УДК 519.999
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-21-31

Дата поступления статьи: 24/*XII*/2018
Дата принятия статьи: 18/*I*/2019

А.В. Дюжева

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ I РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© *Дюжева Александра Владимировна* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 224.
E-mail: aduzheva@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3284-5302

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка в прямоугольнике. В уравнении присутствует как смешанная производная, так и производная четвертого порядка по пространственной переменной. Интегральное условие является условием первого рода, которое приводит к трудностям в исследовании разрешимости задачи. Одним из успешных методов преодоления трудностей такого плана является переход от условий первого рода к условиям второго рода. В статье доказана эквивалентность условий первого рода условиям второго рода для данной задачи. Получены условия на коэффициенты уравнения и входные данные, гарантирующие существование единственного обобщенного решения поставленной задачи. Доказательство теоремы базируется на возможности эквивалентного перехода от условия первого рода, свойствах пространств Соболева, априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, начально-краевая задача, нелокальные условия, псевдогиперболическое уравнение, уравнения Рэлея — Бишопа, уравнение четвертого порядка, нелокальные граничные условия, интегральные условия, обобщенное решение, уравнение в частных производных четвертого порядка.

Цитирование. Дюжева А.В. Задача с интегральным условием I рода для уравнения четвертого порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 21–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-21-31.

UDC 519.999
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-21-31

Submitted: 24/*XII*/2018
Accepted: 18/*I*/2019

A.V. Dyuzheva

A PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION OF THE FIRST KIND FOR AN EQUATION OF THE FOURTH ORDER

© *Dyuzheva Alexandra Vladimirovna* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.
E-mail: aduzheva@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3284-5302

ABSTRACT
The article deals with a non-local problem with an integral condition for fourth-order pseudo-hyperbolic equation. The equation contains both a mixed derivative and a fourth order derivative in the spatial variable. The integral condition is a condition of the first kind, which leads to difficulties in the study of solvability of a problem. One of the successful methods of overcoming the difficulties of such a plan is the transition from the conditions of the first kind to the conditions of the second kind. The article proves the equivalence of the conditions of the first kind to the conditions of the second kind for this problem. The conditions on the coefficients of the equation and the input data are obtained and they guarantee the existence of a single problem solving. In the literature, such an equation is called the Rayleigh-Bishop equation.

Key words: Sobolev type equations, initial-boundary value problem, nonlocal conditions, pseudo-hyperbolic equation, Rayleigh – Bishop equations, fourth-order equation.

Citation. Dyuzheva A.V. *Zadacha c integral'nym usloviem I roda dlya uravneniya chetvertogo poryadka* [A problem with an integral condition of the first kind for an equation of the fourth order]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 1, pp. 21–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-21-31 [in Russian].

Введение

В настоящее время неклассические уравнения математической физики представляют возрастающий интерес, вызванный необходимостью решения прикладных задач, так как такие уравнения позволяют более точно описать процессы физики атмосферы, вибрации судов, физики полупроводников, внутренних волн в жидкости, ионно-звуковых волн в плазме и других. Как правило, существенные обобщения, расширяющие применимость математических моделей, описываются с помощью включения в уравнения производных высшего порядка. Обзору таких моделей посвящена работа [18] и список литературы в ней. Такие параметры важно учитывать, например, при моделировании процессов вибрации. Начало исследования таких уравнений положил С.Л. Соболев [6] в связи с исследованием задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. В [16] приведен список работ по исследованию задач для уравнений высокого порядка с классическими начально-краевыми условиями.

В большинстве теоретических исследований для изучения колебаний стержня использованы волновые уравнения второго порядка, давно ставшие классическими [29]. Как было показано Рэлеем [5], такие уравнения могут быть использованы для описания распространения волн в относительно тонких и длинных твердых стержнях. Модель, предложенная Рэлеем, отражает эффекты деформации стержня в поперечном направлении, что обуславливает в уравнении наличие смешенной производной четвертого порядка. В настоящее время для такого уравнения исследуется разрешимость краевых и нелокальных задач, вводится понятие обобщенного решения и доказывается его существование и единственность в выбранном пространстве [7]. Обобщением модели Рэлея является модель Рэлея — Бишопа [3], учитывающая как боковые смещения, так и напряжения сдвига в поперечном сечении. Это привело к появлению нового слагаемого в выражении для потенциальной энергии, пропорциональной модулю сдвига и второй производной от смещения стержня:

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{xtt})_x + (d(x)u_{xx})_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1}$$

Обзор уравнений для описания продольных колебаний представлен в [4]. Задачи для таких уравнений рассматривались в работах [13; 27; 30]. Заметим, что к уравнению вида (1) можно отнести и линеаризованное уравнение Бенни — Люка, описывающее двустороннее распространение длинных волн на мелководье с учетом поверхностного натяжения [17].

