УДК 517.928 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-33-40

В.А. Соболев, Е.А. Щепакина, Е.А. Тропкина[1]

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ[2]

Метод интегральных многообразий применяется для исследования многомерных систем дифференциальных уравнений. Он позволяет решать важную задачу понижения размерности. Часто задать инвариантное многообразие в явном виде не удается. В таких случаях для редукции систем дифференциальных уравнений возможно использовать параметрическое задание медленных инвариантных многообразий. При этом в качестве параметров могут выступать либо часть быстрых переменных, либо быстрые переменные, дополненные некоторым количеством медленных.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, редукция, интегральное многообразие, асимптотическое разложение, дифференциальные уравнения, параметризация, быстрые переменные, медленные переменные.

Цитирование. Соболев В.А., Щепакина Е.А., Тропкина Е.А. Параметризация инвариантных многообразий медленных движений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 33–40. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-33-40.

1. Предварительные сведения

Понижение размерности моделей является основным приемом исследования сложных систем любой природы. В статье рассматривается метод редукции системы, основывающийся на теории инвариантных многообразий, в которой исходная система заменяется другой системой на инвариантном многообразии меньшей размерности [1–3].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \tag{1.2}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^n$, ε – малый положительный параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$. Функции f и g определены и непрерывны по совокупности переменных при всех $x \in R^n$, $y \in D \subset R^m$ (D — некоторая область в пространстве R^m).

Под инвариантным многообразием системы (1.1), (1.2) будем понимать такую поверхность S, что для любой точки $(t_0, x_0, y_0) \in S$ траектория

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)),$$

для которой выполняется условие

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0, \qquad y(t_0, \varepsilon) = y_0,$$

принадлежит S для всех $t \in \mathbb{R}$.

Соболев Владимир Андреевич (v.sobolev@ssau.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Щепакина Елена Анатольевна (shchepakina@yahoo.com), кафедра технической кибернетики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Тропкина Елена Андреевна (elena_a.85@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научных проектов № 16-41-630524 р_а и № 16-41-630529 р_а и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013—2020).

Если медленное инвариантное многообразие притягивающее, то анализ исходной системы можно заменить исследованием медленной подсистемы. Асимптотические разложения инвариантных многообразий в окрестности медленных поверхностей были предложены в работах [3–9].

Будем предполагать, что для системы (1.1), (1.2) выполнены следующие условия:

I. Уравнение $g(x,y,0)=0$ имеет изолированное решение $y=\psi_0(x)$ при $x\in\mathbb{R}^n$.

II. В области $\Omega_0=\{(x,y,\varepsilon)|\ x\in\mathbb{R}^n,\ \|y-\psi_0(x)\|<\rho, 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$ функции f, g равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до $(k+2)$-го порядка включительно $(k\geqslant 0)$.

III. Собственные значения $\lambda_i(x)$ $(i=1,\dots,m)$ матрицы
$$B(x)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,\psi_0(x),0)$$
подчиняются неравенству
$$Re\lambda_i(x)\leqslant -2\gamma<0. \tag{1.3}$$

Положив в системе (1.1), (1.2) $\varepsilon=0$, получим вырожденную систему
$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,y,0),\\ 0&=g(x,y,0).\end{aligned} \tag{1.4}$$
При построении асимптотических разложений медленных инвариантных многообразий принято считать, что вырожденное уравнение позволяет найти явное выражение для медленной поверхности. Однако, часто уравнения, входящие в систему (1.4) оказываются либо трансцендентыми, либо полиномами высокой степени относительно y, что не позволяет найти решение этой системы в виде $y=\psi_0(x)$. Тогда для редукции систем дифференциальных уравнений возможно использовать параметрическое задание медленных инвариантных многообразий [1; 10]. Ниже рассмотрим три случая, в которых в качестве параметров могут выступать либо быстрые переменные, либо только часть быстрых переменных, либо быстрые переменные, дополненные некоторым количеством медленных.

