

В.В. Зайцев, Э.Ю. Федюнин¹

МОДЕЛЬ АВТОКОЛЕБАНИЙ БЕЗ ГАРМОНИК ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ

Нелинейность автоколебательной системы, ограничивающая амплитуду генерируемого сигнала, является источником высших гармоник основной частоты. Гармоники искажают форму автоколебаний и понижают стабильность их частоты. В работе предложена математическая модель генерации автоколебаний, свободных от высших гармоник — строго монохроматических автоколебаний. Модель основана на популярном в прикладной теории нелинейных колебаний методе эквивалентной (гармонической) линеаризации. Численная реализация модели в дискретном времени позволила сформулировать два алгоритма генерации монохроматических автоколебаний. Один из них включает в себя процедуру численного интегрирования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Другой — воспроизводит процессы в дискретной динамической системе, спроектированной по аналоговой модели-прототипу. Свойство монохроматичности дискретных автоколебаний подтверждено в рамках численного эксперимента.

Ключевые слова: автоколебательная система, гармоническая линеаризация, дискретное время, разностные уравнения, гармоническая аппроксимация скорости, спектр автоколебаний.

Цитирование. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Модель автоколебаний без гармоник основной частоты // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59>.

Введение

В автогенераторах квазигармонических колебаний (автогенераторах томсоновского типа) функцию ограничения амплитуды автоколебаний выполняет нелинейность [1; 2]. Одновременно с этим она является причиной генерации высших гармоник основной частоты, которые ухудшают динамические характеристики и снижают стабильность частоты автогенераторов. В аналоговой электронике основной способ снижения уровня гармоник автоколебаний — это повышение добротности колебательной системы автогенератора. Но полностью избавиться от гармонических составляющих на практике не удается.

Вместе с тем, в рамках приближенного анализа автоколебательных систем (АКС) асимптотическими методами теории нелинейных колебаний [3] гармоническое приближение получило широкое распространение, особенно в инженерной практике [4]. Представляется, что его можно использовать для разработки численной модели генератора строго монохроматических автоколебаний. При физически обоснованной процедуре дискретизации эта модель дает нам эффективный алгоритм генерации монохроматического сигнала в дискретном времени.

В настоящей статье заявленный подход к моделированию автоколебаний реализован на примере томсоновского генератора с кубической нелинейностью.

1. Гармонический автогенератор в непрерывном времени

В качестве исходной примем модель автогенератора томсоновского типа, определяемую уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = p \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt} \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right), \quad (1.1)$$

¹© Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., 2018

Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@samsu.ru), кафедра радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Федюнин Эдуард Юрьевич (fedyunin_eduard@mail.ru), Акционерное общество "Ракетно-космический центр «Прогресс», 443009, Российская Федерация, г. Самара, ул. Земеца, 18.

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонатора, p – параметр превышения порога генерации (порог: $p = 1$). Отметим также, что осцилляции $x(t)$ в уравнении (1.1) нормированы на характерный масштаб нелинейности.

Один из способов реализации гармонического приближения к анализу уравнений вида (1.1) является метод гармонической линеаризации [3]. Он состоит в замене нелинейных слагаемых в уравнении движения системы формально линейными, но зависящими от амплитуды колебаний в предполагаемом решении. По отношению к (1.1) эта процедура выглядит следующим образом.

Для решения

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) = a \cos \psi$$

разложение в ряд Фурье нелинейной функции

$$G(x) = x - \frac{1}{3}x^3$$

в правой части уравнения (1.1) имеет вид

$$G(a \cos \psi) = \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) a \cos \psi - \frac{1}{12}a^3 \cos 3\psi.$$

Это выражение заменяется приближенным

$$G(a \cos \psi) = \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) a \cos \psi = S(a^2)x$$

и используется в (1.1). В результате получается линеаризованное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = p \frac{\omega_0}{Q} S(a^2) \frac{dx}{dt}. \quad (1.2)$$

Заметим также, что помимо обнуления высших гармоник, генерируемых нелинейностью, в рамках метода учитывается медленность амплитуды $a(t)$ (по сравнению с $\cos(\psi(t))$). Поэтому в правой части уравнения (1.2) амплитуда не дифференцируется.

