МАТЕМАТИКА

УДК 517.956
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-7-20
Дата поступления статьи: 15/I/2019
Дата принятия статьи: 20/II/2019

С.А. Алдашев

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© *Алдашев Серик Аймурзаевич* — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, 050100, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина, 125.
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8223-6900

АННОТАЦИЯ

Многомерные гиперболо-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерными вырождающимися гиперболическими уравнениями. Полагая, что в половине изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем вырождающиеся эллиптические уравнения. Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерных вырождающихся гиперболо-эллиптических уравнений. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления исследуемых краевых задач. Автором ранее изучена задача Дирихле для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящей от высоты рассматриваемой цилиндрической области. Однако задача Дирихле в цилиндрической области для многомерных вырождающихся гиперболо-эллиптических уравнений ранее не изучена.

В данной статье исследована задача Дирихле для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо-эллиптических уравнений. При этом существование и единственность решения зависят от высоты рассматриваемой цилиндрической области и от вырождения уравнения. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: корректность, задача Дирихле, цилиндрическая область, вырождение функции Бесселя, критерии.

Цитирование. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-эллиптических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 7–20. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-7-20.

UDC 517.956
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-7-20

Submitted: 15/I/2019
Accepted: 20/II/2019

S.A. Aldashev

THE CORRECTNESS OF A DIRICHLET TYPE PROBLEM FOR THE DEGENERATE MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC-ELLIPTIC EQUATIONS

© *Aldashev Serik Aimurzaevich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, full professor, chief Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125, Pushkin street, Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan.
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8223-6900

ABSTRACT

Multidimensional hyperbolic-elliptic equations describe important physical, astronomical, and geometric processes. It is known that the oscillations of elastic membranes in space according to Hamilton's prism can be modeled by multidimensional degenerate hyperbolic equations. Assuming that the membrane is in equilibrium in half the bend, from Hamilton's principle we also obtain degenerate elliptic equations. Consequently, vibrations of elastic membranes in space can be modeled as multidimensional degenerate hyperbolic-elliptic equations. When studying these applications, it is necessary to obtain an explicit representation of the investigated boundary value problems. The author has previously studied the Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic-elliptic equations, where the unique solvability of this problem is shown, which essentially depends on the height of the cylindrical domain under consideration. However, the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional degenerate hyperbolic-elliptic equations has not been studied previously. In this paper, the Dirichlet problem is studied for a class of degenerate multidimensional hyperbolic-elliptic equations. Moreover, the existence and uniqueness of the solution depends on the height of the considered cylindrical domain and on the degeneration of the equation. A uniqueness criterion for a regular solution is also obtained.

Key words: correctness, Dirichlet problem, cylindrical domain, degeneration of Bessel function, criteria.

Citation. Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle dlya vyrozhdayushchikhsya mnogomernykh giperbolo-ellipticheskikh uravnenii* [The correctness of a Dirichlet type problem for the degenerate multidimensional hyperbolic-elliptic equations]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 1, pp. 7–20. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-7-20 [in Russian].

Введение

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x=(x_1,...,x_m), m \geqslant 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерным вырождающимся гиперболическим уравнениям.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, то из принципа Гамильтона также получаем многомерные вырождающиеся эллиптические уравнения.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве вырождающихся многомерных гиперболо-эллиптических уравнений.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости [1–5] и в пространстве [6]. В данной статье показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболо-эллиптических уравнений однозначно разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

1. Постановка задачи и результаты

Пусть $\Omega_{\beta\gamma}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\beta>0$ и $t=\gamma<0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω_β и Ω_γ части области $\Omega_{\beta\gamma}$, а через $\Gamma_\beta,\Gamma_\gamma$ — части поверхности Γ, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$; σ_β — верхнее, а σ_γ — нижнее основание области $\Omega_{\beta\gamma}$. Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_β, Ω_γ представляющее множество $\{t=0,\ 0<|x|<1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\beta\gamma}$ рассмотрим взаимно сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболо-эллиптические уравнения

$$|t|^p\Delta_x u - sgnt u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0, \tag{1}$$

$$|t|^p\Delta_x \upsilon - sgnt \upsilon_{tt}-\sum_{i=1}^m a_i \upsilon_{x_i}-b\upsilon_t+d\upsilon=0, \tag{1*}$$

где $p=const>0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\geqslant 2$, $d(x,t)==c-\sum\limits_{i=1}^m a_{ix_i}-b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=1,2,...,m-2$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $\theta=(\theta_{m-1},...,\theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\beta\gamma}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\beta\gamma})\cap$ $\cap C^1(\Omega_{\beta\gamma})\cap C^2(\Omega_\beta\cup\Omega_\gamma)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\beta}=\varphi_1(r,\theta),\quad u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_2(t,\theta),\quad u\Big|_{\sigma_\gamma}=\varphi_2(t,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l=0,1,...$ пространства Соболева.

