УДК 517.95 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-19-23

В.А. Киричек[1]

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей статье рассмотрен круг задач, для исследовании разрешимости которых оказался весьма эффективным метод, основанный на сведении их к задачам для нагруженного уравнения. Это задачи с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений. Сведение задачи с нелокальными условиями к задаче для нагруженного уравнения, но с классическими условиями позволяет использовать многие известные методы обоснования разрешимости, что часто оказывается невозможным в случае нелокальных условий. В статье рассмотрена задача с нелокальными интегральными условиями для одномерного гиперболического уравнения и доказана ее эквивалентность задаче с классическими граничными условиями для нагруженного уравнения.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральные условия, гиперболическое уравнение, нагруженное уравнение.

Цитирование. Киричек В.А. О нелокальных задачах для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 19–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-19-23.

Введение

Отправной точкой ряда исследований, посвященных нелокальным задачам для уравнений с частными производными, явилась статья Адама Маремовича Нахушева [1], опубликованная в 1976 году. В ней дано определение нагруженных дифференциальных уравнений и установлена их связь с задачами со смещением. Это наблюдение способствовало развитию новых методов исследования разрешимости задач с неклассическими условиями, а также дало возможность построения математических моделей многих явлений и процессов, представляющих значительный интерес для современного естествознания [2]. Результаты исследований нагруженных уравнений и задач, приводящим к ним при математическом моделировании, обобщены в монографии [3]. К настоящему времени известно большое количество работ, посвященных разработке методов исследования задач с нелокальными интегральными условиями [6–10]. Оказалось, что для одномерного гиперболического уравнения можно модифицировать некоторые из них так, что исследование нелокальной задачи значительно упращается. В статье рассматривается один из таких случаев.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, где $l, T < \infty$, уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1.1}$$

Задача 1. Найти в области Q_T решение $u(x,t) \in C(\bar{Q_T}) \cap C^2(Q_T)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

и нелокальным условиям

$$\int\limits_0^l k_i(x)u(x,t)dx = 0, \quad i = 1,2. \tag{1.3}$$

Киричек Виталия Александровна (vitalya29@gmail.com), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Условия (1.3) — интегральные условия первого рода, что создает много трудностей при исследовании разрешимости задачи. В статье [4] найдены условия на входные данные, которые позволяют свести условия первого рода к интегральным условиям второго рода. Приведем некоторые промежуточные выкладки из этой статьи, так как они нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.3). Умножим (1.1) на $k_i(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Получим:

$$\begin{gathered} k_1(0)u_x(0,t) - k_1(l)u_x(l,t) - k_{1x}(0)u(0,t) + k_{1x}(l)u(l,t) + \\ + \int\limits_0^l (k_{1xx} - ck_1)u dx + \int\limits_0^l k_1 f dx = 0, \\ k_2(0)u_x(0,t) - k_2(l)u_x(l,t) - k_{2x}(0)u(0,t) + k_{2x}(l)u(l,t) + \\ + \int\limits_0^l (k_{2xx} - ck_2)u dx + \int\limits_0^l k_2 f dx = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Если

$$\Delta = k_1(0)k_2(l) - k_1(l)k_2(0) \neq 0,$$

$$c(x,t) \in C(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T), f(x,t) \in L_2(Q_T), k_i(x) \in C^2[0,l]$$

и выполнены условия согласования

$$\int\limits_0^l k_i(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^l k_i(x)\psi(x)dx = 0, \tag{1.5}$$

то нелокальные условия первого рода (1.3) эквивалентны нелокальным условиям второго рода

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(l,t) + \int\limits_0^l M_1(x,t)u(x,t)dx + \int\limits_0^l P_1(x) f dx, \\ u_x(l,t) = \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(l,t) + \int\limits_0^l M_2(x,t)u(x,t)dx + \int\limits_0^l P_2(x) f dx, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где α_i, β_i, $M_i(x,t)$ $P_i(x)$ выражаются через $k_i(x)$, $c(x,t)$.

Для обоснования разрешимости нелокальной задачи с условиями (1.6) оказалось возможным применение известных методов ([5], с.209-215), основную роль в реализации которых играют априорные оценки в пространстве $W_2^1(Q_T)$. Оценки удалось получить и тем самым доказать существование единственного обобщенного решения [4].

