УДК 511.334 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18

Г.В. Воскресенская[1]

ФУНКЦИИ МАККЕЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЫСШИХ УРОВНЕЙ

В статье доказаны структурные теоремы для пространств параболических форм уровней, которые кратны минимальным уровням для функций МакКея. Существует 28 эта-произведений с мультипликативными коэффициентами Фурье целого веса. Их называют функциями МакКея. Пусть $f(z)$ — такая функция. Она лежит в пространстве $S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ для минимального уровня N. Любое пространство уровня N допускает точное рассечение функцией $f(z)$. Функция $f(z)$ является также параболической формой для кратных уровней. В этом случае точное рассечение уже не имеет места, возникают дополнительные пространства. В статье найдены условия на дивизор для функций, делящихся на $f(z)$, изучена структура дополнительных пространств. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, структурные теоремы, формула Коэна — Остерле, формула Биаджиоли.

Цитирование. Воскресенская Г.В. Функции МакКея в пространствах высших уровней // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018, no. 24, no. 4, pp. 13–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18.

1. Предварительные сведения

В статье доказаны структурные теоремы для пространств параболических форм уровней, кратных уровням, соответствующим функциям МакКея. Обозначения и утверждения теории модулярных форм, которые используются в тексте, можно найти в книгах [1–3]. В работе [4] было показано, что функции МакКея обеспечивают точное рассечение в пространствах минимальных уровней. Они также рассекают пространства кратных уровней, но здесь уже возникают дополнительные пространства, природу которых мы и исследуем в статье. Будем использовать свойства модулярных форм, являющихся эта-частными и эта-произведениями. Их определение и основные свойства содержатся в статьях [5–8]. Размерности вычисляются по формуле Коэна — Остерле [9], порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли [10]. Теорема 1.1 цитируется, теоремы 2.2, 2.3, 2.4 и лемма 2.1 являются новыми.

1.1. Функции МакКея и точное рассечение

В 1985 году Дж. МакКей, Д. Даммит, Х. Кисилевски доказали в статье [8], что эта-произведений с мультипликативными коэффициентами целого веса существует ровно 28. Их полный список с указанием весов, уровней и характеров можно найти также в статье [5]. В математической литературе для их обозначения используются два названия: "мультипликативные эта-произведения" и "функции МакКея" в честь первого из авторов, вклад которого в открытие был существенным.

Пусть $f(z)$ — такая функция. Она имеет в каждой параболической вершине относительно $\Gamma_0(N)$, где N — минимальный возможный уровень, порядок 1. В работе [4] была доказана следующая теорема о точном рассечении.

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Теорема 1.1.

Пусть χ — квадратичный характер по модулю $N \neq 3, 17, 19$ такой, что $\chi(-1) = (-1)^k$, $k, l \in \mathbf{N}$. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi^k) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-l}),$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi^l)$,
в том и только в том случае, когда $f(z)$ — функция МакКея.

Для уровня 3 рассекающая функция может быть функцией МакКея $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, но возможны и другие варианты. Для уровней $N = 17, 19$ рассекающая функция не является даже эта-произведением.

1.2. Формула Коэна — Остерле

Эта формула открыта в 1977 году в работе [9]. Мы используем этот результат для доказательства структурных теорем.

Введем обозначения:

$$D_0 = \frac{|\Gamma : \Gamma_0(N)|}{12} = \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

Рассмотрим характер Дирихле χ с условием $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p такую степень, что $p^{r_p}||N$, через через s_p такую степень, что $p^{s_p}||f$. Обозначим

$$D_{1,\chi} = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r' + 1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geqslant r_p. \end{cases}$$

$$D_{2,\chi} = \sum_{x : x^2+1 \equiv 0 (N)} \chi(x), \quad D_{3,\chi} = \sum_{x : x^2+x+1 \equiv 0 (N)} \chi(x).$$

$$n_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$m_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Если $\chi = \chi_0$ — единичный характер, то $D_{j,\chi} = D_j$.

Число $D_{2,\chi} = 0$, если N делится на 4 или на простое число $p \equiv 3 \ (mod\ 4)$, $D_{3,\chi} = 0$, если N делится на 2 или 9 или на простое число $p \equiv 2 \ (mod\ 3)$. Число $D_{1,\chi}$ равно количеству параболических вершин $\mu_\infty(N)$ относительно группы $\Gamma_0(N)$, если для любого простого числа p выполнено условие $s_p \leqslant r_p$. Величины $D_{2,\chi}$ и $D_{3,\chi}$ учитывают эллиптические точки, лежащие над i и над $\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ соответственно [3].

