возникать неисправности, которые приводят к тому, что управляющий сигнал ξ, вырабатываемый СУ объекта, формируется неправильно, то есть управление объектом уже не обеспечивает близости траектории $x(t)$ к $x_*(t)$.

Таким неисправностям соответствуют некоторые значения коэффициентов матриц B и C и виды функций ϕ и Φ. Допустим, что существует такой набор из l неисправностей, каждой их которых присущи свои матрицы B_i, C_i и функции ϕ_i, Φ_i, $i = 1, \ldots, l$, что решения $x_i(t)$ систем

$$x_i'(t) = f_i(x_i, t)$$

с начальными условиями $x^0 \in X$, где функции f_i получаются подстановкой в (12) матриц B_i, C_i и функций ϕ_i, Φ_i и дальнейшим исключением переменных, различны между собой при одних и тех же начальных условиях для всех f_i и отличны также от программной траектории $x_*(t)$.

Тогда при данном наборе неисправностей актуальна задача определения номера неисправности в наборе, то есть определения номера i функции f_i, $i = 1, \ldots, l$, заменяющей функцию в правой части в некоторый момент времени t_0. Здесь t_0 — момент возникновения неисправности в СУ объекта.

В более общем виде задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в неизвестный момент времени произошла некоторая неисправность. Задача сводится к отображению происшедшей в системе неисправности на множество из l возможных неисправностей и определения такого номера $i = 1, \ldots, l$ неисправности из этого множества, который максимально “близок” к происшедшей неисправности. Отсутствие неисправности в системе также должно быть выходом решения задачи.

Входными данными для определения номера возникшей в СУ неисправности будут конечный набор неисправностей, характерных для СУ объекта, и, значит, соответствующий набор дифференциальных уравнений, их решения и измеренные в процессе функционирования объекта значения компонент фазового вектора.

2. Классификация неисправностей

Классификацию неисправностей дадим на базе математической модели пространственного движения ЛА (11) и запишем эти уравнения применительно к системе управления, рассмотренной в работе [6], в которой, в частности, изучается режим планирующего спуска с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Сохранив в этих уравнениях структуру управления, запишем их в следующем виде:

$$\begin{gathered} x' = A(x) + B(x)\xi, \\ \xi' = \Phi(\delta), \\ \delta = C(t)u + \phi(\sigma), \\ \sigma = E(t)s, \end{gathered} \tag{14}$$

где x — фазовый n-мерный вектор состояния, $A(x)$ и $B(x)$ — определенные, непрерывные матрицы-функции; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения $\xi_i (i = 1, 2, 3)$ рулей высоты, элеронов, направления; составляющие трехмерных векторов u и s в (14) могут быть приборно измерены или алгоритмически вычислены; элементы матриц $C(t) = (c_{ij}(t))$ и $E(t) = (e_{ik}(t))$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}],\ \underline{c}_{ij} \leqslant \overline{c}_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \\ e_{ik} \in [\underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}],\ \underline{e}_{ik} \leqslant \overline{e}_{ik}, \quad j = 1, \dots, p,\ k = 1, \dots, q, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}, \underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}$ — некоторые постоянные значения.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\phi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h и принадлежат к классу так называемых допустимых характеристик, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{gathered} 1)\ \Phi_h(\delta_h) = 0, \quad \text{если } \delta_h = 0; \quad \phi_h(\sigma_h) = 0, \quad \text{если } \sigma_h = 0. \\ 2)\ \delta_h \Phi_h(\delta_h) > 0, \quad \text{если } \delta_h \neq 0; \quad \sigma_h \phi_h(\sigma_h) > 0, \quad \text{если } \sigma_h \neq 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Впрочем, условие 1 (для непрерывных функций) является следствием условия 2.

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0, +\infty)$ и $[0, -\infty)$ от этих функций расходятся, что гарантирует сходимость решений при $t \to \infty$.

Зависимость от времени матриц C, E в правой части (14) обусловлена тем, что процесс развития неисправностей может явно зависеть от времени.

Перейдем теперь к классификации возможных неисправностей, дадим определение неисправности и опишем предлагаемый подход.

Классификация дается применительно к неисправностям, которые могут возникнуть в системе управления движением ЛА (14). Она достаточна для описания возможных в системе управления неисправностей, может быть использована и для описания соответствующих возможных неисправностей в других частях ЛА (в системе управления двигателями, навигационной системе, гиростабилизированной платформе и др.) и расширена. Необходимым условием расширения классификации неисправностей является наличие в рассматриваемой математической модели движения описания работы прибора, в котором может произойти неисправность, не предусмотренная классификационным списком.