В последнее время все чаще многие физические процессы изучаются с использованием понятия нелокальности. В работе [1] обоснован данный подход.

Среди первых работ, посвященных исследованию задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными, следует отметить статьи Дж. Кэннона (J.R. Cannon) [2] и Л.И. Камынина [20], в которых изучался вопрос о разрешимости уравнения теплопроводности с нелокальными по пространственной переменной интегральными условиями. Исследования нелокальных задач для параболических уравнений были продолжены в работах Н.И. Ионкина [19], Л.А. Муравья и А.В. Филиновского, С.М. Алексеевой и Н.И. Юрчука, A. Bouziani, А.И. Кожанова, З.А. Нахушевой [24].

Начало систематического исследования нелокальных задач для эллиптических уравнений положено в статье А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [11].

Нелокальные задачи для гиперболических уравнений стали объектом исследований позже, в 90-х годах 20 века, и в настоящее время активно изучаются. Отметим работы Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили [12], A. Bouziani, А.И. Кожанова [22], Л.С. Пулькиной, С.А. Бейлина [9], М.В. Стригун [28]. Задачи с интегральными условиями по пространственной переменной для уравнений четвертого порядка по времени рассматривались в работах В.Б. Дмитриева [14; 15]. Интегральные условия для уравнений с доминирующей смешанной производной рассмотрены в [21]. Для уравнения четвертого порядка по пространственной переменной задача с интегральными условиями изучена в [10].

В предлагаемой статье рассмотрена нелокальная задача с интегральным граничным условием для уравнения Рэлея — Бишопа. Исследовано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи.

1. Постановка задачи

В ограниченной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x - (b(x,t)u_{xtt})_x + (d(x,t)u_{xx})_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{2}$$

и поставим для него следующие задачи:

найти решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

а также условия

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^l u dx = 0, \tag{5}$$

$$d(0,t)u_{xxx}(0,t) - a(0,t)u_x(0,t) - b(0,t)u_{xtt}(0,t) = 0. \tag{6}$$

Начальные условия (3) однородные, но это не ограничивает общности задачи. Условие (5) является нелокальным интегральным условием первого рода. Метод решения задач с такими условиями предполагает переход от условий первого рода к условиям второго рода [26]. Применим этот метод в нашем случае. Для этого предположим, что существует решение задачи (2)–(5) и проинтегрируем уравнение (2) по x от 0 до l, учитывая граничные условия. Учитывая условия (5) и (6), получим

$$d(l,t)u_{xxx}(l,t) - b(l,t)u_{xtt}(l,t) - a(l,t)u_x(l,t) + \tag{7}$$

$$+ \int_0^l cudx = \int_0^l fdx.$$

Пусть теперь $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2), условиям (3), (4), (6), (7). Интегрируя равенство (2) по $(0,l)$ и учитывая (6), (7), получим

$$\int_0^l u_{tt}dx = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\int_0^l udx = 0.$$

Из начальных условий следует

$$\int_0^l u(x,0)dx = 0, \quad \int_0^l u_t(x,0)dx = 0.$$

В силу единственности решения задачи Коши относительно функции $\int_0^l udx$ убеждаемся в выполнении условия (5). Таким образом, условия (5) и (7) эквивалентны, поэтому вместо задачи (2)–(6) будем рассматривать задачу (2)–(4), (6), (7)

Обозначим

$$W(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T), u_x \in W_2^1(Q_T)\},$$
$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x,t) : v \in W(Q_T), v(x,T) = 0\}.$$

Следуя известной процедуре [23], из тождества получим равенство

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t + au_xv_x - bu_{xt}v_{xt} - b_t(x,t)u_{xt}v_x + du_{xx}v_{xx} + cuv)dxdt+ \tag{8}$$
$$+\int_0^T v(l,t)\int_0^l cudxdt = \int_0^T\int_0^l fvdxdt + \int_0^T v(l,t)\int_0^l fdxdt.$$

Определение. Обобщенным решением задачи (2), (3), (6), (7) будем называть функцию $u(x,t) \in W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющую начальным данным (3) и тождеству (8) для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$.