Предполагая далее численное интегрирование задачи Коши для дифференциального уравнения (1.2) и выборку из решения с интервалом Δ , введем в уравнение (1.2) безразмерную временную переменную $\tau = t/\Delta$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 2\pi\nu p S(a^2) \frac{dx}{d\tau}. \quad (1.3)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0/\omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты выборки $\omega_d = 2\pi/\Delta$; $\nu = \omega_0/Q$ – полоса резонатора.

Учтем теперь, что для гармонических колебаний с частотой Ω_0 выполняется равенство

$$a^2 = x^2(\tau) + \left(\frac{1}{2\pi\Omega_0} \frac{dx}{d\tau}\right)^2 = x^2(\tau) + y^2(\tau) \quad (1.4)$$

и введем в рассмотрение систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 2\pi\Omega_0 y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -2\pi\Omega_0 x - 2\pi\nu (1 - pS(x^2 + y^2)) y. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд (ММА) решение системы (1.5), очевидно, соответствует исходному предположению:

$$x(\tau) = a(\tau) \cos(2\pi\Omega_0\tau),$$

и не содержит высших гармоник частоты Ω_0 . При этом зависимость амплитуды установившихся автоколебаний от параметра превышения порога генерации описывается простой формулой:

$$a_{st} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{p}}. \quad (1.6)$$

Обозначив через $\hat{R} \left\{ F(x, y), \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \right\}$ разностный одношаговый оператор интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.5) с вектором правых частей

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 2\pi\Omega_0 y \\ -2\pi\Omega_0 x - 2\pi\nu (1 - pS(x^2 + y^2)) y \end{pmatrix}$$

на шаге $\Delta_\tau = t_k - t_{k-1}$, численную модель АКС представим в виде

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \hat{R} \left\{ F(x, y), \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.7)$$

Приведем ряд результатов моделирования. На рис. 1, *а* показан амплитудный спектр автоколебаний в АКС (1.5) с параметрами $\Omega_0 = 0.22$, $Q = 20$ и $p = 15$. Интегрирование в (1.7) с шагом $\Delta_\tau = 1/M$ при $M = 4$ проведено методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Для сравнения на рис. 1, *б* представлен амплитудный спектр для автогенератора (1.1) с теми же параметрами. Оценки спектров проведены методом дискретного (быстрого) преобразования Фурье по временным рядам $\{x_k; k = 0, K - 1\}$ длины $K = 8192$.

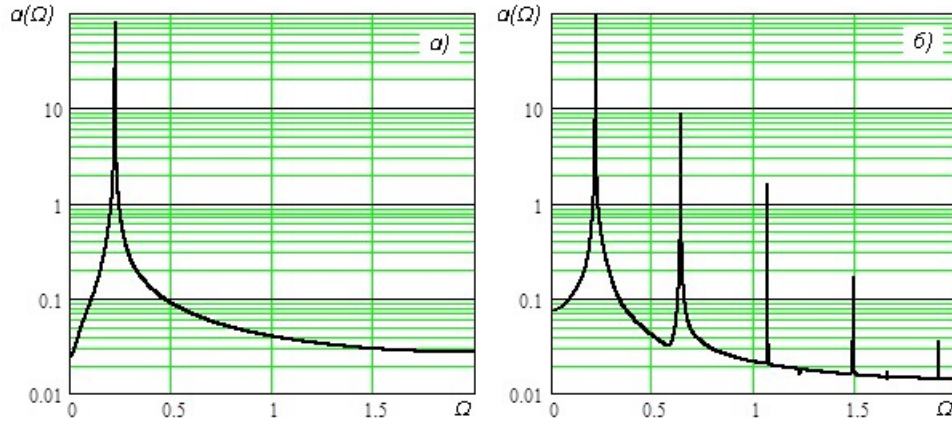


Рис. 1. Амплитудные спектры автоколебаний

Сопоставление спектров на рис. 1 наглядно демонстрирует монохроматичность автоколебаний в АКС (1.5) и обогащение гармониками автоколебаний в АКС (1.1). Качественно это подтверждают фазовые портреты АКС на рис. 2: предельный цикл (1.5) в форме окружности соответствует гармоническим автоколебаниям, а сильно деформированный эллипс (1.1) – негармоническим. Радиус окружности $a_{st} = 1.932$, что совпадает с вычислениями по формуле (1.6).