Предлагаемая классификация неисправностей, не претендуя на законченность, позволит в последующем осуществить логические построения, решающие задачу дифференциальной диагностики.

Информационное содержание и силомоментные воздействия системы управления в (14) обеспечиваются датчиками. Современные системы управления имеют модульную структуру, состоящую из конечного набора датчиков (блоков). Датчиком назовем любой прибор из цепочки приборов, перерабатывающих информацию о траекторном движении ЛА, начиная от измерительных или алгоритмических приборов и кончая рулевыми исполнительными устройствами, каждый из которых имеет входные и выходные сигналы и самостоятельную функциональную цель.

Неисправностью будем называть такое изменение функционального состояния в системе датчиков управления, которое обуславливает недопустимые отклонения ЛА (14) от цели управления, то есть от программного движения.

Причины возникновения неисправности рассматриваться не будут. Нас главным образом будет интересовать неисправность самого датчика как одного из приборов системы управления. В силу сказанного система управления движением объекта (14) будет обладать конечным набором возможных неисправностей. Эти неисправности, благодаря имеющемуся инженерному опыту или в силу интуитивных соображений, можно априори зафиксировать и исходя из механических представлений математически описать.

Определим теперь класс возможных неисправностей в системе управления движением объекта, описываемым дифференциальными уравнениями (14), то есть определим список конкретных возможных неисправностей в системе датчиков управления, которые могут обуславливать недопустимые отклонения объекта.

1. Отказ. Отказом будем называть отсутствие сигнала на выходе датчика. В математической модели движения объекта и его системы управления отказ можно моделировать обнулением соответствующего коэффициента при выходном сигнале датчика или выходного сигнала датчика. Иначе говоря, поступающая с датчика информация в модели не должна учитываться.

Например, если в третьем уравнении (14) слагаемое

$$\delta_{11} = c_{11}(t)u_1 \tag{17}$$

в некоторый момент времени t_0 становится равным нулю, то есть $\delta_{11}(t) = 0$, $t \geqslant t_0$, то это будет означать, что отказал датчик, формирующий сигнал (17). Из формулы (17) следует, что отказ может быть обусловлен или отказом прибора, формирующего оператор $c_{11}(t)$ при сигнале, поступившем на вход датчика, или исчезновением самого сигнала u_1 в датчике, или того и другого одновременно. Объединение этих возможностей и будет определять отказ формирующего сигнал (17) датчика, то есть отсутствие сигнала на его выходе.

2. Сбой. Сбоем будем называть выход сигнала датчика за пределы допустимых номинальных значений. Сбой датчика может быть обусловлен недопустимым изменением некоторого параметра, характеризующего этот датчик. В уравнениях движения это можно моделировать выбором закона изменения соответствующего параметра. Если закон изменения параметра зависит от времени, то это значит, что рассматриваемая система перестает быть автономной. В реальных условиях закон изменения параметра может быть и не известен.

Например, если сигналу δ_{11} с выхода датчика, формирующего выражение (17), предписано находиться в пределах

$$\underline{\delta_{11}} \leqslant \delta_{11} \leqslant \overline{\delta}_{11},$$

а изменение $c_{11}(t)$, или u_1, или $c_{11}(t)u_1$ в процессе движения таково, что δ_{11} выходит за пределы интервала $[\underline{\delta_{11}}, \overline{\delta}_{11}]$, то это будет означать сбой датчика, формирующего сигнал (17).

3. Заклинивание. Заклиниванием будем называть неисправность, при которой значение выходного сигнала датчика в некоторый момент времени фиксируется и в дальнейшем не изменяется во времени. К этому отнесем и неисправности, при которых около некоторого фиксированного положения совершаются незатухающие, например синусоидальные, колебания, то есть происходит заклинивание с наложением некоторых колебаний.

В качестве примера можно привести заклинивание руля или колебания руля около некоторого фиксированного положения. Заклинивание руля в нейтральном (нулевом) положении эквивалентно отказу канала управления этим рулем.

4. Активный отказ. Активным отказом будем называть неисправность, при которой сигнал датчика скачкообразно изменяется до определенного максимально возможного значения и фиксируется по величине и во времени.