Предположим, что коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям

$$a(x,0) + b_{tt}(x,0) \geqslant a_0 > 0,\ \ b(x,\tau) \geqslant b_0,\ \ d(x,0) \geqslant d_0 > 0.$$

Теорема. Если $f \in L_2(Q_T)$, $a \in C^1(\overline{Q}_T)$, $c \in C(\overline{Q}_T)$, $b, d \in C^2(\overline{Q}_T)$, то существует единственное обобщенное решение задачи (2)–(6).

Заметим, что в силу условий теоремы найдутся числа $k_i > 0$ такие, что

$$\max_{\overline{Q}_T}|a_t(x,t)| \leqslant k_1, \qquad \max_{\overline{Q}_T}|d_t(x,t)| \leqslant k_3,$$
$$\max_{\overline{Q}_T}|b_t(x,t)| \leqslant k_2, \qquad \max_{\overline{Q}_T}|b_{tt}(x,t)| \leqslant k_4, \tag{9}$$
$$\max_{\overline{Q}_T}|c(x,t)| \leqslant k_5.$$

2. Доказательство теоремы

Доказательство проведем в несколько этапов. Единственность докажем от противного, предполагая, что существует два решения поставленной задачи. Для доказательства существования сначала методом Галеркина построим приближенное решение задачи, затем получим априорные оценки, позволяющие выделить слабо сходящуюся последовательность и покажем, что ее предел и есть обобщенное решение задачи (2), (3), (6), (7).

Единственность. Предположим, что существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ рассматриваемой задачи. Тогда $u = u_1 - u_2$ — решение соответствующей однородной задачи. Это означает, что выполняется тождество:

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t + au_xv_x - bu_{xt}v_{xt} - b_tu_{xt}v_x + du_{xx}v_{xx} + cuv)dxdt+ \tag{10}$$
$$+\int_0^T v(l,t)\int_0^l cudxdt = 0.$$

Положим в тождестве (10)

$$v(x,t) = \{ \int_\tau^t u(x,t)d\eta, 0 \leqslant t \leqslant \tau, 0, \tau \leqslant t \leqslant T.$$

Выбранная таким образом функция принадлежит пространству $\hat{W}(Q_T)$. Заметим, что $u(x,t) = = v_t(x,t)$.

Сделаем некоторые преобразования в (10), интегрируя по частям. Тогда тождество (10) с выбранной функцией $v(x,t)$ примет вид:

$$\int_0^l[u^2(x,\tau) + [a(x,0) - b_{tt}(x,0)]v_x^2(x,0) + b(x,\tau)u_x^2(x,\tau) + d(x,0)v_{xx}^2(x,0)]dx =$$
$$= -\int_0^\tau\int_0^l[(a_t + b_{ttt})v_x^2dxdt - \frac{3}{2}b_tu_x^2 + d_tv_{xx}^2]dxdt+$$
$$+2\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l cudxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l cuvdxdt.$$

В силу неравенства Коши и ограниченности $c(x,t)$ справедливо неравенство:

$$2|\int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt| \leqslant k_4 \int_0^\tau \int_0^l (v^2+u^2)dxdt;$$

$$2|\int_0^\tau \int_0^l b_{tt}u_x v_x dxdt| \leqslant k_7 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^2+v_x^2)dxdt.$$

В силу неравенства Коши, Коши— Буняковского и [25] имеем

$$2|\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l cudxdt| \leqslant k_4 lT \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt+$$

$$+2l^2 k_4 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dxdt + 2k_4 \int_0^\tau \int_0^l v^2 dxdt.$$

Тогда, из (10) с помощью полученных неравенств и условий теоремы получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+[a(x,0)+b_{tt}(x,0)]v_x^2(x,0)+b(x,\tau)u_x^2+d(x,0)v_{xx}^2(x,0)]dx \leqslant \tag{11}$$

$$\leqslant C_1 \int_0^\tau \int_0^l [u^2+v_x^2+u_x^2+v_{xx}^2+v^2]dxdt,$$

где C_1 выражается через k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Для продолжения вывода оценок используем неравенство

$$v^2(x,t) \leqslant \tau \int_0^\tau u^2(x,t)dt,$$

вытекающее из представления функции $v(x,t)$.

