УДК 517.956 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-24-28

С.В. Кириченко[1]

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ПЕРЕМЕННОЙ ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрена краевая задача с нелокальным по переменной времени условием для одномерного гиперболического уравнения. Основным результатом является доказательство единственности решения. Важным этапом обоснования этого утверждения является доказательство эквивалентности поставленной нелокальной задачи и краевой задачи с классическими начальными условиями для нагруженного уравнения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальные условия, интегральное условие второго рода.

Цитирование. Кириченко С.В. Об одной задаче с нелокальным по переменной времени условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 24–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-24-28.

Введение

Задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются в настоящее время и результаты их исследований опубликованы в многочисленных статьях. Отметим лишь некоторые из них, а именно те, в которых рассматриваются задачи с нелокальными интегральными условиями [1–6] и обратим внимание на список литературы в них.

Интерес к ним вызван необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием [7; 8]. В тех случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для непосредственных измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости соответствующей математической задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В предлагаемой статье рассмотрена задача с нелокальным по времени интегральным условием для гиперболического уравнения.

1. Постановка задачи и основной результат

В конечной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(x)u_{tt} - au_{xx} + bu_t + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) + \int_0^T H(t)u(x,t)dt = 0. \tag{4}$$

В условии (4) $H(t)$ задана в $[0,T]$ и такова, что $h = ||H||_{L_2(0,T)} < 1$.

[1]© Кириченко С.В., 2018

Кириченко Светлана Викторовна (svkirichenko@mail.ru), кафедра прикладной математики, информатики и информационных систем, Самарский государственный университет путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

Теорема. Пусть выполняются условия

$$a \in C^1(\bar{Q}_T), c \in C(\bar{Q}_T), c_t \in C(\bar{Q}_T), b \in C(\bar{Q}_T), K \in C[0,l], H \in C^2(0,T) \cap C^1[0,T];$$

$$a(x,t) \geqslant a_0 > 0, c(x,t) \geqslant c_0 > 0, K(x) \geqslant k_0 > 0, H(T) = H'(T) = 0, hT < 1;$$

Тогда существует не более одного решения задачи (1)—(4).

Доказательство.

На первом шаге доказательства покажем, что задача (1)—(4) эквивалентна задаче с классическими начальными данными для некоторого нагруженного уравнения.

Введем оператор B формулой

$$Bu \equiv u(x,t) + \int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt$$

и будем обозначать $v(x,t) = Bu$.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)—(4). Тогда, как нетрудно видеть, функция $v = Bu$ удовлетворяет условиям

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \;\; v_t(x,0) = 0$$

и уравнению

$$Lv - L(\int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt) = f(x,t).$$

Преобразуем последнее слагаемое левой части этого уравнения.

$$L(\int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt) = -\int\limits_0^T H(\tau)a(x,\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau + c(x,t)\int\limits_0^T H(\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

Так как по предположению $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), то

$$au_{xx} = K(x)u_{tt} + bu_t + cu - f(x,t).$$

Это представление дает нам возможность сделать преобразования, а именно, возможность интегрирования по частям, которые приводят к равенству, в котором уже учтены условия теоремы:

$$K(x)v_{tt} - av_{xx} + bv_t + cv + B(x,t)u(x,0) +$$
$$+\int\limits_0^T \tilde{P}(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^T Hfd\tau.$$

В этом равенстве обозначено:

$$[a(x,t)H'(0) - b(x,0)H(0)]K(x) = B(x,t),$$

$$[H''(\tau) - (H(\tau)b(x,\tau))_\tau + H(\tau)c(x,\tau)]K(x) - c(x,t)H(\tau) = \tilde{P}(x,t,\tau).$$

Так как функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (4), то последнее равенство приобретает вид

$$K(x)v_{tt} - av_{xx} + bv_t + cv + B(x,t)\int\limits_0^T P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau = G(x,t), \tag{5}$$

где $P(x,t,\tau) = \tilde{P}(x,t,\tau) - B(x,t)H(\tau)$, $G(x,t) = f(x,t) + \int\limits_0^T H(t)f(x,t)dt$.

Итак, показано, что если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)—(4), то функция $v(x,t)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \;\; v_t(x,0) = 0 \tag{6}$$

а функции u, v связаны соотношением

$$u(x,t) + \int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt = v(x,t). \tag{7}$$

Пусть теперь $v(x,t)$—решение задачи (5)—(7). Заметим, что уравнение (5) можно записать в виде

$$LBu - L(Bu - u) = Bf - f.$$

Из этого равенства моментально следует, что $Lu = f$. Из условий (6) и соотношения (7) следует выполнение условий (2)—(4). Эквивалентность доказана.

Таким образом, для обоснования разрешимости задачи (1)—(4) может быть рассмотрена эквивалентная ей задача (5)—(6), где функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ связаны равенством (7).