5. Нарушение симметрии. Это неисправность, при которой происходит сдвиг начала отсчета сигнала датчика. В частности, это может быть сдвиг допустимой характеристики исполнительного органа, то есть характеристика исполнительного органа перестает принадлежать к классу допустимых функций (16).

Рассмотренные неисправности *1–5* образуют класс возможных неисправностей.

Любая неисправность из выделенного класса не приводит к изменению фазового пространства модели объекта. Модели объекта с той или иной неисправностью из класса возможных отличаются лишь структурой уравнений движения. Если в заранее неизвестный момент времени произойдет одна из неисправностей из класса возможных, то траектория исходной системы изменится и будет непрерывно продолжаема траекторией системы с происшедшей неисправностью. Некоторые из неисправностей могут доставлять неустойчивость движению объекта.

Рассмотрим некоторый датчик из набора датчиков управляющей системы. Этому датчику можно поставить в соответствие одну, две или более неисправностей из выбранного класса.

Рассмотрим теперь два любых различных датчика из набора датчиков в управляющей системе движением объекта. Различными будем называть датчики, перерабатывающие траекторную информацию разной природы, например, траекторную информацию разной размерности. Каждому из таких датчиков можно поставить в соответствие определенные неисправности из выбранного класса. Реакция системы на эти неисправности будет различной.

Для примера рассмотрим первую строку произведения матриц $C(t)u$, взятой из уравнений (14):

$$c_{11}(t)u_1 + c_{12}(t)u_2 + \ldots + c_{1p}(t)u_p.$$

Каждая из входных координат $u_1, u_2, \ldots, u_p$ вырабатывается соответствующим датчиком, содержит свою присущую только ей физическую информацию, в некотором смысле имеет свою размерность, то есть по своему воздействию на движение системы все входные координаты различны между собой. Коэффициенты $c_{11}(t), c_{12}(t), \ldots, c_{1p}(t)$, вырабатываемые операторами, также в некотором смысле имеют свою размерность и различны между собой.

Слагаемые $c_{11}(t)u_1, c_{12}(t)u_2, \ldots, c_{1p}(t)u_p$ в системе управления содержат различную физическую информацию, и их влияние на движение системы (14) будет различным.

Функции остальных элементов модели системы управления также различны. Влияние нарушений в работе различных датчиков и операторов, формирующих управление системой, на движение системы также будет различным. Поэтому и влияние различных неисправностей из класса возможных на траекторное движение системы будет различным.

Всему конечному набору различных датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор неисправностей из класса возможных. Такой априорный набор неисправностей будем в дальнейшем называть опорным, а неисправности, входящие в этот набор, — опорными неисправностями.

Таким образом, конечному набору попарно (в совокупности) различных датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор H опорных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{18}$$

из класса возможных.

В дальнейшем будут изучаться движения, соответствующие каждой из неисправностей (18) H_j, $j = 1, \ldots, l$, или нескольким из них, происходящие в геометрической фигуре, представляющей собой плоскости (H_m, t), $m = 1, \ldots, l$, связанные с осью времени t и осями H_m, $m = 1, \ldots, l$, исходящими из единого начала на оси времени t. Изучаться будут также влияние этих движений на движение рассматриваемой управляемой динамической системы, а также диагностика этих движений.

В заключение сделаем следующее предположение, оправдываемое тем, что процесс обнаружения неисправности ограничен малым временем (см. также [11–16]).

От потока неисправностей будем требовать следующее.

Пусть распределение интервала времени между последовательными неисправностями системы (14) таково, что вероятность более чем одной неисправности на интервалах времени обнаружения пренебрежимо мала. Это предположение позволит нам детально поставить задачу диагностики, хотя в принципе это предположение, как будет показано в дальнейшем, необязательно. Важно, чтобы происшедшая в системе (14) неисправность попала в апостериорный список $l_1 < l$ неисправностей (см. также [17–21]).

В следующих разделах проводится математическое моделирование опорных неисправностей в соответствии с введенной их классификацией. Этот раздел следует рассматривать как простейшую иллюстрацию предлагаемого подхода (см. также [22–24]).

Заметим также, что данный класс задач тесно связан с современными задачами, изложенными в [25–28], а также в соответствующих задачах, связанных с так называемой самодиагностикой [29; 30].

Литература

[1] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 775–790. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=401&option_lang=rus.

[2] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Экзамен, 2007. URL: http://bookre.org/reader?file=470762&pg=1.