Введем функцию $w(x,t)=\int_0^t u_x(x,\eta)d\eta$, которая позволяет получить следующее равенство:

$$v_x(x,t)=w(x,\tau)-w(x,t), \quad v_x(x,0)=w(x,\tau).$$

Так как функция $w_x=\int_0^t u_{xx}(x,\eta)d\eta$, то

$$v_{xx}(x,t)=w_x(x,\tau)-w_x(x,t), \quad v_x(x,0)=w(x,\tau).$$

Тогда (11) примет вид

$$\int_0^l [u^2+(a(x,0)+b_{tt}(x,0))w^2+b(x,\tau)u_x^2+d(x,0)w_x^2+v^2]dx \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant C_1 \int_0^\tau \int_0^l [u_x^2+v^2+u^2]dxdt+$$

$$+2C_1 \int_0^\tau \int_0^l (w^2+w_x^2)dxdt + 2C_1\tau \int_0^l w^2(x,\tau)+w_x^2(x,\tau)dx,$$

где $C_1=\max\{2k_7,\ k_4,\ k_4Tl+k_4+\tau,\ k_3+k_7,\ k_5\}$.

Как ранее было отмечено, $a(x,0)+b_{tt}(x,0) \geqslant a_0 > 0$, $b(x,\tau) \geqslant b_0$, $d(x,0) \geqslant d_0 > 0$. Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $a_0 - 2C_1\tau \geqslant \frac{a_0}{2}$ и $d_0 - 2C_1\tau \geqslant \frac{d_0}{2}$. Пусть $\nu = \min\{\frac{a_0}{2}, \frac{d_0}{2}\}$. Тогда для $\tau \in [0, \frac{\nu}{4C_1}]$ будет справедливо неравенство

$$m_0 \int_0^l [u^2+w^2+u_x^2+h^2+v^2]dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^\tau \int_0^l [u^2+w^2+u_x^2+h^2+v^2)dxdt,$$

где $m_0=\min\{\nu, b_0, 1\}$, $M=\max\{C_1, C_1T\}$. Применение к последнему неравенству леммы Гронуолла приводит к равенству $u(x,t)=0$ для $\forall t \in [0, \frac{\nu}{4C_1}]$. Повторяя рассуждения для $t \in [\frac{\nu}{4C_1}, \frac{\nu}{2C_1}]$, убедимся, что и на этом промежутке $u(x,t)=0$. Продолжив этот процесс, в конечное число шагов получим, что $u(x,t)=0$ на всем промежутке $[0,T]$. Итак, в условиях теоремы существует не более одного решения поставленной задачи.

Существование. Будем искать приближенное решение (2), (3), (6), (7) в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^m d_k(t)w_k(x), \tag{13}$$

где $\{w_k(x)\}_1^\infty$ — линейно независимая и полная в $W_2^1(0,l)$ система функций, в которой $w_k(x) \in C^2[0,l]$, из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j(x) + au_x^m w_j'(x) + bu_{xtt}^m w_j' + du_{xx}^m w_j'' + d_x u_{xx}^m w_j' + cu^m w_j)dx-$$

$$-w_j(l)\int_0^l [f - cu^m]dx = \int_0^l f(x,t)w_j dx. \tag{14}$$

Дополнительно потребуем, чтобы $(w_k, w_l)_{L_2} = \delta_{kl}$. Это условие не ограничивает общности, но упрощает выкладки. Подставим (13) в (14) и получим

$$\int_0^l [d'' w_k w_j + ad_k w_k' w_j' + bd_k'' w_k' w_j' + dd_k w_k'' w_j'' + cd_k w_k w_j]dx+$$

$$+w_j(l)\int_0^l cd_k w_k dx = w_j(l)\int_0^l f dx + \int_0^l f w_j dx.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^m [A_{jk} d_j'' + B_{jk} d_k(t)] = f_j, \tag{15}$$