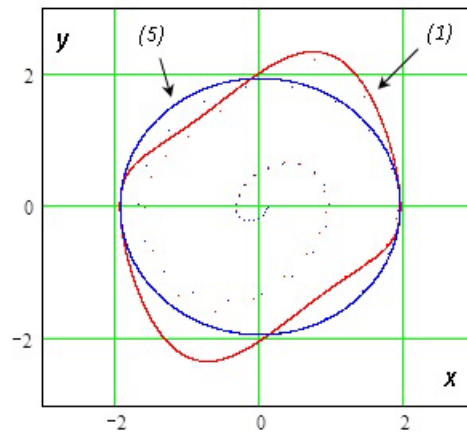
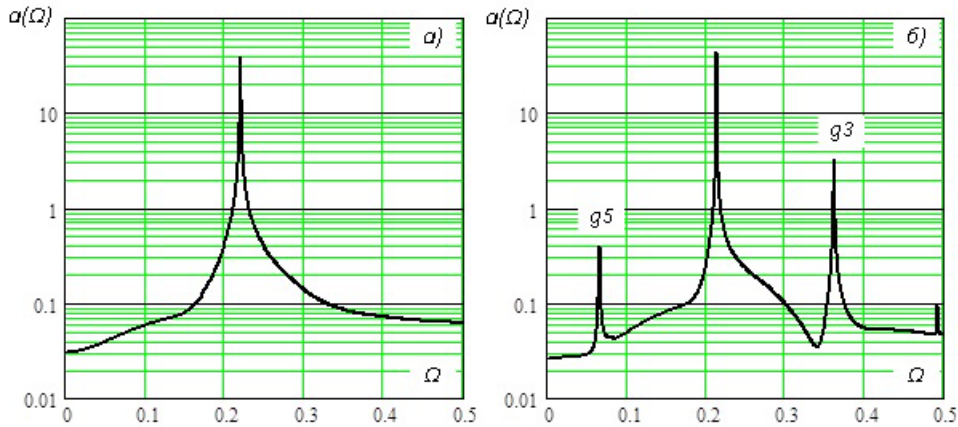


Рис. 2. Фазовые портреты автоколебательных систем

Таким образом, численный эксперимент подтверждает, что, в существенно нелинейном режиме с высоким превышением порога генерации ($p = 15$) автоколебания в системе (1.5) остаются монохроматическими.

Отсутствие гармоник основной частоты в спектре АКС (1.5) позволяет формировать временной ряд дискретных автоколебаний путем выборки $\{x[n] = x_{nM}; n = 0, N - 1\}$ из численного решения $\{x_k\}$. Рис. 3, *а*, на котором приведен амплитудный спектр сигнала $x[n]$, демонстрирует известный факт сохранения спектрального состава дискретного сигнала при выполнении условий теоремы Котельникова. В отличие от этого, показанный на рис. 3, *б*, амплитудный спектр выборки из решения уравнения (1.1), претерпевает существенные изменения по отношению к оригиналу на рис. 3, *а*. Изменения выражаются в эффекте подмены частот третьей ($g3$), пятой ($g5$) и других гармоник.

Рис. 3. Амплитудные спектры выборок $x[n]$

Отметим, что подмена частот гармоник, происходящая в процессе вычислений по алгоритму генерации, существенным образом влияет на генерируемый временной ряд [5].

2. Алгоритм генерации дискретных монохроматических автоколебаний

Алгоритм генерации автоколебаний в дискретном времени (1.7) является следствием формального использования конечно-разностного метода при решении задачи численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.5). Представим теперь "физически обоснованный" подход к разработке алгоритма.

Уравнение (1.3) запишем в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 4\pi^2\Omega_0^2 \frac{p}{Q} S(a^2)y. \quad (2.1)$$

Будем использовать требование о сохранении импульсного отклика $h(\tau)$ линейного резонатора, описываемого левой частью (2.1), в ходе временной дискретизации. При этом правую часть уравнения (2.1) формально предлагается считать внешним воздействием линейный резонатор. Импульсный отклик (импульсная характеристика) определяется уравнением

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dh}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 h = 4\pi^2\Omega_0^2 \delta(\tau).$$

Последовательность отсчетов $h[n] = h(\tau_n)$ на временной сетке $\tau_n = n$ формирует импульсную характеристику линеаризованной ДВ-системы с прототипом (2.1):

$$h[n] = 2\pi\Omega_0 \exp(-\pi\nu n) \sin(2\pi\Omega_0 n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Дискретное преобразование Фурье последовательности (2.2) определяет частотную характеристику

$$H(j\Omega) = \frac{2\pi\Omega_0 \alpha \sin(2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)}{1 - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega) + \alpha^2 \exp(-j4\pi\Omega)}$$

которая, в свою очередь, позволяет представить ДВ-систему в рекурсивной форме

$$\begin{aligned} x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) x[n-1] + \alpha^2 x[n-2] = \\ = 2\pi\alpha\nu p \sin(2\pi\Omega_0) S(a^2[n-1])y[n-1], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\alpha = \exp(-\pi\nu)$ – параметр консервативности.