[3] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114. № 1. P. 976–1024. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021807110899.

[4] Пархоменко П.П., Сагомонян Е.С. Основы технической диагностики. М.: Энергия, 1981. URL: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html.

[5] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=7158&option_lang=rus.

[6] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. М.: Изд-во МГУ, 1983.

[7] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=4566&option_lang=rus.

[8] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=3855&option_lang=rus.

[9] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117908010037.

[10] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. DOI: https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9.

[11] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31.

[12] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization // Oper. Res. Lett. 2003. Vol. 31. № 3. P. 167–175. URL: https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/becka/papers/3.pdf.

[13] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography // SIAM J. Optim. 2001. Vol. 12. № 1. P. 79–108. DOI:10.1137/S1052623499354564.

[14] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights // J. Machine Learning Res. 2016. № 17(153). P. 1–43. URL: arXiv:1503.01243.

[15] Шамолин М.В. Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование. 2011. Т. 33. № 3. С. 121–126.

[16] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование. 2010. Т. 32. № 5. С. 31–44. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/61677.

[17] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions // SIAM J. Control. 1968. Vol. 6. № 2. P. 194–214. URL: https://arxiv.org/abs/1706.09142.

[18] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2014. Vol. 50. № 3. P. 2119–2326.

[19] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition // J. Intelligent Robot. Syst. 2015. Vol. 78. № 1. P. 159–179. DOI: https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5.

[20] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes // Acta Appl. Math. 2002. Vol. 74. № 2. P. 155–175. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1020669212384.

[21] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model // Math. Meth. Oper. Res. 2009. Vol. 70. P. 567–596. DOI: https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7.

[22] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks // Foundat. Trends Networking. 2008. Vol. 2. № 4. P. 381–533.

[23] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks // IEEE Trans. Autom. Contr. 2009. Vol. 54. № 10. P. 2328–2340.

[24] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems // SIAM J. Control Optimization. 1991. Vol. 29. № 6. P. 1251–1287. DOI: 10.1137/0329065.

[25] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra Appl. 1989. Vol. 122–124. P. 23–64. DOI: 10.1016/0024-3795(89)90646-0.

[26] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues // Systems Contr. Lett. 2002. Vol. 46. P. 323–342. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0.

[27] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms // Int. J. Contr. 1985. Vol. 42. P. 65–70. DOI: https://doi.org/10.1080/00207178508933346.

[28] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems // Int. J. Contr. 1976. Vol. 23. P. 1–16. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0.

[29] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm // Lin. Alg. Appl. 2007. Vol. 425. № 2–3. P. 404–433. DOI: 10.1016/j.laa.2006.09.029.

[30] Tang X., Wang S. A Low Hardware Overhead Self-diagnosis Technique Using ReedSolomon Codes for Self-repairing Chips // IEEE Trans. Comput. 2010. Vol. 59. № 10. P. 1309–1319. DOI: 10.1109/TC.2009.182.

References

[1] Borisenok I.T., Shamolin M.V. [Solution of a problem of differential diagnostics]. *Fundament. i prikl. matem.* [Fundamental and Applied Mathematics], 1999, Vol. 5, no. 3, pp. 775–790. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=401&option_lang=rus. [in Russian].

[2] Shamolin M.V. *Nekotorye zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki, Izdanie 2-e, pererab. i dopoln.* [Certain Problems of Differential and Topological Diagnostics. 2nd edition, revised and enlarged]. M.: Ekzamen, 2007. Available at: http://bookre.org/reader?file=470762&pg=1 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 114, no. 1, pp. 976–1024. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021807110899 [in English].

[4] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. *Osnovy tekhnicheskoi diagnostiki* [Foundations of Technical Diagnostics]. M.: Energiya, 1981. Available at: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html [in Russian].

[5] Mironovskii L.A. *Funktsional'noe diagnostirovanie dinamicheskikh sistem* [Functional Diagnosis of Dynamic Systems]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1980, Issue 8, pp. 96–121. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=7158&option_lang=rus [in Russian].

[6] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. *Strukturnye i algoritmicheskie aspekty modelirovaniya dlya zadach upravleniya* [Structural and Algorithmic Aspects of Modeling for Control Problems]. M.: Izd-vo MGU, 1983. [in Russian].