Если же $\Delta = k_1(0)k_2(l) - k_1(l)k_2(0) = 0$, но

$$\Delta_1 = k_{1x}(0)k_{2x}(l) - k_{1x}(l)k_{2x}(0) \neq 0,$$

то при некоторых дополнительных условиях на ядра $k_i(x)$ условия (1.3) могут быть сведены к условиям второго рода такого вида:

$$\begin{gathered} u(0,t) + \int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = g_1(t), \\ u(l,t) + \int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = g_2(t). \end{gathered} \tag{1.7}$$

В этом случае упомянутый выше метод оказался неэффективным. Покажем, что задачу с нелокальными условиями (1.7) можно свести к задаче с классическими условиями, но для нагруженного уравнения. Заметим, что условия, наложенные на $k_i(x)$, $c(x,t)$, влекут за собой наличие свойства $K_i(x,t) \in C(\bar{Q_T}) \cap C^2(Q_T)$. Обозначим

$$H(x,\xi,t) = \frac{l-x}{l}K_1(\xi,t) + \frac{x}{l}K_2(\xi,t)$$

и введем новую неизвестную функцию с помощью формулы

$$v(x,t) = u(x,t) + \int\limits_0^l H(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi.$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи 1. Тогда функция $v(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$v_{tt} - v_{xx} + cv - \int\limits_0^l (H_{tt}(x,\xi,t)u(\xi,t) + 2H_t(x,\xi,t)u_t(\xi,t))d\xi -$$

$$-\int_0^l H(x,\xi,t)u_{tt}(\xi,t)d\xi+\int_0^l H_{xx}(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi-$$

$$-c(x,t)\int_0^l H(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi=f(x,t). \qquad (1.8)$$

Преобразуем слагаемое $\int\limits_0^l H(x,\xi,t)u_{tt}(\xi,t)d\xi$ следующим образом: учитывая предположение о том, что $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1), получим равенство:

$$\int_0^l Hu_{tt}d\xi=\int_0^l H(x,\xi,t)[u_{\xi\xi}-c(\xi,t)u+f(\xi,t)]d\xi.$$

Интегрирование первого слагаемого правой части этого равенства позволяет записать уравнение (1.8) в виде:

$$v_{tt}-v_{xx}+cv-\int_0^l N(x,\xi,t)ud\xi+\int_0^l (H_\xi u_\xi-2H_t u_t)d\xi-$$

$$-H(x,l,t)u_x(l,t)+H(x,0,t)u_x(0,t)=f(x,t)+\int_0^l Hfd\xi, \qquad (1.9)$$

где обозначено

$$N(x,\xi,t)=[c(x,t)-c(\xi,t)]H(x,\xi,t)+H_{tt}(x,\xi,t)-H_{xx}(x,\xi,t).$$

Будем предполагать, что $||H(\cdot,\cdot,t)||_{L_2((0,l)\times(0,l))}<1$. Заметим, что равенство

$$Bu\equiv u(x,t)+\int_0^l H(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi=v(x,t), \qquad (1.10)$$

с помощью которого введена новая неизвестная функция, можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма. В силу сделанного предположения о норме ядра, существует единственное его решение $u(x,t)$, которое в силу свойств гладкости ядра $H(x,\xi,t)$, вытекающих из сделанных предположений относительно функций $K_i(x,t)$, принадлежит пространству $C^2(Q_T)$. Стало быть, можно выразить u через v, подставить в уравнение (1.9) и убедиться в том, что полученное уравнение является нагруженным дифференциальным уравнением.

Заметим, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет классическим граничным условиям $v(0,t)=g_1(t)$, $v(l,t)=g_2(t)$. Не составляет труда найти начальные условия для $v(x,t)$, и мы приходим к следующей задаче.

Задача 2. Найти в области Q_T решение уравнения (1.9), где функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ связаны равенством

$$v(x,t)=u(x,t)+\int_0^l H(x,\xi,t)u(x,\xi)d\xi, \qquad (1.11)$$

удовлетворяющее начальным данным

$$\begin{gathered} v(x,0)=\varphi(x)+\int_0^l H(x,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi=v_0(x),\\ v_t(x,0)=\psi(x)+\int_0^l H_t(x,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^l H(x,\xi,0)\psi(\xi)d\xi=v_1(x)\end{gathered} \qquad (1.12)$$

и граничным условиям

$$v(0,t)=g_1(t),\ \ v(l,t)=g_2(t). \qquad (1.13)$$

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться и в обратном: если функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.9) и условиям (1.12), (1.13),то функция $u(x,t)$, связанная с $v(x,t)$ соотношением (1.11), является решением задачи 1. Действительно, заметив, что

$$Lv=LBu=Lu+\int_0^l [(Hu)_{tt}-H_{xx}+Hc(x,t)u]d\xi,$$

$$BLu = Lu + \int\limits_0^l H(x,\xi,t)(u_{tt} - u_{\xi\xi} + c(\xi,t)u)d\xi,$$

а правая часть (1.9) есть не что иное как Bf, можем записать (1.9) следующим образом:

$$B(Lu - f) = 0.$$

Так как в силу сделанных предположений уравнение (1.10) однозначно разрешимо, то из последнего равенства следует, что $Lu = f$. Выполнение условий (1.2) и (1.3) вытекает из (1.10).