Так как уравнения (5) и (7) линейны, то достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Умножим равенство (5) с $G(x,t) = 0$ на v_t и проинтегрируем по Q_τ, где $\tau \in [0,T]$.

После стандартных преобразований [9] получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l [K(x)v_t^2(x,\tau) + a(x,\tau)v_x^2(x,\tau) + c(x,\tau v^2(x,\tau))]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [a_t v_x^2 + c_t v^2 - b v_t^2]dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_x v_x v_t dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l v_t(x,t)\int\limits_0^\tau P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau dxdt. \tag{8}$$

Для оценки правой части (8) получим предварительно неравенство. Умножим обе части равенства

$$u(x,t) = v(x,t) - \int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt$$

на $u(x,t)$ скалярно. Из полученного равенства вытекает неравенство

$$||u||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{(1-\sqrt{hT})}||v||_{L_2(Q_T)}. \tag{9}$$

Теперь мы можем получить оценку (8). Заметим, что в силу условий теоремы существуют положительные числа p_i такие, что

$$|a_t| \leqslant p_1, |c_t| \leqslant p_2, |b| \leqslant p_3, |a_x| \leqslant p_4.$$

Тогда, применив неравенство Коши, получим

$$\Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_x v_x v_t dxdt\Big| \leqslant p_4\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v_x^2 + v_t^2)dxdt.$$

Теперь из равенства (8) следует неравенство

$$m\int\limits_0^l [v^2(x,\tau) + v_t^2(x,\tau) + v_x^2(x,\tau)]dx \leqslant M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v^2 + v_t^2 + v_x^2)dxdt, \tag{10}$$

где $m = \min\{a_0, c_0, k_0\}$, $M = 2\max\{p_i, 1\}$.

Применив к неравенству (10) лемму Гронуолла, получим, что $v(x,t) = 0$. Но тогда функция $u(x,t) = 0$ как решение однородного интегрального уравнения Фредгольма

$$u(x,t) + \int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt = 0.$$

Теорема доказана.

Литература

[1] Кэннон Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. № 21. P. 155–160. URL: https://www.jstor.org/stable/43635292.

[2] Гущин А.К., Михайлов В.П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v081n01ABEH003617.

[3] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-008-9218-9.

[4] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103. URL: http://mi.mathnet.ru/mm832.

[5] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023.

[6] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf.

[7] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935. URL: http://mi.mathnet.ru/de4116.

[8] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics, 2002. P. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 408 с. URL: https://mexalib.com/view/25085.

References

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, no. 21, pp. 155–160 [in English].

[2] Gushchin A.K., Mihailov V.P. *O razreshimosti nelokalnykh zadach dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka* [About a solubility of nonlocal tasks for an elliptical equation of the second order]. *Matem. sb.* [Russian Academy of Sciences. Sbornik: Mathematics], 1995, 81:1, pp. 101–136. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v081n01ABEH003617 [in Russian].

[3] Skubachevsky A.L. *Neklassicheskie kraevye zadachi. I* [Nonclassical boundary value problems]. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya* [Journal of Mathematical Sciences], 2008, 155:2, pp. 199–334. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-008-9218-9 [in Russian].

[4] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Resheniya nelokal'nykh zadach dlya odnomernykh kolebanii sredy* [Solutions of Nonlocal Problems for One-Dimensional Oscillations of the Medium]. *Matem. modelir.* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2000, Vol. 12, no. 1, pp. 94–103. Available at: http://mi.mathnet.ru/mm832 [in Russian].

[5] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii* [On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimentional Hyperbolic Equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokalnymi usloviyami 1 i 2-go roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2012, Vol. 56, no. 4, pp. 74–83. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf [in Russian].

[7] Samarskii A.A. *O nekotorykh problemakh sovremennoi teorii differentsial'nykh uravnenii* [About some problems of modern theory of differential equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: http://mi.mathnet.ru/de4116 [in Russian].

[8] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, 2002, pp. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119) [in English].

[9] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://mexalib.com/view/25085 [in Russian].

S.V. Kirichenko[2]

ABOUT ONE TASK WITH A NONLOCAL CONDITION ON TIME VARIABLE FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

In this article, boundary value problem for hyperbolic equation with nonlocal initial data in integral form is considered. The main result is that the nonlocal problem is equivalent to the classical boundary value problem for a loaded equation. This fact helps to prove the uniqueness of a solution to the problem.
Key words: hyperbolic equation, nonlocal conditions, second kind integral condition

Citation. Kirichenko S.V. *Ob odnoi zadache s nelokalnym po peremennoi vremeni usloviem dlya giperbolicheskogo uravneniya* [About one task with a nonlocal condition on time variable for the hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 24–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-24-28 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $11/IX/2018$.
The article received $11/IX/2018$.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

[2]*Kirichenko Svetlana Viktorovna* (svkirichenko@mail.ru), Department of Applied Mathematics, Informatics and Information Systems, Samara State University of Railway Transport, 18, 1st Besymanniy per., Samara, 443066, Russian Federation.