Тогда по теореме Коэна — Остерле имеет место соотношение:

$$dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) - dim M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)D_0 - \frac{1}{2}D_{1,\chi} + n_k D_{2,\chi} + m_k D_{3,\chi}.$$

Для $k = 1$ эта формула не позволяет найти размерности пространств $S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ и $M_1(\Gamma_0(N), \chi)$, а только их разность, и требуются дополнительные соображения. Для $k = 0$ тоже требуется специальное рассмотрение Если $\chi = \chi_0$, то $dim\ M_0\ (\Gamma_0(N)) = 1$ для любого уровня N. Пространство $M_0\ (\Gamma_0(N))$ состоит только из констант. Если χ — неединичный характер, то $dim\ M_0\ (\Gamma_0(N), \chi) = 0$.

$$dim\ S_2(\Gamma_0(N), \chi) = 1 + D_0 - \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4} \cdot D_{2,\chi} - \frac{1}{3}D_{3,\chi}.$$

Для $k > 2$ из формулы Коэна — Остерле получаем

$$dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)D_0 - \frac{1}{2}D_{1,\chi} + n_k D_{2,\chi} + m_k D_{3,\chi}.$$

$$dim M_k(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)D_0 + \frac{1}{2}D_{1,\chi} - n_k D_{2,\chi} - m_k D_{3,\chi}.$$

Заметим, что $dim\ M_k(\Gamma_0(N), \chi) - dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ зависит только от уровня и характера, но не зависит от веса, определяется количеством параболических вершин с некоторой поправкой на действие характера и учетом эллиптических точек. Во многих случаях эта поправка равна 0, и разность размерностей равна количеству параболических вершин.

2. Основные результаты

2.1. Условия на дивизор для параболической формы кратной функции МакКея

Здесь мы сначала докажем лемму о вычислении порядков эта—частных при переходе к кратным уровням, а затем определим условия на дивизор для параболической формы кратной функции МакКея.

Лемма 2.1.

Пусть N, M — натуральные числа, $f(z)=\prod_{j=1}^{s}\eta(a_jz)^{t_j}$ — эта-частное уровня N, $r=\frac{m}{n}$ — параболическая вершина, $(m,n)=1$. Обозначим через $\alpha(r)$ — порядок $f(z)$ в вершине r как функции уровня N, а через $\beta(r)$ — порядок $f(z)$ в вершине r как функции уровня MN.

Тогда

1) $\beta(\infty)=\alpha(\infty)$; 2) $\beta(0)=M\cdot\alpha(0)$; 3) если $n|N,(n,M)=1$, то $\beta(r)=M\cdot\alpha(r)$; 4) если $n|M,(n,N)=1$, то $\beta(r)=\frac{M}{n}\cdot\alpha(1)$; 5) если $(n,N)=n_1>1$, $(n,M)=n_2>1$, то $\beta(r)=\frac{[n,\frac{MN}{n}]}{[n,N]}\cdot\alpha(\frac{1}{n_1})$.

Доказательство.

Как показано в книге [1] всегда можно выбрать n делителем MN, и все a_j делят N. Заметим, что из формулы Биаджиоли следует, что значение порядка эта–частного в параболической вершине зависит только от знаменателя: $\alpha(\frac{1}{n})=\alpha(\frac{m}{n})$, $(m,n)=1$ (также и для β.) Параболическая вершина ∞ эквивалентна $\frac{1}{MN}$.

Для удобства обозначим через

$$S(n)=\sum_{j=1}^{s}\frac{t_j(a_j,n)^2}{a_j}.$$

По формуле Биаджиоли [10] имеем:

$$\alpha(r)=\frac{N}{24\cdot(n,\frac{N}{n})n}\cdot S(n)=\frac{[N,n]}{24n}S(n).$$

1) Очевидно. 2) Из формулы для $\alpha(r)$ следует, что

$$\alpha(1)=\frac{N}{24}S(1).$$

Так $0=\frac{0}{1}$, то $\alpha(1)=\alpha(0)$, $\beta(1)=\beta(0)$.