Имеет место [7].

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)|\leqslant c_1,\ \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leqslant c_2,\ \ c_1,\, c_2=const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i=1,...,m$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$, $H-$ единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_{\beta\gamma})\subset C(\overline{\Omega}_{\beta\gamma})$, $l\geqslant m+1$, $i=1,...,m$, $c(r,\theta,t)\leqslant 0$, $\forall(r,\theta,t)\in\Omega_\gamma$. Тогда справедливы

Теорема 1. Если $\varphi_1(r,\theta),\varphi_2(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $\psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\gamma)$, $l\geqslant\frac{3m}{2}$ и имеет место

$$\cos\mu_{s,n}\beta'\,\mathrm{sh}\,\mu_{s,n}\gamma'\neq\sin\mu_{s,n}\beta'\,\mathrm{ch}\,\mu_{s,n}\gamma',\ s=1,2,..., \tag{5}$$

то задача 1 однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\beta'=$ $=\frac{2}{2+p}\beta^{\frac{(2+p)}{2}}$, $\gamma'=\frac{2}{2+p}\gamma^{\frac{(2+p)}{2}}$.

Теорема 2. Решение задачи 1 единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).

Отметим, что эти теоремы при $p=0$ получены в [8].

2. Разрешимость задачи 1

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_β будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [9; 10]

$$t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^p + \sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in-1}^k - na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0.$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{9}$$

$$t^p\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),\quad n = 1,\quad k = \overline{1, k_1}, \tag{10}$$

$$t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\,\bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\quad k = \overline{1, k_n},\quad n = 2, 3, ...$$

Суммируя уравнение (10) от 1 до k_1, а уравнение (11) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (9), приходим к уравнению (8).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$ — решение системы (9)–(11), то оно является решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)–(11) можно представить в виде

$$t^p\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{ntt}^k = \overline{f}_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $\overline{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (7) с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \overline{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{1n}^k(t), k = \overline{1, k_n},\quad n = 0, 1, ... \tag{13}$$

В (12), (13) произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{1n}^k(t)$, получим

$$t^p\left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k\right) - \bar{\upsilon}_{ntt}^k = f_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\beta) = \varphi_{1n}^k(r), \quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{15}$$

$$f_n^k(r,t) = \bar{f}_n^k(r,t) + \psi_{1ntt}^k + \frac{\lambda_n t^p}{r^2}\psi_{1n}^k,\ \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_{1n}^k(\beta).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ и положив затем $r = r$, $x_0 = \frac{2}{2+p}t^{\frac{(2+p)}{2}}$, задачу (14), (15) приведем к следующей задаче:

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^k \equiv \upsilon_{\alpha,nrr}^k - \upsilon_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}\upsilon_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_{\alpha,n}^k = f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{16}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,\beta') = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \upsilon_{\alpha,n}^k(1,x_0) = 0, \tag{17}$$

где

$$0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1,\ \overline{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4},$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \upsilon_n^k\left[r, \left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right],\ f_{\alpha,n}^k(r,x_0) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} f_n^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (16), (17) ищем в виде

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0), \tag{18}$$

где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^{k,1} = f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{19}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta') = 0,\ \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0) = 0, \tag{20}$$

а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^{k,2} = 0, \tag{21}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta') = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0) = 0. \tag{22}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_{\alpha,s}(x_0), \tag{23}$$

при этом пусть

$$f_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{\alpha,s}(x_0) R_s(r),\ \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s R_s(r). \tag{24}$$

Подставляя (23) в (19), (20), с учетом (24) получим задачу

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{25}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{26}$$

$$M_\alpha T_{\alpha,s} \equiv T_{\alpha,sx_0x_0} + \frac{\alpha}{x_0}T_{\alpha,sx_0} + \mu T_{\alpha,s} = -a_{\alpha,s}(x_0),\ 0 < x_0 < \beta', \tag{27}$$

$$T_{\alpha,s}(\beta') = 0. \tag{28}$$

Ограниченным решением задачи (25), (26) является ([11])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{29}$$

где $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Наряду с уравнением (27) рассмотрим уравнение

$$M_0 T_{0,s} \equiv T_{0,sx_0x_0} + \mu T_{0,s} = -a_{0,s}(x_0),\ 0 < x_0 < \beta'. \tag{27*}$$

Как доказано в [9; 10], существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнения (27) и (27*).

Утверждение 1. Если $T^1_{0,s}(x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (27*), удовлетворяющее условиям

$$T^1_{0,s}(0)=\tau_s,\ T^1_{0,sx_0}(0)=0, \tag{30}$$

то функция

$$T^1_{\alpha,s}(x_0)=\gamma_\alpha\int_0^1 T^1_{0,s}(\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{T^1_{0,s}(x_0)}{x_0^2}\right] \tag{31}$$

при $\alpha>0$ является решением уравнения (27) с данными (30).