где

$$A_{kj}(t) = \int_0^l [w_k w_j + b w_k' w_j']dx;$$

$$B_{kj}(t) = \int_0^l [a w_k' w_j' + d w_k'' w_j'' + c w_k w_j + c w_k w_j(l)]dx;$$

$$f_j(t) = \int_0^l [f w_j + f w_j(l)]dx.$$

Добавив начальные условия

$$d_j(0) = 0; \qquad d_j'(0) = 0, \tag{16}$$

получаем задачу Коши для системы (15). Для доказательства существования решения задачи Коши покажем сначала, что систему (15) можно разрешить относительно $d_k''(t)$. Рассмотрим квадратичную форму $q = \sum_{k,j=1}^m A_{kj}\xi_k\xi_j$ и убедимся в том, что матрица $A = (A_{kj})_{k,j=1}^m$ положительно определена. Использовав выражение коэффициентов A_{kj}, получим следующее представление квадратичной формы:

$$q = \sum_{k,j=1}^m \int_0^l [w_k(x)w_j(x)\xi_k\xi_j + b(x,t)w_k'(x)w_j'(x)\xi_k\xi_j]dx.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$q = \int_0^l [|\xi|^2 + b(x,t)|\nabla\xi|^2]dx \geqslant 0,$$

где $\xi = \sum_{k=1}^m w_k\xi_k$. Из условия теоремы следует, что $q > 0$. Следовательно, матрица A положительно определена, и поэтому система (15) разрешима относительно старших производных. Так как из условий теоремы следует ограниченность ее коэффициентов и принадлежность правой части пространству $L_2(Q)$, то задача Коши (15), (16) разрешима и $d''(t) \in L_2(Q_T)$.

Итак, в силу разрешимости задачи (15), (16) последовательность приближенных решений задачи (2)–(6) построена.

Априорная оценка. На следующем шаге доказательства покажем, что из построенной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторой функции из $W(Q_T)$. Для этого нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и переходим.

Умножим преобразованное выражение (14) на $d_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. В результате получим:

$$\int_0^\tau \int_0^l [u_{tt}^m u_t^m + au_x^m u_{xt}^m + bu_{xtt}^m u_{xt}^m + du_{xx}^m u_{xxt}^m + cu^m u_t^m]dxdt+$$

$$+\int_0^\tau \int_0^l cu^m u_t^m(l,t)dxdt = \int_0^\tau \int_0^l f(x,t)[u_t^m + u_t^m(l,t)]dxdt.$$

Проинтегрируем по частям, как при доказательстве единственности, и учитывая условия теоремы, приходим к равенству

$$\int_0^l (u_t^m)^2 + a(ux)^2 + b(u_{xt}^m)^2 + d(u_{xx}^m)^2 dx = \tag{17}$$

$$= \int_0^\tau \int_0^l a_t(u_x^m)^2 dxdt + \int_0^\tau \int_0^l b_t(u_{xt}^m)^2 dxdt + \int_0^\tau \int_0^l d_t(u_{xx}^m)^2 dxdt -$$
$$-2\int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dxdt - 2\int_0^\tau \int_0^l cuv(l,t) dxdt + 2\int_0^\tau \int_0^l f[u + u_t(l,t)]dxdt.$$

Оценим правую часть (17). Используя те же неравенства, что и при доказательстве единственности, получим

$$\int_0^l (u_t^m)^2 + a(ux)^2 + b(u_{xt}^m)^2 + d(u_{xx}^m)^2 dx \leqslant \tag{18}$$
$$\leqslant C_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2] dxdt + C_2 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt.$$

Прибавим к обеим частем последнего соотношения неравенство [8]

$$(u^m(x,\tau))^2 \leqslant \tau \int_0^\tau (u_t^m(x,t))^2 dt,$$

получим

$$\int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u^m)^2] dx \leqslant \tag{19}$$
$$\leqslant M_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2] dxdt + M_2 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt.$$

где $C_3 = C_2(1+\tau)$. Обозначим $m_0 = \{1, a_0, b_0, d_{\min}, c_0\}$, $M_1 = \frac{C_1}{m_0}$, $M_2 = \frac{C_3}{m_0}$. Применим к (19) лемму Гронуолла, тогда неравенство примет вид

$$\int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u^m)^2] dx \leqslant M_2 e^{M_1\tau} \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt,$$

так как по условию теоремы функция $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ограничена. Пусть она ограничена некоторым числом μ. Тогда получим неравенство

$$\int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u^m)^2] dx \leqslant M_3 e^{M_1\tau}, \tag{20}$$

где $M_3 = M_2\mu$. Интегрируя (20) по τ от 0 до T, получим

$$\int_0^T \int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u^m)^2] dx \leqslant \frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1).$$

Обозначив $L = \frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1)$, перепишем последнее неравенство

$$\int_0^T \int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u^m)^2] dx \leqslant \frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1). \tag{21}$$

Из (21) следует оценка

$$||u^m(x,t)||^2_{W_2^1(Q_T)} \leqslant L. \tag{22}$$

Так как пространство $W_2^2(Q_T)$ гильбертово, то оценка (22) позволяет утверждать, что из построенной последовательности приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в норме $W_2^1(Q_T)$ подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение.