2. Основные результаты

2.1. Случай равенства размерностей быстрых и медленных переменных

Пусть размерность вектора переменных x совпадает с размерностью вектора переменных y. Предположим, что систему (1.4) удается разрешить относительно x, а именно записать решение в виде $x= =\varphi_0(y)$ [1]. В качестве параметра удобно выбрать вектор быстрых переменных y. Тогда и медленное инвариантное многообразие целесообразно искать в параметрической форме
$$x=\varphi(y,\varepsilon). \tag{2.1}$$

Уравнение инвариантности получим, подставив (2.1) в (1.1). Имеем
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}g(\varphi,y,\varepsilon)=\varepsilon f(\varphi,y,\varepsilon). \tag{2.2}$$

Для всех функций, входящих в (2.2), запишем формальные асимптотические разложения по степеням малого параметра ε :
$$x=\varphi(y,\varepsilon)=\varphi_0(y)+\varepsilon\varphi_1(y)+...+\varepsilon^k\varphi_k(y)+..., \tag{2.3}$$
$$f\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k,y,\varepsilon\right)=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f^{(k)}(\varphi_0,...,\varphi_k,y),$$
$$g\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k,y,\varepsilon\right)=g^{(0)}(\varphi_0,y)+B(y)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g^{(k)}(\varphi_0,...,\varphi_{k-1},y),$$
где $g_x(\varphi_0,y,0)=B(y)$, $g^{(0)}(\varphi_0,y)=g(\varphi_0,y,0)$, матрица $B(y)$ — невырожденная [1, 2, 6].

С учетом этих разложений уравнение инвариантности (2.2) примет вид:
$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\left(g^{(0)}+B\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g^{(k)}\right)=\varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f^{(k)}.$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, при $\det\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)\neq 0$ однозначно находим коэффициенты асимптотического разложения функции x :

ε^0 : $g(\varphi_0, y, 0) = 0$. Решением системы является функция $\varphi_0(y)$.
ε^1 : $\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}B\right)^{-1}\left(f^{(0)} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}g^{(1)}\right)$.

$$...$$

ε^k : $\varphi_k = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}B\right)^{-1}\left[f^{(k-1)} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}g^{(k)} - \sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left(B\varphi_i + g^{(k-i)}\right)\right]$.

$$...$$

Таким образом, формула (2.3) задает медленное инвариантное многообразие системы (1.1), (1.2) в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого φ_k, $k = 0, 1, ...$ определены выше.

2.2. Размерность медленных переменных меньше размерности быстрых

Рассмотрим снова систему (1.1), (1.2). Предположим, что количество быстрых переменных превышает количество медленных. В этом случае система (1.4) содержит m уравнений и n неизвестных, причем $n < m$. Чтобы найти решение системы, в качестве неизвестных возьмем вектор переменных x ($\dim x = n$), дополненный $m - n$ компонентами вектора y. Благодаря этому в системе (1.4) количество уравнений и неизвестных будут совпадать. Предположим, что решение системы удается записать в параметрической форме

$$x = \varphi_0(y_2), \ \ y_1 = \psi_0(y_2),$$

где $y = (y_1, y_2)^T$, y_2 играет роль параметра, $\dim y_2 = n$.

Систему (1.1), (1.2) в таком случае удобнее переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}_1 &= g_1(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}_2 &= g_2(x, y_1, y_2, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Медленное инвариантное многообразие будем искать в параметрическом виде

$$x = \varphi(y_2, \varepsilon), \ \ y_1 = \psi(y_2, \varepsilon). \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в первые две подсистемы системы (2.4), получим уравнения инвариантности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon) = \varepsilon f(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_2}g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon) = g_1(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon).$$

Для функций $f(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon)$, $g_1(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon)$, $g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon)$, $\varphi(y_2, \varepsilon)$, $\psi(y_2, \varepsilon)$ запишем формальные асимптотические разложения:

$$\varphi(y_2, \varepsilon) = \varphi_0(y_2) + \varepsilon\varphi_1(y_2) + ... + \varepsilon^k\varphi_k(y_2) + ..., \tag{2.6}$$

$$\psi(y_2, \varepsilon) = \psi_0(y_2) + \varepsilon\psi_1(y_2) + ... + \varepsilon^k\psi_k(y_2) + ..., \tag{2.7}$$

$$f\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\psi_k, y_2, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, \psi_0, ..., \psi_k, y_2),$$

$$g_1\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\psi_k, y_2, \varepsilon\right) = g_1^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) + G_1(y_2)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k +$$
$$+ B_1(y_2)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k + \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_1^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, \psi_0, ..., \psi_{k-1}, y_2),$$

$$g_2\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\psi_k, y_2, \varepsilon\right) = g_2^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) + G_2(y_2)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k +$$
$$+ B_2(y_2)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k + \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_2^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, \psi_0, ..., \psi_{k-1}, y_2),$$

где $G_1(y_2) = g_{1x}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0)$, $G_2(y_2) = g_{2x}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0)$, $B_1(y_2) = g_{1y_1}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0)$, $g_1^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) = g_1(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0)$, $g_2^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) = g_2(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0)$.