Утверждение 2. Если $T^2_{0,s}(x_0)$– решение задачи Коши для уравнения (27*), удовлетворяющее условиям

$$T^2_{0,s}(0)=\frac{\nu_s}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\ T^2_{0,sx_0}(0)=0, \tag{32}$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$T^2_{\alpha,s}(x_0)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 T^2_{0,s}(\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv\gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{T^2_{0,s}(x_0)}{x_0}\right] \tag{33}$$

является решением уравнения (27) с начальными данными

$$T^2_{\alpha,s}(0)=0,\ \lim_{x_0\to+0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}T^2_{\alpha,s}=\nu_s,$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$– гамма-функция, D^α_{0t}– оператор Римана — Лиувилля ([12]), а $q\geqslant 0$– наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q\geqslant m-1$.

При этом функции $a_{\alpha,s}(x_0)$ и $a_{0,s}(x_0)$ связаны формулами (31) в случае утверждения 1 и формулами (33) в случае утверждения 2.

В силу (31), (33) и учитывая обратимость оператора D^α_{0t}([12]), из условия (28) получим условие

$$T_{0,s}(\beta')=0. \tag{34}$$

Теперь будем решать задачу (27*), (34).

Общее решение уравнения (27*) представимо в виде [11]

$$T_{0,s}(x_0)=c_{1s}\cos\mu_{s,n}x_0+c_{2s}\sin\mu_{s,n}x_0+\frac{\cos\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{x_0}a_{0,s}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi-\frac{\sin\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{x_0}a_{0,s}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi, \tag{35}$$

где c_{1s}, c_{2s}– произвольные постоянные. Удовлетворив условию (34), будем иметь

$$c_{1s}\cos\mu_{s,n}\beta'+c_{1s}\sin\mu_{s,n}\beta'+\frac{\cos\mu_{s,n}\beta'}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{\beta'}a_{0,s}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi-\frac{\sin\mu_{s,n}\beta'}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{\beta'}a_{0,s}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi=0. \tag{36}$$

Подставляя (29) в (24), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f^k_{\alpha,n}(r,x_0)=\sum_{s=1}^\infty a_{\alpha,s}(x_0)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}^k_{1n}(r)=\sum_{s=1}^\infty b_sJ_\nu(\mu_{s,n}r). \tag{37}$$

Ряды (37) — разложение в ряды Фурье — Бесселя [13], если

$$a_{\alpha,s}(x_0)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}f^k_{\alpha,n}(\xi,x_0)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,$$

$$b_s=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}^k_{1n}(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{38}$$

где $\mu_{s,n}, s=1,2,...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядка возрастания их величины.

Далее, подставляя (23) в (21), (22), с учетом (24) получим задачу

$$M_\alpha T_{\alpha,s}\equiv T_{\alpha,sx_0x_0}+\frac{\alpha}{x_0}T_{\alpha,sx_0}+\mu T_{\alpha,s}=0,\ 0<x_0<\beta', \tag{39}$$

$$T_{\alpha,s}(\beta') = b_s,$$

которая в силу (33), (34) переходит к задаче

$$M_0 T_{0,s} \equiv T_{0,sx_0x_0} + \mu T_{0,s} = 0,\ 0 < x_0 < \beta', \tag{39*}$$

$$T_{0,s}(\beta') = b_s, \tag{40}$$

где b_s находится из (38).

Общее решение уравнения (39*) записывается в виде

$$T_{0,s}(x_0) = c'_{1s} \cos \mu_{s,n} x_0 + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} x_0. \tag{41}$$

Удовлетворив условию (40), получим

$$c'_{1s} \cos \mu_{s,n} \beta' + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} \beta' = b_s. \tag{42}$$

Теперь рассмотрим в области Ω_γ первую краевую задачу для уравнения

$$L_2 u \equiv (-t)^p \left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2} \right) + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0 \tag{43}$$

с условием

$$u\Big|_{\sigma_\gamma} = \varphi_2(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\gamma} = \psi_2(t,\theta). \tag{43*}$$

Решение задачи (43), (43*) будем искать в виде (7).

Подставляя (7) в (43), будем иметь

$$(-t)^p \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} (-t)^p \rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ (-t)^p \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} (-t)^p \rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \tag{44}$$

$$\left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} (-t)^p + \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0.$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$(-t)^p \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} (-t)^p \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{45}$$

$$(-t)^p \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} (-t)^p \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} (-t)^p \rho_1^k \bar{u}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \tag{46}$$

$$(-t)^p \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} (-t)^p \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} (-t)^p \rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \, \bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \right. \tag{47}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Суммируя уравнение (46) от 1 до k_1, а уравнение (47) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (45), приходим к уравнению (44).