Разностное уравнение (2.3) содержит производную $y[n] = (dx/d\tau)_{\tau=n}/2\pi\Omega_0$. Для ее определения воспользуемся выражением

$$\sin(2\pi\Omega_0) y[n] = \cos(2\pi\Omega_0) x[n] - x[n-1]. \quad (2.4)$$

Оно является точным для гармонических колебаний с частотой Ω_0 , а для квазигармонических – может рассматриваться как гармоническая аппроксимация скорости. Выражение (2.4) и равенство (1.4)

позволяют вычислять квадрат амплитуды $w[n] = a^2[n]$ по мгновенным значениям осцилляций:

$$w[n] = \frac{1}{\sin^2(2\pi\Omega_0)} (x^2[n] - 2 \cos(2\pi\Omega_0) x[n]x[n-1] + x^2[n-1]). \quad (2.5)$$

Таким образом, с учетом выражений (2.4) и (2.5) уравнение (2.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) x[n-1] + \alpha^2 x[n-2] = \\ = \gamma S(w[n-1]) (\cos(2\pi\Omega_0) x[n-1] - x[n-2]), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\gamma = 2\pi\alpha\nu\rho$ – параметр глубины обратной связи.

Отметим, что лишь одно из двух выражений (2.5) и (2.6), описывающих генерацию ДВ-автоколебаний, является уравнением динамической системы второго порядка – уравнение (2.6). Второе – уравнение (2.5) описывает безынерционное нелинейное преобразование. Поэтому в целом порядок динамической системы (2.5)–(2.6) равен двум.

Численный эксперимент с автоколебательной системой (2.5)–(2.6) подтверждает монохроматичность генерируемого дискретного сигнала $x[n]$. В частности, характеристики автоколебаний в системе с указанными выше параметрами с графической точностью совпадают с приведенными на рис. 1, а, рис. 2 и рис. 3, а. Вместе с тем, алгоритм генерации (2.5)–(2.6) обладает большей вычислительной эффективностью, чем алгоритм (1.7). В качестве обоснования этого утверждения на рис. 4 приведены графики процессов установления амплитуды автоколебаний в системе с параметрами $\Omega_0 = 0.22$, $Q = 20$ и $p = 5$. На рис. 4, а символом "o" обозначены результаты расчетов по (1.7) при $M = 2$, а символом "□" – расчетов по (2.5)–(2.6). Непрерывной линией показано решение укороченного уравнения

$$\frac{da}{d\tau} = -\pi\nu \left(1 - p \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right) \right) a, \quad (2.7)$$

полученного методом ММА для системы (1.5). Как видно из графиков, результаты моделирования по двум описанным алгоритмам находятся в хорошем количественном соответствии. Кроме того, они, как и ожидалось, соответствуют приближению ММА.

