УДК 511(075.8) DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-29-32

***В.В. Любимов, Р.В. Меликджанян***[1]

# РАСЧЕТ ЧИСЛА ПАЛИНДРОМОВ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

В работе рассматриваются симметричные числа в двоичной системе счисления, называемые палиндромами. Целью работы является вывод зависимости количества палиндромов от их разряда. Отдельно получены зависимости числа палиндромов для четных и нечетных разрядов.

**Ключевые слова:** палиндромы, двоичная система счисления, теория чисел, формула.

**Цитирование.** Любимов В.В., Меликджанян Р.В. Расчет числа палиндромов в двоичной системе счисления // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 29–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-29-32.

## Введение

Числовой палиндром — это натуральное число, которое читается слева направо и справа налево одинаково. Слово "палиндром" возникло в 17 веке (от др.-греч. $\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$ — "назад, снова" и др.-греч. $\delta\rho\acute{o}\mu o\varsigma$ — "бег, движение") [1]. Примерами палиндромов являются числа 101; 12321; 55688655 и т.д. В частности, в статье "Применение числовых палиндромов" Гундиной М.А. и Гусачека Д.А. на основе алгоритма итеративного процесса "перевернуть и сложить" исследовалось количество шагов получения палиндромов для чисел от 1 до 500 [2]. Существует мнение, пишет М. Гарднер, что описанная процедура в применении к любому целому числу даст палиндром после конечного числа сложений [3]. Но калифорнийский математик Чарльз Тригг сомневается в справедливости этого предположения. Среди чисел меньше 10000 он нашел 251 число, каждое из которых не дает палиндрома при первых ста сложениях. При этом наименьшее из этих чисел равно 196. Дьюи Дункан, показал, что в двоичной системе описанный процесс не всегда дает палиндром. Действительно, из двоичного числа 10110 никогда не получится палиндром.

Существуют так же палиндромные матрицы, которые подробно исследуются в следующих работах [4–6].

Наша же задача состоит в том, чтобы определить количество числовых палиндромов двоичной системы счисления для конкретного разряда. Далее кратко "Палиндром двоичной системы счисления" будет обозначаться ПДСС. Для ответа на этот вопрос разберемся в структуре ПДСС.

## 1. Структура ПДСС для нечетных разрядов

Исследование проведем на примере ПДСС 7 разряда. Запишем всевозможные их варианты. В результате получим:

1000001

1001001

1010101

1011101

1100011

1101011



*Любимов Владислав Васильевич* (vlubimov@mail.ru), кафедра высшей математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Меликджанян Регина Валерьевна* (melikdzhanyan99@mail.ru), Институт информатики, математики и электроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1110111

1111111

Число 7 разряда состоит из 7 цифр (в нашем случае, из нулей и единиц). Так как палиндром симметричен, следовательно, для 7 разряда первые и последние 3 цифры должны быть "зеркальными"; цифра же, стоящая посередине (четвертая), может быть любой для двоичный системы: либо 0, либо 1. На рисунке 1 представлено условное изображение палиндрома 7 разряда.

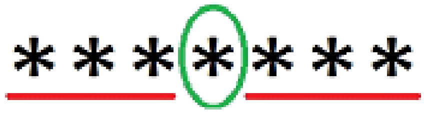

Рис. 1. Условное изображение палиндрома 7 разряда

На месте первых и последних трех цифр может стоять любая комбинация цифр 1 и 0, кроме той, где 0 стоит на первом месте, например, 000; 001; 010; 011, так как число не может начинаться с нуля. Из этого следует вывод, что задача нахождения количества ПДСС 7 разряда сводится к задаче нахождения количества всех существующих чисел двоичной системы счисления 3 разряда. Запишем всевозможные их варианты. В результате получаем:

100

101

110

111

Следовательно, их количество равно четырем.

Для того, чтобы понять, как связано количество чисел некого разряда с номером разряда, запишем числа в двоичной системе для первых четырех разрядов:

Разряд 1: 1

Разряд 2: 10; 11

Разряд 3: 100; 101; 110; 111

Разряд 4: 1000; 1001; 1010; 1011; 1100; 1101; 1110; 1111

Заметим, что с каждым разрядом количество чисел увеличивается в два раза.

Далее запишем формулу для вычисления количества существующих чисел двоичной системы счисления для $n$ разряда:

$J_n = 2^{n-1}$, $n$ — номер разряда

Вернемся к нашему палиндрому 7 разряда. Так как цифра, стоящая посередине (четвертая), может быть любой (для двоичной системы либо 0, либо 1), то количество палиндромов будет в два раза больше, чем значение $J_n$. Действительно, сначала перебираются варианты, когда посередине стоит нуль, затем — те же числа, когда посередине стоит единица.

Из данных рассуждений выведем формулу для определения количества палиндромов ***нечетных*** разрядов. Она примет следующий вид:

$$S_k = 2 * J_n,$$

где $k$ — нечетный номер разряда для палиндрома.

Пусть числа $n$ и $k$ зависят между собой следующим образом:

$n = \frac{k-1}{2}$, $k$ — нечетный номер разряда для палиндрома

Тогда получаем следующую формулу для определения количества палиндромов ***нечетных*** разрядов:

$$S_k = 2^{\frac{k-1}{2}}, \tag{1.1}$$

где $k$ — нечетный номер разряда для палиндрома.