Отсюда следует, что если $\left\{ \bar{u}_n^k \right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$. — решение системы (45)–(47), то оно является решением уравнения (44).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (45)–(47) можно представить в виде

$$(-t)^p \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) + \bar{u}_{ntt}^k = \bar{g}_n^k(r,t), \tag{48}$$

где $\bar{g}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{g}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (3) получим

$$\bar{u}_n^k(r,\gamma)=\overline{\varphi}_{2n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{2n}^k(t), k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{49}$$

В (48), (49) произведя замену $\bar{\omega}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{2n}^k(t)$, будем иметь

$$(-t)^p\left(\bar{\omega}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\omega}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\omega}_n^k\right)+\bar{\omega}_{ntt}^k=g_n^k(r,t), \tag{50}$$

$$\bar{\omega}_n^k(r,\gamma)=\varphi_{2n}^k(r),\quad \bar{\omega}_n^k(1,t)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{51}$$

$$g_n^k(r,t)=\bar{g}_n^k(r,t)-\psi_{2ntt}^k+\frac{\lambda_n(-t)^p}{r^2}\psi_{2n}^k,\ \varphi_{2n}^k(r)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r)-\psi_{2n}^k(\gamma).$$

Произведя замену $\bar{\omega}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\omega_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $x_0=\frac{2}{2+p}(-t)^{\frac{(2+p)}{2}}$, задачу (50), (51) приведем к следующей задаче:

$$L_\alpha\omega_{\alpha,n}^k\equiv\omega_{nrr}^k+\omega_{\alpha,nx_0x_0}^k+\frac{\alpha}{x_0}\omega_{\alpha,nx_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega_{\alpha,n}^k=g_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{52}$$

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,\gamma')=\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r),\quad \omega_{\alpha,n}^k(1,x_0)=0, \tag{53}$$

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0)=\omega_n^k\left[r,\left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right],\ g_{\alpha,n}^k(r,x_0)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}g_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (52), (53) ищем в виде

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0)=\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0), \tag{54}$$

где $\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha\omega_{\alpha,n}^{k,1}=g_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{55}$$

$$\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,\gamma')=0,\ \omega_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0)=0, \tag{56}$$

а $\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha\omega_{\alpha,n}^{k,2}=0, \tag{57}$$

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,\gamma')=\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r),\ \omega_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0)=0. \tag{58}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)V_{\alpha,s}(x_0), \tag{59}$$

при этом пусть

$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}d_{\alpha,s}(x_0)R_s(r),\ \tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_sR_s(r). \tag{60}$$

Подставляя (59) в (55), (56), с учетом (60) получим задачу

$$P_\alpha V_{\alpha,s}\equiv V_{\alpha,sx_0x_0}+\frac{\alpha}{x_0}V_{\alpha,sx_0}-\mu_{s,n}^2V_{\alpha,s}=d_{\alpha,s}(x_0),\ \gamma'<x_0<0, \tag{61}$$

$$V_{\alpha,s}(\gamma')=0. \tag{62}$$

Наряду с уравнением (61) рассмотрим уравнение

$$P_0V_{0,s}\equiv V_{0,sx_0x_0}-\mu_{s,n}^2V_{0,s}=d_{0,s}(x_0),\ \gamma'<x_0<0, \tag{61*}$$

для которых справедливы утверждения 1 и 2, при этом функции $d_{\alpha,s}(x_0)$ и $d_{0,s}(x_0)$ связаны формулами (31) и (33).

В силу (31), (33) из (62) получим условие

$$V_{0,s}(\gamma')=0. \tag{63}$$

Общее решение уравнения (61*) представимо в виде [11]

$$V_{0,s}(x_0)=\widetilde{c}_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}x_0+\widetilde{c}_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}x_0+\frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int_{x_0}^{0}d_{0,s}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi-\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int_{x_0}^{0}d_{0,s}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi, \tag{64}$$

удовлетворив условию (63), будем иметь

$$\widetilde{c}_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma'+\widetilde{c}_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma'+\frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma'}{\mu_{s,n}}\int\limits_{\gamma'}^{0}d_{0,s}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi-\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma'}{\mu_{s,n}}\int\limits_{\gamma'}^{0}d_{0,s}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi=0. \tag{65}$$

Подставляя (29) в (60), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}g^k_{\alpha,n}(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}d_{\alpha,s}(x_0)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}^k_{2n}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_sJ_\nu(\mu_{s,n}r),$$

которые являются рядами Фурье — Бесселя, если

$$\begin{gathered} d_{\alpha,s}(x_0)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}g^k_{\alpha,n}(\xi,x_0)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\\ e_s=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}^k_{2n}(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi. \end{gathered} \tag{66}$$

Далее, подставляя (59) в (57), (58), с учетом (60) получим задачу

$$P_\alpha V_{\alpha,s}\equiv V_{\alpha,sx_0x_0}+\frac{\alpha}{x_0}V_{\alpha,sx_0}-\mu^2_{s,n}V_{\alpha,s}=0,\ \gamma'<x_0<0,$$

$$V_{\alpha,s}(\gamma')=e_s,$$

которая в силу (31), (33) переходит к задаче

$$P_0V_{0,s}\equiv V_{0,sx_0x_0}-\mu^2_{s,n}V_{0,s}=0,\ \gamma'<x_0<0, \tag{67}$$

$$V_{0,s}(\gamma')=e_s, \tag{68}$$

где e_s находится из (66).