Полученные формальные разложения подставим в уравнения инвариантности. Имеем

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_2}\left(g_2^{(0)}+G_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+B_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_2^{(k)}\right)=\varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f^{(k)},$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\psi_k}{\partial y_2}\left(g_2^{(0)}+G_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+B_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_2^{(k)}\right)=$$

$$=g_1^{(0)}+G_1\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+B_1\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_1^{(k)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Так при ε^0 получим:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}g_2^0=0,$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}g_2^0=g_1^0.$$

Пусть $\det\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\neq 0$. Следовательно, получим систему уравнений

$$g_1(\varphi_0,\psi_0,y_2,0)=0,$$

$$g_2(\varphi_0,\psi_0,y_2,0)=0,$$

решением которой являются функции $\varphi_0(y_2)$, $\psi_0(y_2)$.

При ε^1 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=f^{(0)},$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=G_1\varphi_1+B_1\psi_1+g_1^{(1)}.$$

Разрешим систему относительно $\varphi_1(y_2)$ и $\psi_1(y_2):$

$$\varphi_1=A_1^{-1}\left[g_1^{(1)}+B_1\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}g_2^{(1)}-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2-B_1\right)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\right)^{-1}f^{(0)}\right],$$

$$\psi_1=A_2^{-1}\left[g_1^{(1)}+G_1G_2^{-1}g_2^{(1)}-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2-G_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}G_2\right)^{-1}f^{(0)}\right],$$

где $A_1=B_1\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2-G_1$, $A_2=G_1G_2^{-1}B_2-B_1$.

...

Далее, при $\varepsilon^k:$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_k+B_2\psi_k+g_2^{(k)}\right)+...+\frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=f^{(k-1)},$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_k+B_2\psi_k+g_2^{(k)}\right)+...+\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=G_1\varphi_k+B_1\psi_k+g_1^{(k)}.$$

Следовательно,

$$\varphi_k=A_1^{-1}\left[g_1^{(k)}+B_1\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}g_2^{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2-B_1\right)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\right)^{-1}\left(f^{(k-1)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)\right)\right],$$

$$\psi_k=A_2^{-1}\left[g_1^{(k)}+G_1G_2^{-1}g_2^{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2-G_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}G_2\right)^{-1}\left(f^{(k-1)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)\right)\right],$$

Таким образом, удалось однозначно определить все коэффициенты разложения медленного инвариантного многообразия (2.6), (2.7).

2.3. Размерность медленных переменных больше размерности быстрых

Рассмотрим случай, когда размерность медленных переменных больше размерности быстрых. Обратим внимание на вырожденную подсистему (1.4). Она содержит m уравнений и n неизвестных, причем $n > m$. Тогда в качестве параметров следует взять все быстрые переменные y и $n-m$ медленных. Решение системы (1.4) можно записать в параметрической форме

$$x_1 = \varphi_0(x_2, y),$$

где $x = (x_1, x_2)^T$, x_2 и y – параметры, $\dim x_2 = n - m$.

Систему (1.1), (1.2) целесообразно будет переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g_2(x_1, x_2, y, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Медленное инвариантное многообразие будем искать также в параметрической форме

$$x_1 = \varphi(x_2, y, \varepsilon). \tag{2.9}$$

Для того, чтобы получить уравнение инвариантности, подставим соотношение (2.9) в систему (2.8):

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} f_2(\varphi, x_2, y, \varepsilon) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} g(\varphi, x_2, y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(\varphi, x_2, y, \varepsilon). \tag{2.10}$$

Разложив все функции, входящие в (2.10) в формальные ряды по степеням $\varepsilon:$

$$\varphi(x_2, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_2, y) + \varepsilon\varphi_1(x_2, y) + ... + \varepsilon^k\varphi_k(x_2, y) + ..., \tag{2.11}$$

$$f_1\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_1^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, x_2, y),$$

$$f_2\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_2^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, x_2, y),$$

$$g\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = g^{(0)}(\varphi_0, x_2, y) + B(x_2, y)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k + \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, x_2, y),$$

где $g_{x_1}(\varphi_0, x_2, y, 0) = G(x_2, y)$, получим

$$\varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_2^{(k)} + \sum_{k\geqslant 0}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\left(g^{(0)} + G\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k + \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g^{(k)}\right) = \varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_1^{(k)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При ε^0 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} g(\varphi_0, y, 0) = 0.$$

При $\det\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right) \neq 0$ решением системы является функция $\varphi_0(x_2, y)$.