Докажем теперь, что предел последовательности приближенных решений удовлетворяет тождеству (8). Для этого умножим каждое из соотношений (14) на $\delta_l(t) \in W_2^1(0,t), \delta_l(T) = 0$; обозначим $\eta(x,t) = \sum_{l=1}^m \delta_l(t) w_l(x)$. Полученные равенства просуммируем по l от 1 до m и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t^m \eta_t + u_x^m \eta_x + b u_{xt}\eta_{xt} + d u_{xx}\eta_{xx} + d_x u_{xx}\eta_x + cu\eta) dxdt - \tag{23}$$
$$-\int_0^T \int_0^l [f - cu]\eta(l,t) dxdt - \int_0^T \int_0^l b_t(x,t) u_{xt}\eta_x dxdt = \int_0^T \int_0^l f\eta dxdt.$$

Зафиксировав в (23) $\eta(x,t)$, перейдем к пределу и увидим, что тождество (8) выполняется для предельной функции $u(x,t)$. Однако еще нельзя утверждать, что $u(x,t)$ — искомое обобщенное решение, так как тождество (8) пока выполняется не для всех функций $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$, а только для функций вида $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m \delta_j(t) w_j(x)$. Но множество всех таких функций плотно в $\hat{W}(Q_T)$ (см. [23, с. 215]), поэтому утверждение о существовании решения задачи из пространства $W_2^1(Q_T)$ доказано полностью.

Литература

[1] Bazant Z., Jirasek M. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress // J. Eng. Mech. 2002. Vol. 128. № 11. P. 1119–1149. DOI: 10.1061/(ASCE) 0733-9399(2002)128:11(1119).

[2] Cannon J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. № 2. P. 155–160. URL: https://www.ams.org/journals/qam/1963-21-02/S0033-569X-1963-0160437-3/S0033-569X-1963-0160437-3.pdf.

[3] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration // N.Y.: Wiley. 1992. P. 158–184.

[4] Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars / I. Fedotov [et al.] // The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. № 7(2). P. 1–18. URL: https://www.researchgate.net/publication/235177775_Hyperbolic_Models_Arising_in_the_Theory_of_Longitudinal_Vibration_of_Elastic_Bars.

[5] Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. С. 273–274. URL: http://bookre.org/reader?file=580020&pg=1.

[6] Sobolev S.L. On a New Problem of Mathematical Physics // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1954. № 18(1). P. 3–50. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=3488&option_lang==eng.

[7] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3(114). С. 9–19. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=vsgu&paperid=347&wshow=paper&option_lang=rus.

[8] Бейлин А. Б., Пулькина Л.С. Задача с нелокальными динамическими условиями для уравнения колебаний толстого стержня // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2017. № 4(23). С. 7–18. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18.

[9] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2005. С. 37–43. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/invconf/nemp/2005/articles/beilin.pdf.

[10] Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 10(121). С. 26–37. URL: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4507.

[11] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях эллиптических задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=34529&option_lang=rus.

[12] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решение нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. № 1(12). С. 95–103. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=832&option_lang=rus.

[13] Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений //Сибирский математический журнал. 2015. № 6(56). С. 1290–1303. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.607.

[14] Дмитриев В.Б. О единственности решения нелокальной задачи с нелинейным интегральным условием для уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 6(107). С. 13–20. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=372&option_lang=rus.

[15] Дмитриев В.Б. Краевая задача с нелокальными граничными условиями для уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 32–49. URL: https://lyceum.ssau.ru/index.php/est/article/view/4256.

[16] Егоров И.Е., Федотов В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.

[17] Замышляева А.А. Об аналитическом исследовании математической модели Бенни — Люка // Математические заметки ЯГУ. 2013. № 2(20). С. 57–65. URL: https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/2013.