Общее решение уравнения (67) имеет вид

$$V_{0,s}(x_0)=\widetilde{c'}_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}x_0+\widetilde{c'}_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}x_0. \tag{69}$$

Удовлетворив условию (68), получим

$$\widetilde{c'}_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma'+\widetilde{c'}_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma'=e_s. \tag{70}$$

Так как искомое решение $u\in C(\overline{\Omega}_{\beta\gamma})\cap C^1(\Omega_\beta\gamma)$, то из (7), (23), (59) следует, что

$$T_{\alpha,s}(0)=V_{\alpha,s}(0)=\tau_s,$$

$$\lim_{x_0\to+0}x_0^\alpha T_{\alpha,sx_0}=\lim_{x_0\to-0}x_0^\alpha V_{\alpha,sx_0}=\nu_s,\ s=1,2\ldots.$$

Отсюда и из утверждений 1, 2 получим

$$\begin{gathered} T^1_{0,s}(0)=V^1_{0,s}(0)=\tau_s,\ T^1_{0,sx_0}(0)=V^1_{0,sx_0}(0)=0,\\ T^2_{0,s}(0)=V^2_{0,s}(0)=\tfrac{\nu_s}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)},\ T^2_{0,sx_0}(0)=V^2_{0,sx_0}(0)=0. \end{gathered} \tag{71}$$

Далее из (35), (64), (71) вытекает, что

$$c_{1s}=\tilde{c}_{1s}=\tau_s,\ c_{2s}=\tilde{c}_{2s}=\frac{\nu_s}{\mu_{s,n}}.$$

Аналогично из (41), (69), (71) $c'_{1s}=\tilde{c'}_{1s},\ c'_{2s}=\tilde{c'}_{2s}$.

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов $c_{1s}, c_{2s}, c'_{1s}, c'_{2s}$ из (36), (42), (65), (70) получим системы алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\mu_{s,n}(c_{1s}\cos\mu_{s,n}\beta'+c_{2s}\sin\mu_{s,n}\beta')=(\sin\mu_{s,n}\beta')\int\limits_0^{\beta'}a_{0,s}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi-(\cos\mu_{s,n}\beta')\int\limits_0^{\beta'}a_{0,s}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi,\\ &\mu_{s,n}(c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma'+c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma')=(\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma')\int\limits_{\gamma'}^0 d_{0,s}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi-(\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma')\int\limits_{\gamma'}^0 d_{0,s}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} c'_{1s}\cos\mu_{s,n}\beta'+c'_{2s}\sin\mu_{s,n}\beta'=b_s\\ c'_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma'+c'_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma'=e_s, \end{aligned}\right.$$

которые однозначно разрешимы, если выполняется условие (5).

Следовательно, решения задач (27*), (34)и (39*), (40) определяются по формулам (35) и (41).

Аналогичным образом по формулам (64), (69) находятся решения задач (61*), (63) и (67), (68).

Далее, используя утверждения 1 и 2, сначала решив задачу (9), (13) ($n=0$), а затем (10), (13) ($n=1$), найдем все $\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0)$ из (18).

Аналогично определяются все $\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0)$ из (54).

Итак, в областях Ω_β и Ω_γ есть

$$\int\limits_H \rho(\theta)L_1 udH=0,$$
$$\int\limits_H \rho(\theta)L_2 udH=0. \tag{72}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$,$\rho(\theta)\in C^\infty(H)-$плотна в $L_2(H)$, $T(t)\in V_1$, V_1- плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V==V_0\otimes H\otimes V_1-$плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ ([14]).

Отсюда и из (72), следует, что $\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)L_1ud\Omega_\beta=0$ и $L_1u=0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta$,

$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)L_2ud\Omega_\gamma=0$ и $L_2u=0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\gamma$.

Таким образом, решением задачи 1 в областях Ω_β и Ω_γ являются функции

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), t>0,\\ u(r,\theta,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\omega_{2n}^k(r,t)+\omega_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), t<0.\end{aligned} \tag{73}$$

Учитывая формулу $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$ [13], оценки, приведенные в работах [7; 15]

$$\begin{gathered} J_\nu(z)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\tfrac{\pi}{2}\nu-\tfrac{\pi}{4}\right)+0\left(\tfrac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu\geqslant 0,\\ |k_n|\leqslant c_1 n^{m-2},\ \left|\tfrac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{74}$$

а также леммы и ограничения на коэффициенты уравнения (1) и функции $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, аналогично [9; 10; 16] можно доказать, что полученное решение (73) принадлежит искомому классу $C(\bar\Omega_\beta\gamma)\cap C^1(\Omega_\beta\gamma)\cap C^2(\Omega_\beta\cup\Omega_\gamma)$.