## 2. Структура ПДСС для четных разрядов

Рассмотрим всевозможные палиндромы четных разрядов, в частности, для шестого разряда имеем:

100001

101101

111111

110011

Они также состоят из всех существующих чисел двоичной системы счисления третьего разряда, но их отличие заключается в отсутствии единицы или нуля посередине (т.к. количество цифр четное, оно нацело делятся на две симметричные части). На рисунке 2 представлено условное изображение палиндрома для шестого разряда.

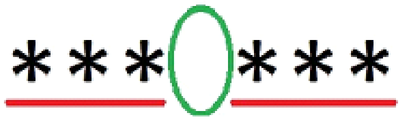

Рис. 2. Условное изображение палиндрома 6 разряда

Здесь количество палиндромов для четных разрядов $k^*$ равно количеству всех существующих чисел разряда $n^*$, из которых оно состоит.

Запишем формулу для определения количества палиндромов ***четных*** разрядов:

$$S_{k^*} = J_{n^*} = 2^{n^*-1},$$

где $n^* = \frac{k^*}{2}$, $k^*$ — четный номер разряда для палиндрома.

В окончательном варианте, формула примет вид:

$$S_{k^*} = 2^{\frac{k^*-2}{2}}, \tag{2.2}$$

где $k^*$ — четный номер разряда для палиндрома.

## Вывод

Таким образом, в работе изучена структура палиндромов двоичной системы. В итоге, мы установили, что количество палиндромов зависит от такого фактора, как четность и нечетность номера его разряда. Учитывая это, были получены формулы для расчета числа палиндромов нечетных и четных разрядов, соответственно:

$$S_k = 2^{\frac{k-1}{2}}, \ \ k = 2m+1, \ \ m = 0,1,2\ldots n$$

$$S_{k^*} = 2^{\frac{k^*-2}{2}}, \ \ k^* = 2m, \ \ m = 0,1,2\ldots n$$

## Литература


[1] Nishiyama Y. Numerical palindromes and the 196 problem // IJPAM. Vol. 80. № 3. 2012. P. 375–384. URL: https://ijpam.eu/contents/2012-80-3/9/9.pdf.

[2] Гундина М.А., Гусачек Д.А. Применение числовых палиндромов // IX Машеровские чтения: материалы Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 сентября 2015 г. Витебск: Изд-во ВГУ им. П.М. Машерова, 2015. С. 13–15.

[3] Гарднер М. Этот левый, правый мир. М.: Мир, 1967. 267 с.

[4] Iannazzo B., Meini B. Palindromic matrix polynomials, matrix functions and integral representations // Linear Algebra Appl. Vol. 434. Issue 1. 2011. P. 174–184. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.09.013.

[5] Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations / D.S. Mackey [et al.] // SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 28. 2006. P. 1029–1051. URL: http://eprints.maths.manchester.ac.uk/id/eprint/190.

[6] Gemignani L., Noferini V. The Ehrlich-Aberth method for palindromic matrix polynomials represented in the Dickson basis // Linear Algebra Appl. Vol. 438. 2013. P. 1645–1666. DOI: 10.1016/j.laa.2011.10.035.


## References


[1] Nishiyama Y. Numerical palindromes and the 196 problem. *IJPAM*, Vol. 80, no. 3, 2012, pp. 375–384. Available at: https://ijpam.eu/contents/2012-80-3/9/9.pdf [in English].

[2] Gundina M.A., Gusachek D.A. *Primenenie chislovykh palindromov* [Application of numerical palindromes]. In: *IX Masherovskie chteniya: materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh, Vitebsk, 25 sentyabrya 2015 g.* [IX Masherovskie readings: materials of the International research and practical conference of students, postgraduate students and young scientists, Vitebsk, 25 September, 2015]. Vitebsk: Izd-vo VGU im. P.M. Masherova, 2015, pp. 13–15 [in Russian].

[3] Gardner M. *Etot levyi, pravyi mir* [This left, right world]. M.: Mir, 1967, 267 p. [in Russian].

[4] Iannazzo B., Meini B. Palindromic matrix polynomials, matrix functions and integral representations. *Linear Algebra Appl.*, Vol. 434, Issue 1, 2011, pp. 174–184. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.09.013 [in English].

[5] D.S. Mackey [et al.] Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 28, 2006, pp. 1029–1051. Available at: http://eprints.maths.manchester.ac.uk/id/eprint/190 [in English].

[6] Gemignani L., Noferini V. The Ehrlich-Aberth method for palindromic matrix polynomials represented in the Dickson basis. *Linear Algebra Appl.*, Vol. 438, 2013, pp. 1645–1666. DOI: 10.1016/j.laa.2011.10.035 [in English].


***V.V. Lyubimov, R.V. Melikdzhanyan***[2]

## CALCULATION OF THE NUMBER OF PALINDROMS IN A BINARY SYSTEM

The work deals with symmetric numbers in the binary number system, called palindromes. The aim of the work is to derive the dependence of the number of palindromes on their digit. The dependences of the number of palindromes for even and odd digits are obtained separately.

**Key words:** palindromes, binary number system, number theory, formula.

**Citation.** Lyubimov V.V., Melikdzhanyan R.V. *Raschet chisla palindromov v dvoichnoi sisteme schisleniya* [Calculation of the number of palindroms in a binary system] [Calculation of the number of palindroms in a binary system]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 29–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-29-32 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 15/*X*/2018.
The article received 15/*X*/2018.



[2] *Lyubimov Vladislav Vasilievich* (vlubimov@mail.ru), Department of Higher Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Melikdzhanyan Regina Valerievna* (melikdzhanyan99@mail.ru), Institute of Informatics, Mathematics and Electronics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.