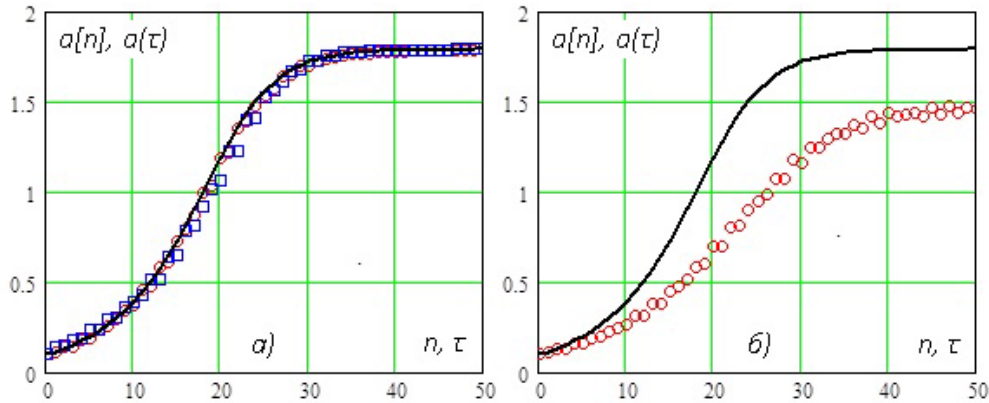


Рис. 4. Процессы установления амплитуд автоколебаний

В то же время, при $M = 1$ расчет по алгоритму (1.7) дает график процесса $a[n]$ (рис. 4, б), существенно отличающийся от приближения ММА и, соответственно, от графика, рассчитанного с помощью алгоритма (2.5)–(2.6). Таким образом, приведенный пример показывает, что в (1.7) следует избегать значений $M = 1$, реализуемых в (2.5)–(2.6). Следовательно, при генерации монохроматических автоколебаний в дискретном времени алгоритм (2.5)–(2.6) имеет большую вычислительную эффективность, чем алгоритм (1.7).

Заключение

Предложенный метод синтеза ДВ-генераторов со строго гармоническими автоколебаниями не связан с моделью кубической нелинейности системы-прототипа. Крутизна $S(a^2)$ в уравнении (1.2) должна лишь допускать наличие стационарного режима автоколебаний. Кроме того, в дискретном времени используется аппроксимация (2.4) скорости осцилляций и основанная на ней оценка (2.5) амплитуды (мгновенной мощности) автоколебаний.

Синтезированные ДВ-генераторы в форме (2.5)–(2.6) можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов.

Литература

- [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
- [2] Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952. 272 с.
- [3] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е, испр. и доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [4] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [5] Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–46. DOI: <http://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46>.

References

- [1] Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.E. *Teoriia kolebanii* [Theory of oscillatoins]. M.: Nauka, 1981, 568 p. [in Russian].
- [2] Teodorchik K.F. *Avtokolebatel'nye sistemy* [Self-oscillating systems]. M.: Gostekhizdat, 1952, 272 p. [in Russian].
- [3] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii. Izd. 4-e, ispr. i dop.* [Asymptotical methods in nonlinear oscillations theory. 4th edition, revised and enlarged]. M.: Nauka, 1974, 504 p. [in Russian].
- [4] Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. *Teoriia kolebanii v radiotekhnike* [Theory of oscillations in radio engineering]. M.: Nauka, 1984, 320 p. [in Russian].
- [5] Zaitsev V.V., Stulov I.V. *O vliianii podmenennykh garmonik na dinamiku avtokolebanii v diskretnom vremeni* [About influence of the changed harmonics on dynamics of self-oscillations in discrete time]. *Izvestiia vuzov. Prikladnaia nelineinaia dinamika* [Izvestiya VUZ. Appled nonlinear dynamics], 2015, Vol. 23, no 6, pp. 40–46. DOI: <http://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46> [in Russian].

V. V. Zaitsev, E. Yu. Fedyunin²

MODEL OF SELF-OSCILLATIONS WITHOUT HARMONICAS OF THE BASE FREQUENCY

The nonlinearity of self-oscillatory system limiting amplitude of the generated signal is a source of the higher harmonicas of the base frequency. Harmonicas distort a form of self-oscillations and lower stability of their frequency. In the work the mathematical model of generation of self-oscillations, free from the highest harmonicas — strictly monochromatic self-oscillations is offered. The model is based on a method of equivalent (harmonious) linearization, popular in the applied theory of nonlinear oscillations. Numerical realization of the model in discrete time has allowed to formulate two algorithms of generation of monochromatic self-oscillations. One of them includes the procedure of numerical integration of a Cauchy problem for the system of ordinary differential equations. Another — reproduces processes in the discrete dynamic system designed on analog model-prototype. The monochromaticity of discrete self-oscillations is confirmed within the numerical experiment.

Key words: self-oscillatory system, harmonious linearization, discrete time, difference equations, harmonious approximation of speed, spectrum of self-oscillations.

Citation. Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu. *Model' avtokolebanii bez garmonik osnovnoi chastoty* [Model of self-oscillations without harmonicas of the base frequency]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 24/IX/2018.
The article received 24/IX/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Zaitsev Valery Vasilievich (zaitsev@samsu.ru), Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Fedyunin Eduard Yurievich (fedyunin_eduard@mail.ru), Joint-Stock Company Progress Rocket Space Centre, 18, Zemetsa Street, Samara, 443009, Russian Federation.