Разрешимость задачи 1 показана.

3. Единственность решения задачи 1

Для этого сначала построим решения задач Дирихле в области Ω_β для уравнения

$$L_1^*\upsilon\equiv t^p\Delta_x\upsilon-\upsilon_{tt}-\sum_{i=1}^m a_i\upsilon_{x_i}-b\upsilon_t+d\upsilon=0 \tag{6*}$$

с данными

$$\upsilon\big|_{\sigma_\beta\cup\Gamma_\beta}=0,\ \upsilon\big|_S=\bar\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{75}$$

а также в области Ω_γ для уравнения

$$L_2^*\omega\equiv(-t)^p\Delta_x\upsilon-\upsilon_{tt}-\sum_{i=1}^m a_i\omega_{x_i}-b\omega_t+d\upsilon=0 \tag{43**}$$

с условиями

$$\omega\big|_{\sigma_\gamma\cup\Gamma_\gamma}=0,\ \omega\big|_S=\bar\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{76}$$

где $\bar\tau_n^k(r)\in G$, $G-$ множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1([0,1])\cap C^2((0,1))$. Очевидно,что $G-$ плотна в $L_2((0,1))$([14]). Решение задачи (6*), (75) будем искать в виде (7), где функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.3, функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений (9)–(11), где $\tilde a_{in}^k$, a_{in}^k, $\tilde b_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde a_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde b_n^k$,а $\tilde c_n^k$ на $\tilde d_n^k$, $i=1,\ldots,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,\ldots$.

Далее, из краевого условия (75), в силу (7), получим

$$\bar\upsilon_n^k(r,\beta)=\bar\upsilon_n^k(1,t)=0,\ \bar\upsilon_{nt}^k(r,0)=\bar\tau_n^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{77}$$

Как замечено, ранее что каждое уравнение системы (9)–(11) представимо в виде (12). В работе [16] показано, что задача (12), (77) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (6*), (75) в виде ряда (7) построено, которое, как доказано [16], в силу (74) принадлежит классу $C^1(\bar\Omega_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Аналогичным образом в виде (7) строится решение задачи (43**), (76).

Из определения сопряженных операторов $L_j,\ L_j^*,\ j=1,2$([17]) имеем

$$\upsilon L_1 u - uL_1^*\upsilon = -\upsilon P_1(u) + uP_1(\upsilon) - u\upsilon Q_1,$$
$$\omega L_2 u - uL_2^*\omega = -\omega P_2(u) + uP_2(\omega) - u\upsilon Q_2,$$

где

$$P_1(u) = t^p\sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos\left(N_1^{\perp}, x_i\right) - u_t\cos\left(N_1^{\perp}, t\right),\ P_2(\omega) = (-t)^p\sum_{i=1}^m \omega_{x_i}\cos\left(N_2^{\perp}, x_i\right) + \omega_t\cos\left(N_2^{\perp}, t\right),$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^m a_i\cos\left(N_1^{\perp}, x_i\right) - b\cos\left(N_1^{\perp}, t\right),\ Q_2 = \sum_{i=1}^m a_i\cos\left(N_2^{\perp}, x_i\right) - b\cos\left(N_2^{\perp}, t\right),$$

а $N_1^{\perp}$, $N_2^{\perp}-$ внутренние нормали к границам $\partial\Omega_\beta$, $\partial\Omega_\gamma$.

Далее, по формуле Грина получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\beta}(\upsilon L_1 u - uL_1^*\upsilon)d\Omega_\beta &= \int\limits_{\partial\Omega_\beta}\left[\left(\upsilon\tfrac{\partial u}{\partial N_1} - u\tfrac{\partial\upsilon}{\partial N_1}\right)M_1 + u\upsilon Q_1\right]ds,\\ \int\limits_{\Omega_\gamma}(\omega L_2 u - uL_2^*\omega)d\Omega_\gamma &= \int\limits_{\partial\Omega_\gamma}\left[\left(\omega\tfrac{\partial u}{\partial N_2} - u\tfrac{\partial\omega}{\partial N_2}\right)M_2 + u\omega Q_2\right]ds,\end{aligned} \tag{78}$$

$$\frac{\partial}{\partial N_1} = t^p\sum_{i=1}^m\cos\left(N_1^{\perp}, x_i\right) - \cos\left(N_1^{\perp}, t\right)\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial N_2} = (-t)^p\sum_{i=1}^m\cos\left(N_2^{\perp}, x_i\right) + \cos\left(N_2^{\perp}, t\right)\frac{\partial}{\partial t},$$

$$M_j = t^{2p}\sum_{i=1}^m\cos^2\left(N_j^{\perp}, x_i\right) + \cos\left(N_j^{\perp}, t\right),\ j=1,2.$$