При ε^1 получим:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(0)} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\left(G\varphi_1 + g^{(1)}\right) = f_1^{(0)}.$$

Следовательно, при $\det\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}G\right) \neq 0$ имеем

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}G\right)^{-1}\left(f_1^{(0)} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(0)} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} g^{(1)}\right).$$

$$...$$

Выражение при ε^k имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(k-1)} + ... + \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial x_2} f_2^{(0)} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\left(G\varphi_k + g^{(k)}\right) + ... + \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial y}\left(G\varphi_1 + g^{(1)}\right) = f_1^{(k-1)}.$$

Откуда

$$\varphi_k = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}G\right)^{-1}\left[f_1^{(k-1)} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} f^{(k-i-1)} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left(B\varphi_{k-i} + g^{(k-i)}\right) - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} g^{(k)}\right].$$

$$...$$

Таким образом, формула (2.11) задает медленное инвариантное многообразие системы (2.8) в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого φ_k, $k = 0, 1, ...,$ определены выше.

2.4. Пример

В качестве примера рассмотрим следующую систему, состоящую из трех уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ \varepsilon\dot{y} &= -y - e^y - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

В данном случае система имеет одну быструю переменную и две медленные. Положив $\varepsilon = 0$, получим вырожденную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ 0 &= -y - e^y - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Последнее уравнение системы (2.13) не может быть разрешено относительно y. Но можно заметить, что одна из медленных переменных выражается через быструю переменную и другую медленную:

$$x_1 = -x_2 - y - e^y.$$

Таким образом, в качестве параметров могут быть выбраны переменные x_2 и y. Тогда инвариантное многообразие следует искать в параметрическом виде

$$x_1 = \varphi(x_2, y, \varepsilon). \tag{2.14}$$

Уравнение инвариантности получим, подставив (2.14) в первое уравнение системы (2.12). Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon}(-y - e^y - \varphi - x_2) = x_2. \tag{2.15}$$

Разложим инвариантное многообразие (2.14) в асимптотический ряд по степеням малого параметра ε $(\varepsilon \to 0)$:

$$\varphi(x_2, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_2, y) + \varepsilon\varphi_1(x_2, y) + \varepsilon^2\varphi_2(x_2, y) + O(\varepsilon^3). \tag{2.16}$$

Подставим разложение (2.16) в уравнение инвариантности (2.15):

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \ldots\right)\left(-y - e^y - x_2 - \varphi_0 - \varepsilon\varphi_1 - \varepsilon^2\varphi_2 - \ldots\right) +$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \ldots\right)y = \varepsilon x_2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях параметра ε.

При ε^0 имеем:

$$-y - e^y - x_2 - \varphi_0 = 0.$$

Решением уравнения является функция

$$\varphi_0 = -y - e^y - x_2.$$

При ε^1 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}y - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\varphi_1 = x_2.$$

Выразим искомую функцию $\varphi_1(x_2, y)$:

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}y - x_2\right).$$

После подстановки значения для φ_0, имеем

$$\varphi_1 = \frac{y + x_2}{1 + e^y}.$$

Далее, при ε^2 :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}y - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\varphi_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\varphi_1 = 0.$$

Выразим функцию $\varphi_2(x_2, y)$:

$$\varphi_2 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}y - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\varphi_1\right).$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = \frac{1}{(1+e^y)^4}\left[(y+x_2)(1+e^y(1-y-x_2)) - y(1+e^y)^2\right].$$

Таким образом, получили асимптотическое приближение вида

$$x_1 = -y - e^y - x_2 + \varepsilon\frac{y+x_2}{1+e^y} + \varepsilon^2\frac{(y+x_2)(1+e^y(1-y-x_2)) - y(1+e^y)^2)}{(1+e^y)^4} + O(\varepsilon^3).$$

Выводы

В статье рассмотрена задача параметризации медленных инвариантных многообразий многомерных систем дифференциальных уравнений. Получены алгоритмы построения медленных инвариантных многообразий в случае различных размерностей быстрой и медленной переменных. Следует отметить, что медленные инвариантные многообразия используются для понижения размерности систем дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 319 с.

[2] Strygin V.V., Sobolev V.A. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin // Cosmic Research. 1976. № 14(3). С. 331–335. URL: http://adsabs.harvard.edu/abs/1976CosRe..14..331S.

[3] Кононенко Л.И., Соболев В.А. Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 6. С. 1264–1278. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02104713.

[4] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.

[5] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. The Method of Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics // Contributions to Differential Equations. 1963. № 2. pp. 123–196.

[6] Sobolev V.A. Decomposition of control systems with singular perturbations // Proc. 10th Congr. IFAC. Munich. 1987. Vol. 8. P. 172–176.