Замечание. Полученные результаты нетрудно распространить на случай более общего уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t).$$

Частный случай рассмотрен лишь для избежания громоздких выкладок.

Литература

[1] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108. URL: http://mi.mathnet.ru/de2654.

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с. URL: https://www.studmed.ru/nahushev-am-uravneniya-matematicheskoy-biologii_5f9b3ede6d5.html.

[3] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

[4] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики М.: Наука, 1973. 407 с. URL: https://mexalib.com/view/25085.

[6] Дюжева А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с интегральными условиями первого рода // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2011. Вып. 5(86). С. 29–36. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4830.

[7] Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения четвертого порядка // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2014. Вып. 10(121). С. 26–37. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4507.

[8] Стригун М.В. Об одной нелокальной задаче с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2009. Вып. 8(74). С. 78–87.

[9] Кожанов А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. матем. 2004. Т. 7. № 1. С. 51–60. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458.

[10] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Science. 2011. Vol. 5. № 1. P. 31–37. URL: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf.

References

[1] Nahushev A.M. *O zadache Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya nagruzhennogo integro-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka* [On the Darboux problem for a nondegenerate loaded integrodifferential equation of the second order]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1976, Vol. 12, no. 1, pp. 103–108. Available at: http://mi.mathnet.ru/de2654 [in Russian].

[2] Nahushev A.M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. M.: Vysshaya shkola, 1995, 301 p. Available at: https://www.studmed.ru/nahushev-am-uravneniya-matematicheskoy-biologii_5f9b3ede6d5.html [in Russian].

[3] Nahushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. M.: Nauka, 2012, 232 p. [in Russian].

[4] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokalnymi usloviyami 1 i 2-go roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2012, no. 4, pp. 74–83. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf [in Russian].

[5] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://mexalib.com/view/25085 [in Russian].

[6] Dyuzheva A.V. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya giperbolicheskogo uravneniya s integralnymi usloviyami pervogo roda* [On certain nonlocal problem for hyperbolic equation with integral conditions of the first kind]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2011, no. 5(86), pp. 29–36. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4830 [in Russian].

[7] Beilina N.V. *Nelokal'naya zadacha s integral'nym usloviem dlya uravneniya chetvertogo poryadka* [Nonlocal problem with integral condition for a fourth order equation]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 10(121), pp. 26–37. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4507 [in Russian].

[8] Strigun M.V. *Ob odnoi nelokal'noi zadache s integral'nym granichnym usloviem dlya giperbolicheskogo uravneniya* [On certain nonlocal problem with integral boundary condition for hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2009, no. 8(74), pp. 78–87. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4810 [in Russian].

[9] Kozhanov A. I. *Nelokalnaya po vremeni kraevaya zadacha dlya lineinykh parabolicheskikh uravnenii* [A time-nonlocal boundary problem for linear parabolic equations]. *Sib. zhurn. industr. matem.* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2004, vol. 7, No. 1, pp. 51–60. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458 [in Russian].

[10] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Science*, 2011, Vol. 5, no. 1, pp. 31–37. Available at: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf [in Englsih].

V.A. Kirichek[2]

NONLOCAL PROBLEMS FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

This article discusses some nonlocal problems and methods of proving solvability of them. We show that choosing of effective method depends on the form of nonlocal conditions. One of these methods is based on reducing nonlocal problem to a boundary-value problem for a loaded equation and allows us to use many well-known methods of justification solvability. In the article, we consider the problem with nonlocal integral conditions for a one-dimensional hyperbolic equation and prove the equivalence to a problem with classical boundary conditions for a loaded equation.

Key words: nonlocal problem, integral condition, hyperbolic equation, loaded equation.

Citation. Kirichek V.A. *O nelokalnykh zadachakh dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [Nonlocal Problems For One-Dimensional Hyperbolic Equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 19–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-19-23 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 11/*IX*/2018.
The article received 11/*IX*/2018.

[2]*Kirichek Vitaliia Alexandrovna* (vitalya29@gmail.com), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.