Вычислим значение

$$\beta(0)=\frac{MN}{24}S(1)=M\alpha(0).$$

3) Рассмотрим третий случай.

$$\beta(r)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})n}S(n)=\frac{MN}{24(n,\frac{N}{n})n}S(n)=M\alpha(r).$$

4) Рассмотрим четвертый случай.

$$\beta(r)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})n}S(n)=\frac{MN}{24(n,\frac{M}{n})n}S(1)=\frac{[n,\frac{M}{n}]}{n}\alpha(1)=\frac{M}{n}\alpha(1).$$

5) И, наконец, пятый — самый сложный случай.

$$\beta(r)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})n}S(n)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})\frac{n}{(n,N)}n_1}S(n_1)=\frac{MN(n,N)}{nN(n,\frac{MN}{n})}\alpha\left(\frac{1}{n_1}\right)=\frac{[n,\frac{MN}{n}]}{[n,N]}\alpha\left(\frac{1}{n_1}\right).$$

Теорема 2.2.

Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma_0(M\cdot N),\psi)$ — функция МакКея, N — ее минимальный уровень, M — натуральное число, $r=\frac{m}{n}$ — параболическая вершина относительно $\Gamma_0(M\cdot N)$.

Пусть, далее

$$\beta(r) = \begin{cases} 1, & n = MN, \\ M, & n|N, (n, M) = 1, \\ \frac{MN}{n}, & n|M, (n, N) = 1, \\ \frac{[n, \frac{MN}{n}]}{[n,N]}, & (n, N) > 1, \ (n, M) > 1 \end{cases}$$

Функция $g(z) \in S_k(\Gamma_0(MN))$ представляется в виде $g(z) = f(z) \cdot h(z)$, где $h(z) \in M_{k-l}(\Gamma_0(MN), \psi_1)$, $\chi = \psi \cdot \psi_1$, в том и только том случае, когда $ord_r g(z) \geqslant \beta(r)$.

Доказательство.

В силу леммы $\beta(r) = ord_r f(z)$, так как $\alpha(r) = 1$ для функции МакКея $f(z)$ в любой параболической вершине r. Тогда, если $ord_r(g(z) \geqslant \beta(r)$ функция $\frac{g(z)}{f(z)}$ не имеет полюсов и удовлетвряет условию автоморфности относительно $\Gamma_0(MN)$ с характером $\psi_1 = \chi \cdot \psi^{-1}$. Обратное включение очевидно.

2.2. Структурные теоремы

Переходим к основной цели статьи - изучению рассечения пространств кратных уровней функциями МакКея.Рассмотрим отдельно случай четного веса и единичного характера и нечетного веса и неединичного характера. Доказательство теоремы 2.4 отличается от доказательства теоремы 2.3 лишь в нескольких деталях, связанных с учетом характера в формуле размерности.

Теорема 2.3. *Пусть*

1) NM *— таково, что* $D_2 = D_3 = 0$;
2) $k, l \in 2\mathbf{Z}$, $k \geqslant l + 8$;
3) $f(z)$ *— функция МакКея веса* l*, уровня* N*;*
4) $\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$ *— базис ортогонального дополнения* U *к пространству* $f(z)M_2(\Gamma_0(N))$ *в пространстве* $S_{l+2}(\Gamma_0(N))$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus W,$$

где базис пространства W *состоит из функций* $u_1(z)h(z), ..., u_t(z)h(z)$, *где*

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l + 2 \ (mod\ 4), \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l \ (mod\ 4). \end{cases}$$

$$dim\ W = t = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \mu_\infty(N).$$

Доказательство.

Используя формулы и предыдущего параграфа, вычислим

$$t = dim\ S_k(\Gamma_0(N)) - dim M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = l \cdot D_0 - D_1 = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \mu_\infty(N).$$

Размерность пространства U из условия теоремы равна t.

Функции $u_1(z)h(z), ..., u_t(z)h(z)$ принадлежат пространству $S_k(\Gamma_0(N))$ и линейно независимы, так как в противном случае были бы линейно зависимы функции $u_1(z), ..., u_t(z)$, а это не так. Рассмотрим пространство $W = Span\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что $W \cap f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = \{0\}$. Обозначим через $u(z) = c_1u_1(z) + ... + c_tu_t(z)$. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1u_1(z)h(z) + ... + c_tu_t(z)h(z) = u(z)h(z)$. Так как функции $h(z)$ не имеют нулей вне параболических вершин, то из того, что $u(z)h(z) \in f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ следует, что в любой параболической вершине r $ord_r(u(z)) \geqslant ord_r(f(z))$, и $u(z) \in f(z)M_2(\Gamma_0(N))$, а это противоречит выбору $u_j(z)$.