[7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: *Lect. Notes in Math.*, vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelber–London: Springer (2014). URL: https://www.springer.com/us/book/9783319095691.

[8] Соболев В.А., Тропкина Е.А. Асимптотические разложения медленных инвариантных многообразий и редукция моделей химической кинетики // Ж. выч. мат. и мат. физики. 2012. Т. 52. № 1. С. 81–96. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542512010125.

[9] Тропкина Е.А. Итерационный метод приближенного построения интегральных многообразий медленных движений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). С. 78–88. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgu171.

[10] Тропкина Е.А. Параметризация медленных инвариантных многообразий в модели распространения малярии // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 6(97). С. 66–74.

References

[1] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. *Reduktsiya modelei i kriticheskie yavleniya v makrokinetike* [Reduction of Models and Critical Phenomena in Macrokinetics]. M.: Fizmatlit, 2010, 319 p. [in Russian].

[2] Strygin V.V., Sobolev V.A. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin. *Cosmic Research*, 1976, no. 14(3), pp. 331–335. Available at: http://adsabs.harvard.edu/abs/1976CosRe..14..331S [in English].

[3] Kononenko L.I., Sobolev V.A. *(*Asimptoticheskie razlozheniya medlennykh integralnykh mnogoobrazii) [Asymptotic expansion of slow integral manifolds]. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1994, no. 35(6), pp. 1119–1132. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02104713 [in Russian].

[4] Vasilieva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushchenii* [Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations]. M.: Vyssh. shk., 1990, 208 p. [in Russian].

[5] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. The Method of Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics. *Contributions to Differential Equations*, 1963, no. 2, pp. 123–196.

[6] Sobolev V.A. Decomposition of control systems with singular perturbations. In: Proc. 10th Congr. IFAC. Munich, 1987, Vol. 8, pp. 172–176 [in English].

[7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: *Lect. Notes in Math.*, 2014, Vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelber–London: Springer. URL: https://www.springer.com/us/book/9783319095691 [in English].

[8] Sobolev V.A., Tropkina E.A. *Asimptoticheskie razlozheniya medlennykh invariantnykh mnogoobrazii i reduktsiya modelei khimicheskoi kinetiki* [Asymptotic expansions of slow invariant manifolds and reduction of chemical kinetics models]. *Zh. vych. mat. i mat. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2012, no. 52(1), pp. 75–89. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542512010125 [in Russian].

[9] Tropkina E.A. *Iteratsionnyi metod priblizhennogo postroeniya integralnykh mnogoobrazii medlennykh dvizhenii* [Iterative Method for Approxinate Construction of Slow Integral Manifolds]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2010, no. 4(78), pp. 78–88. Available at: http://mi.mathnet.ru/vsgu171 [in Russian].

[10] Tropkina E.A. *Parametrizatsiya medlennykh invariantnykh mnogoobrazii v modeli rasprostraneniya malyarii* [Parameterization of slow invariant manifolds in the model of the spread of malaria]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2012, no. 6(97), pp. 66–74 . Available at: http://mi.mathnet.ru/vsgu32 [in Russian].

V.A. Sobolev, E.A. Shchepakina, E.A. Tropkina[3]

PARAMETRIZATION OF INVARIANT MANIFOLDS OF SLOW MOTIONS[4]

The method of integral manifolds is used to study the multidimensional systems of differential equations. This approach allows to solve an important problem of order reduction of differential systems. If a slow invariant manifold cannot be described explicitly then its parametrization is used for the system order reduction. In this case, either a part of the fast variables, or all fast variables, supplemented by a certain number of slow variables, can play a role of the parameters.

Key words: singular perturbations, integral manifold, order reduction, asymptotic expansion, parametrization, differential equations, fast variables, slow variables.

Citation. Sobolev V.A., Shchepakina E.A., Tropkina E.A. *Parametrizatsiya invariantnykh mnogoobrazii medlennykh dvizhenii* [Parametrization of invariant manifolds of slow motions] [Parametrization of invariant manifolds of slow motions]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 33–40. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-33-40 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 26/*IX*/2018.
The article received 26/*IX*/2018.

[3] *Sobolev Vladimir Andreevich* (v.sobolev@ssau.ru), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Shchepakina Elena Anatolievna (shchepakina@yahoo.com), Department of Technical Cybernetics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Tropkina Elena Andreevna (elena_a.85@mail.ru), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

[4] The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Samara Region within the framework of research projects No. 16-41-630524 p_a and No. 16-41-630529 p_a and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the Samara University competitiveness improvement program (2013–2020).