[7] Chikin M.G. *Sistemy s fazovymi ogranicheniyami* [Phase-constrained systems]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1987, Issue 10, pp. 38–46. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid==4566&option_lang=rus [in Russian].

[8] Zhukov V.P. *O dostatochnykh i neobkhodimykh usloviyakh asimptoticheskoi ustoichivosti nelineinykh dinamicheskikh sistem* [Sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of nonlinear dynamical systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1994, Issue 3, pp. 321–330. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=3855&option_lang=rus [in Russian].

[9] Zhukov V.P. *O dostatochnykh i neobkhodimykh usloviyakh grubosti nelineinykh dinamicheskikh sistem v smysle sokhraneniya kharaktera ustoichivosti* [On the sufficient and necessary conditions for robustness of the nonlinear dynamic systems in terms of stability retention]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2008, Volume 69, Issue 1, pp. 27–35. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117908010037 [in Russian].

[10] Zhukov V.P. *O reduktsii zadachi issledovaniya nelineinykh dinamicheskikh sistem na ustoichivost' vtorym metodom Lyapunova* [Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2005, Vol. 66, Issue 12, pp. 1916–1928. DOI: https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9 [in Russian].

[11] Borisenok I.T., Shamolin M.V. *Reshenie zadachi differentsial'noi diagnostiki metodom statisticheskikh ispytanii* [Solving the Problem of Differential Diagnostics by the Method of Statistical Tests]. *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin], 2001, no. 1, pp. 29–31. [in Russian].

[12] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. *Oper. Res. Lett.*, 2003, Vol. 31, no. 3, pp. 167–175. Available at: https://web.iem.technion.ac.il/images/user-files/becka/papers/3.pdf [in English].

[13] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, Vol. 12, No. 1, pp. 79–108. DOI:10.1137/S1052623499354564 [in English].

[14] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *Journal of Machine Learning Research*, 2016, no. 17(153), pp. 1–43. Available at: arXiv:1503.01243 [in English].

[15] Shamolin M.V. *Diagnostika girostabilizirovannoi platformy, vklyuchennoi v sistemu upravleniya dvizheniem letatel'nogo apparata* [Diagnostics of Gyro-Stabilized Platform, Included in the Aircraft Motion Control System]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2011, Vol. 33, no. 3, pp. 121–126. Available at: https://www.emodel.org.ua/images/em/all-pdf/11-3.pdf [in Russian].

[16] Shamolin M.V. *Diagnostika dvizheniya letatel'nogo apparata v rezhime planiruyushchego spuska* [Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2010, Vol. 32, no. 5, pp. 31–44. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/61677 [in Russian].

[17] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1968, Vol. 6, No. 2, pp. 194–214. URL: https://arxiv.org/abs/1706.09142.

[18] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 2014, Vol. 50, no. 3, pp. 2119–2326.

[19] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, April 2015, Vol. 78, Issue 1, pp. 159–179. DOI: https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5 [in English].

[20] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematica*, November 2002, Volume 74, Issue 2, pp. 155–175. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1020669212384 [in English].

[21] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Mathematical Methods of Operations Research*, December 2009, Vol. 70, pp. 567–596. DOI: https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7 [in English].

[22] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. *Foundations and Trends in Networking*, 2008, Vol. 2, no. 4, pp. 381–533. DOI: 10.1561/1300000009 [in English].

[23] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2009, Vol. 54, no. 10, pp. 2328–2340 [in English].

[24] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, Vol. 29, no. 6, pp. 1251–1287. DOI: 10.1137/0329065 [in English].

[25] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, Vol. 122-124, pp. 23–64. DOI: 10.1016/0024-3795(89)90646-0 [in English].

[26] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Systems & Control Letters*, 2002, Vol. 46, Issue 5, pp. 323–342. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0 [in English].

[27] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms. *International Journal of Control*, 1985, Vol. 42, pp. 65–70. DOI: https://doi.org/10.1080/00207178508933346.

[28] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems. *International Journal of Control*, 1976, 23(1), pp. 1–16. DOI: 10.1080/00207177608922133.

[29] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, Vol. 425, no. 2-3, pp. 404–433. DOI: 10.1016/j.laa.2006.09.029.

[30] Tang X., Wang S. A Low Hardware Overhead Self-diagnosis Technique Using ReedSolomon Codes for Self-repairing Chips. *IEEE Transactions on Computers*, 2010, Volume 59, Issue 10, pp. 1309–1319. DOI: 10.1109/TC.2009.182.