[18] Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2014. № 2(7). С. 5–27. URL: https://dspace.susu.ru/handle/0001.74/5212.

[19] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. № 2(XII). С. 294–304. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=2993&option_lang=rus.

[20] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1.

[21] Кириченко С.В. Об одной нелокальной задаче для уравнения четвертого порядка с доминирующей смешанной производной // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. № 2. С. 26–31. DOI: http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-26-31.

[22] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. № 9(42). С. 1166–1179. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023.

[23] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 210 с. URL: http://bookfi.net/book/442669.

[24] Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типа дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд-во Учреждения РАН Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 2011. 196 с.

[25] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Изв. вузов. Сер.: Матем. 2012. № 10. С. 41–48. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12100039.

[26] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Сер.: Матем. 2012. № 4. С. 74–83. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081.

[27] Постнов В.А., Калинин В.С., Ростовцев Д.М. Вибрация корабля. Л.: Судостроение, 1983. 73 с. URL: http://bookfi.net/book/661639.

[28] Стригун С.В. Начально-краевая задача для одномерного гиперболического уравнения с интегральными граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2011. № 8(89). С. 95–101. URL: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4810.

[29] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с. URL: http://bookfi.net/book/542871.

[30] Федотов И.А, Полянин А.Д., Шаталов М.Ю., Тенкам Э.М. Продольные колебания стержня Рэлея — Бишопа // ДАН. 2010. № 5(435). С. 613–618. URL: http://naukarus.com/prodolnye-kolebaniya-sterzhnya-releya-bishopa.

References

[1] Bazant Z., Jirasek M. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *J. Eng. Mech.*, 2002, Vol. 128, no. 11, pp. 1119–1149. DOI: 10.1061/(ASCE) 0733-9399(2002)128:11(1119) [in English].

[2] Cannon J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, Vol. 21, №2, pp. 155-160. Available at: https://www.ams.org/journals/qam/1963-21-02/S0033-569X-1963-0160437-3/S0033-569X-1963-0160437-3.pdf [in English].

[3] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992, pp. 158—184 [in English].

[4] Fedotov I. [et al.] Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars. *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7 (2), pp. 1-18. Available at: https://www.researchgate.net/publication/235177775_Hyperbolic_Models_Arising_in_the_Theory_of_Longitudinal_Vibration_of_Elastic_Bars [in English].

[5] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) *Teoriya zvuka* [Theory of Sound]. M.: GITTL, 1955, Vol. 1, pp. 273—274. Available at: http://bookre.org/reader?file=580020&pg=1 [in Russian].

[6] Sobolev S.L. On a New Problem of Mathematical Physics. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, no. 18(1), pp. 3–50. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=3488&option_lang=eng [in English].

[7] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniyakh sterzhnya s dinamicheskimi granichnymi usloviyami* [Task of longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 9–19. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=vsgu&paperid=347&wshow=paper&option_lang=rus [in Russian].

[8] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha s nelokal'nymi dinamicheskimi usloviyami dlya uravneniya kolebanii tolstogo sterzhnya* [A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2017, no. 4(23), pp. 7–18. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18 [in Russian].

[9] Beylin S.A. *Smeshannaya zadacha s integral'nym usloviem dlya volnovogo uravneniya* [Mixed problem with an integral condition for the wave equation]. Non-classical equations of mathematical physics. Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, 2005, pp. 37–43. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/invconf/nemp/2005/articles/beilin.pdf [in Russian].

[10] Beilina N.V. *Nelokal'naya zadacha s integral'nym usloviem dlya uravneniya chetvertogo poryadka* [Nonlocal problem with integral condition for a fourth order equation]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, Issue 10 (121), pp. 26–37. Available at: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4507.

[11] Bitsadze A.V., Samarskii A.A. *O nekotorykh prosteishikh obobshcheniyakh ellipticheskikh zadach* [On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems]. *DAN SSSR* [Dokl. Akad. Nauk SSSR], 1969, Vol. 185, no. 4, pp. 739-740. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=34529&option_lang=rus [in Russian].

[12] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Reshenie nelokal'nykh zadach dlya odnomernykh kolebanii sredy* [On the constructing of solutions of the non-local initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Matem. Mod.], 2000, no. 1(12), pp. 95–103. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=832&option_lang=rus [in Russian].