Теорема 2.4.

Пусть
1) NM *— таково, что* $D_2 = D_{2,\chi} = D_3 = D_{3,\chi} = 0$;
2) $k, l, (k \geqslant l+8)$ *— нечетные числа;*
3) χ*—характер Дирихле по модулю* N, $\chi(-1) = -1$;
4) $f(z) \in\ S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ *функция МакКея;*
5) $\{g_1(z), ..., g_t(z)\}$ *— базис ортогонального дополнения* U *к пространству* $f(z)M_2(\Gamma_0(N))$ *в пространстве* $S_{l+2}(\Gamma_0(N), \chi)$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus W,$$

базис пространства W *состоит из функций* $g_1(z)h(z), ..., g_t(z)h(z)$, *где*

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), \quad k \equiv l+2 \ (mod\ 4), \\ \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), \quad k \equiv l \ (mod\ 4). \end{cases}$$

$$dim\ W = t = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \frac{1}{2}(D_1 + D_{1,\chi}).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3.

Выводы

Таким образом, в данной работе была изучена структура пространствах модулярных форм уровней, кратных минимальным уровням функций МакКея. В статье было показано, что существенную часть в этих пространствах составляют подпространства, допускающие точное рассечение функциями МакКея, изучена структура дополнительных пространств.

Литература

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence. 2004. 216 p.

[2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[3] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.

[4] Воскресенская Г.В. Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами // Матем. заметки, 2018. Т. 103. № 6. С. 818–830. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618050243.

[5] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техники. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. 2017. Т. 136. С. 103–137. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5.

[6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η-products // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262. URL: http://www.numdam.org/article/JTNB_1999_11_1_247_0.pdf.

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // L.N.M. 1976. V. 627. P. 69–78.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

References

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. [in English].

[2] Koblitz N. *Vvedenie v ellipticheskie krivye i modulyarnye formy* [Introduction in elliptic curves and modular forms]. M.: Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[3] Knapp A. *Ellipticheskie krivye* [Elliptic curves]. M.: Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[4] Voskresenskaya G.V. *Tochnoe rassechenie v prostranstvakh parabolicheskikh form s kharakterami* [Exact cutting in spaces of cusp forms with characters]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 2018, Vol. 103, no 6, pp. 881–891. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618050243 [in Russian].

[5] Voskresenskaya G.V. *Eta-funktsiya Dedekinda v sovremennykh issledovaniyakh* [Dedekind η—function in modern research]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Journal of Mathematical Sciences (New York), 2018, Vol. 235, no. 6, pp. 788–833. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5 [in Russian].

[6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. L.N.M., 1987, Vol. 1395, pp. 173–200 [in English].

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262. Available at: http://www.numdam.org/article/JTNB_1999_11_1_247_0.pdf [in English].

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98 [in English].

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. LNM., 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV., no. 4, pp. 273–300 [in English].

G.V. Voskresenskaya[2]

MACKAY FUNCTIONS IN SPACES OF HIGHER LEVELS

In the article we prove structure theorems for spaces of cusps forms with the levels that are divisible by the minimal levels for MakKay functions. There are 28 eta–products with multiplicative Fourier coefficients. They are called MacKay functions. Let $f(z)$ be such function. It belongs to the space $S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ for a minimal level N. In each space of the level N there is the exact cutting by the function $f(z)$. Also the function $f(z)$ is a cusp form for multiple levels. In this case the exact cutting doesn't take place and the additional spaces exist. In this article we find the conditions for the divisor of functions that are divisible by $f(z)$ and we study the structure of additional spaces. Dimensions of the spaces are calculated by the Cohen — Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, structure theorems, Cohen — Oesterle formula Biagioli formula

Citation. Voskresenskaya G.V. *Funktsii MakKeya v prostranstvakh vysshikh urovnei* [MacKay functions in spaces of higher levels]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 13–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $16/IX/2018$.
The article received $16/IX/2018$.

[2] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (`galvosk@mail.ru`), Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.