Из (78), принимая во внимание однородные граничные условия (2), (3), а также условия (75), (76), будем иметь

$$\int\limits_S(\upsilon u_t - u\upsilon_t + bu\upsilon)ds = \int\limits_S(\omega u_t + u\omega_t + bu\omega)ds = 0$$

или

$$\int\limits_S u(\upsilon_t + \omega_t)ds = 0. \tag{79}$$

Поскольку $\upsilon_t\big|_{t=0} \neq -\omega_t\big|_{t=0}$ и линейная оболочка системы функций $\{\sqrt{r}J_\nu(\mu_s r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна $L_2(S)$, $t=0$ [14], то из (79) заключаем, что $u(x,0)=0,\ \forall x\in S$. Стало быть, по принципу Хопфа [18] $u=0$ в $\overline{\Omega}_\gamma$.

Отсюда, $u_t(x,0)=0,\ \forall x\in S$.

В силу единственности решения задачи Коши в области $\Omega_\beta : L_1u=0,\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ \forall x\in S$ [17] вытекает, что $u=0$ в $\overline{\Omega}_\beta$.

Теорема 1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 2

Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 вытекает, что решение задачи 1 единственно.

Пусть теперь условие (5) нарушено хотя бы для одного $s=l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, будем искать в виде ряда (7), то приходим к краевым задачам

$$M_0T_{0,l} \equiv T_{0,lx_0x_0} + \mu_{l,n}^2T_{0,s} = -a_{0,l}(x_0),\ 0<x_0<\beta',$$
$$T_{0,l}(\beta')=0,$$
$$P_0V_{0,l} \equiv V_{0,lx_0x_0} - \mu_{l,n}^2V_{0,s} = d_{0,l}(x_0),\ \gamma'<x_0<0,$$
$$V_{0,l}(\gamma')=0.$$

В силу (35), (64) их решениями являются функции

$$\begin{aligned}T_{0,l}(x_0) &= \cos\mu_{l,n}x_0 + \sin\mu_{l,n}x_0 + \tfrac{\cos\mu_{l,n}x_0}{\mu_{l,n}}\int\limits_0^{x_0}a_{0,l}(\xi)\sin\mu_{l,n}\xi d\xi - \tfrac{\sin\mu_{l,n}x_0}{\mu_{l,n}}\int\limits_0^{x_0}a_{0,l}(\xi)\cos\mu_{l,n}\xi d\xi,\\ V_{0,l}(x_0) &= \operatorname{ch}\mu_{l,n}x_0 + \operatorname{sh}\mu_{l,n}x_0 + \tfrac{\operatorname{ch}\mu_{l,n}x_0}{\mu_{l,n}}\int\limits_{x_0}^0 d_{0,l}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{l,n}\xi d\xi - \tfrac{\operatorname{sh}\mu_{l,n}x_0}{\mu_{l,n}}\int\limits_{x_0}^0 d_{0,l}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{l,n}\xi d\xi.\end{aligned} \tag{80}$$

Далее, из (31), (79) следует, что задачи (19), (20) и (55), (56) имеют ненулевые решения

$$\upsilon^k_{\alpha,n}(r,x_0)=\gamma_\alpha\sqrt{r}\left(\int\limits_0^1 T_{0,l}(\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\right)J_\nu(\mu_{l,n}r),$$

$$\omega^k_{\alpha,n}(r,x_0)=\gamma_\alpha\sqrt{r}\left(\int\limits_0^1 V_{0,l}(\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\right)J_\nu(\mu_{l,n}r),\ \nu=\frac{n+(m-2)}{2}.$$

Следовательно, нетривиальным решением однородной задачи 1 являются функции

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-p}r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon^k_{\alpha,n}(r,x_0)Y^k_{n,m}(\theta),t>0,$$

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-p}r^{\frac{(1-m)}{2}}\omega^k_{\alpha,n}(r,x_0)Y^k_{n,m}(\theta),t<0.$$

При этом из (74) следует, что они принадлежат искомому классу, если $p>\frac{3m}{2}$.

Литература

[1] Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 386–389. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid==21542&option_lang=rus.

[2] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // ДАН СССР. 1958. Т. 122. № 2. С. 167–170. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=23413&option_lang=rus.

[3] Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 696-698. Т. 333. № 1. С. 396–407.

[4] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17962288.

[5] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26. URL: http://naukarus.com/zadacha-dirihle-dlya-uravneniy-smeshannogo-tipa-v-pryamougolnoy-oblasti.

[6] Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 1. С. 190–191. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=908&option_lang=rus.

[7] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с. URL: http://bookre.org/reader?file=578442.

[8] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений // Нелинейные колебания. 2013. Т. 16. № 4. С. 435–451. URL: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID==&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR==NeKo_2013_16_4_3.

[9] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

[10] Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал: ЗКАТУ, 2007. 139 с.

[11] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с. URL: http://bookfi.net/book/543082.