[13] Demidenko G.V. *Usloviya razreshimosti zadachi Koshi dlya psevdogiperbolicheskikh uravnenii* [Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations] *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2015, no. 6(56), pp. 1028–1041. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.607 [in Russian].

[14] Dmitriev V.B. *O edinstvennosti resheniya nelokal'noi zadachi s nelineinym integral'nym usloviem dlya uravneniya chetvertogo poryadka* [About the uniqueness of solution of nonlocal problem with non-linear integral condition for a fourth order equation]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2013, no. 6(107), pp. 13–20. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=372&option_lang=rus [in Russian].

[15] Dmitriev V.B. *Kraevaya zadacha s nelokal'nymi granichnymi usloviyami dlya uravneniya chetvertogo poryadka* [A non-local problem with integral condition for a fourth order equation]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2016, no. 3-4, pp. 32–49. Available at: https://lyceum.ssau.ru/index.php/est/article/view/4256 [in Russian].

[16] Egorov I.E., Fedotov V.E. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoi fiziki vysokogo poryadka* [Nonclassical equations of high-order mathematical physics]. Novosibirsk: Iz-vo VTs SO RAN, 1995, 133 p. [in Russian].

[17] Zamyshlyaeva A.A. *Ob analiticheskom issledovanii matematicheskoi modeli Benni-Lyuka* [An analytical investigation of linearized Benney-Luke model]. *Matematicheskie zametki YaGU* [Mathematical notes of NEFU], 2013, no. 2(20), pp. 57–65. Available at: https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/2013/ [in Russian].

[18] Zamyshlyaeva A.A. *Matematicheskie modeli sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* [Mathematical models of Sobolev-type equations of higher order]. *Vestnik YuUrGU. Ser.: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical modeling, programming and Computer Software"], 2014, no. 2(7), pp. 5-27. Available at: https://dspace.susu.ru/handle/0001.74/5212 [in Russian].

[19] Ionkin N.I. *Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem* [The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differ. Uravn.], 1977, no. 2(XII), pp. 294–304. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=2993&option_lang=rus

[20] Kamynin L.I. *Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi usloviyami* [A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1964, Vol. 4, no. 6, pp. 33-59. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1 [in Russian].

[21] Kirichenko S.V. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya uravneniya chetvertogo poryadka s dominiruyushchei smeshannoi proizvodnoi* [About one nonlocal task for the equation of the fourth order with the dominaiting mixed derivative]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2017, no. 2, pp. 26–31. DOI: http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-26-31 [in English].

[22] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nymi granichnymi usloviyami integral'nogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii* [On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2006, no. 9(42), pp. 1233–1246. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023 [in Russian].

[23] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Iz-vo Nauka, 1973, 210 p. Available at: http://bookfi.net/book/442669 [in Russian].

[24] Nakhusheva Z.A. *Nelokal'nye kraevye zadachi dlya osnovnykh i smeshennogo tipa differentsial'nykh uravnenii* [Non-local boundary-value problems for basic and mixed-type differential equations]. Nalchik: Iz-vo Ucherezhdeniya RAN Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN, 2011, 196 p. [in Russian].

[25] Pulkina L.S. [A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the first kind with time-dependent kernels]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], 2012, no. 10, pp. 26–37. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12100039 [in Russian].

[26] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokal'nymi usloviyami I i II roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kinds]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], 2012, Vol. 56, Issue 4, pp. 62–69. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081 [in Russian].

[27] Postnov V.A., Kalinin V.S., Rostovtsev D.M. *Vibratsiya korablya* [Ship vibration]. L.: Sudostroenie, 1983, 73 p. Available at: http://bookfi.net/book/661639 [in Russian].

[28] Strigun S.V. *Nachal'no-kraevaya zadacha dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya s integral'nymi granichnymi usloviem* [Initial-boundary value problem for one-dimension hyperbolic equation with integral boundary conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2011, no. 8(89), pp. 95–101. Available at: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4810 [in Russian].

[29] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 2004, 798 p. Available at: http://bookfi.net/book/542871 [in Russian].

[30] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu., Tenkam E.M. *Prodol'nye kolebaniya sterzhnya Releya-Bishopa* [Longitudinal oscillations of the Rayleigh-Bishop rod]. *DAN* [Proceedings of the Academy of Sciences], 2010, no. 5(435), pp. 613–618. Available at: http://naukarus.com/prodolnye-kolebaniya-sterzhnya-releya-bishopa [in Russian].