[12] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1985. 301 с. URL: http://bookre.org/reader?file=469279.

[13] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 295 с. URL: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm.

[14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с. URL: http://bookre.org/reader?file=566839.

[15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с. URL: http://bookfi.net/book/542871.

[16] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Геллерстедта // Нелинейные колебания. 2015. Т. 18. № 1. С. 10–19. URL: https://www.imath.kiev.ua/ nosc/admin/private/published_files/1002/NOSC10022015181998.pdf.

[17] Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. Т. 4. Ч. 2. 550 с. URL: https://alleng.org/d/math-stud/math-st900.htm.

[18] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. URL: http://bookre.org/reader?file=793673.

References

[1] Shabat B.V. *Primery resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa* [Examples of solving the Dirichlet problem for equations of mixed-type]. *DAN SSSR* [Dokl. Akad. Nauk SSSR], 1957, Vol. 112, no. 3, pp. 386–389. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=21542&option_lang=rus [in Russian].

[2] Bitsadze A.V. *Nekorrektnost' zadachi Dirikhle dlya uravnenii smeshannogo tipa v smeshannykh oblastyakh* [Incorrectness of Dirichlet's problem for the mixed type of equations in mixed regions]. *DAN SSSR* [Dokl. Akad. Nauk SSSR], 1958, Vol. 122, no. 2, pp. 167–170. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=23413&option_lang=rus [in Russian].

[3] Soldatov A.P. *Zadachi tipa Dirikhle dlya uravneniya Lavrent'eva-Bitsadze* [Problems of Dirichlet type for the Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Dokl. RAN* [Doklady Mathematics], 1993, Vol. 332, no. 6, pp. 696–698; Vol. 333, no. 1, pp. 396–407 [in Russian].

[4] Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Tasks with an offset for partial differential equation]. M.: Nauka, 2006, 287 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17962288 [in Russian].

[5] Sabitov K.B. *Zadacha Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa v pryamougol'noi oblasti* [Dirichlet problem for a mixed-type equation in a rectangular domain]. *Dokl. RAN* [Doklady Mathematics], 2007, Vol. 413, no. 1, pp. 23–26. Available at: http://naukarus.com/zadacha-dirihle-dlya-uravneniy-smeshannogo-tipa-v-pryamougolnoy-oblasti [in Russian].

[6] Nakhushev A.M. *Kriterii edinstvennosti zadachi Dirikhle dlya uravnenii smeshannogo tipa v tsilindricheskoi oblasti* [A uniqueness condition of the Dirichlet problem for an equation of mixed type in a cylindrical domain]. *Differents. uravneniya* [Differential equations], 1970, Vol. 6, no. 1, pp. 190–191. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=908&option_lang=rus [in Russian].

[7] Mikhlin S.G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya* [Multidimensional singular integrals and integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1962, 254 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=578442 [in Russian].

[8] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlya odnogo klassa mnogomernykh giperbolo-ellipticheskikh uravnenii* [Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for one class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations]. *Nelineinye kolebaniya* [Nonlinear oscillations]. Kiev: IM NAN Ukrainy, 2013, Vol. 16, no. 4, pp. 435–451. Available at: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID==&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR==NeKo_2013_16_4_3 [in Russian].

[9] Aldashev S.A. *Kraevye zadachi dlya mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenii* [Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations]. Almaty: Gylym, 1994, 170 p. [in Russian].

[10] Aldashev S.A. *Vyrozhdayushchiesya mnogomernye giperbolicheskie uravneniya* [Degenerate multidimensional hyperbolic equations]. Oral: ZKATU, 2007, 139 p. [in Russian].

[11] Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. Available at: http://bookfi.net/book/543082 [in Russian].

[12] Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. M.: Vysshaya shkola, 1985, 301 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=469279 [in Russian].

[13] Bateman H., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions]. M.: Nauka, 1974, Vol. 2, 295 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm [in Russian].

[14] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M.: Nauka, 1976, 543 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=566839 [in Russian].

[15] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966, 724 p. Available at: http://bookfi.net/book/542871 [in Russian].

[16] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle i Puankare v tsilindricheskoi oblasti dlya vyrozhdayushchikhsya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii s operatorom Gellerstedta* [Correctness of the Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for degenerate multidimensional hyperbolic equations with the Gellerstedt operator].*Nelineinye kolebaniya* [Nonlinear oscillations]. Kiev: IM NAN Ukrainy, 2015, Vol. 18, no. 1, pp. 10–19. Available at: https://www.imath.kiev.ua/ nosc/admin/private/published_files/1002/NOSC10022015181998.pdf [in Russian].

[17] Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki* [The course of higher mathematics]. M.: Nauka, 1981, Vol. 4, no. 2, 550 p. Available at: https://alleng.org/d/math-stud/math-st900.htm [in Russian].

[18] Bers L., John F., Schechter M. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. M.: Mir, 1966. Available at: http://bookre.org/reader?file=793673 [in Russian].