МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-3-35-40

Ф.М. Лосанова[1]

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

В данной работе строится решение внутреннекраевой задачи с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии в прямоугольной области.

Ключевые слова: внутреннекраевая задача, нелокальное смещение, функция типа Райта.

Цитирование. Лосанова Ф.М. Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 35–40. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-35-40.

Введение

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,\,t) - D_{0t}^{\alpha}\,u(x,\,\eta) = f(x,\,t), \tag{1}$$

где D_{0t}^{α} –оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α, определяемый следующим образом [1, с. 28]

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha+1}}d\eta, & \alpha < 0, \\ u(x,t), & \alpha = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p D_{0t}^{\alpha-p}u(x,\eta), & p-1 < \alpha \leqslant p,\, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Дифференциальные уравнения дробного порядка представляют большой интерес для многих авторов, так как математический аппарат интегродифференцирования дробного порядка позволяет описывать процессы в системах, для которых существенен учет нелокальных свойств по времени и пространству. Широкое применение в естествознании получили производные дробного порядка в связи с тем, что их интерпертируют как способ учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координатам). С помощью уравнений в дробных производных можно описать эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции [2]. В частности уравнение (1) возникает при математическом моделировании динамики численности популяции с учетом различных миграционных процессов [3].

Сделаем небольшой обзор работ, посвященных уравнению (1).

В работе [4] исследовались диффузионные и диффузионно-волновые уравнения, представленные в форме, получаемой после интегрирования порядка α уравнения (1), построены фундаментальные решения, изучены некоторые их свойства.

В работе [5] исследовалась задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка ($0 < \alpha < 1$) с регуляризованной дробной производной (производной Капуто) и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. В терминах H-функции построено фундаментальное решение, найдено решение задачи Коши и показана его единственность.

Лосанова Фатима Мухамедовна (`losanovaf@gmail.com`), лаборатория синергетических проблем, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Преобразование Лапласа и преобразование Фурье были использованы в работе [6] для построения фундаментальных решений диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка с производными Капуто и Римана–Лиувилля.

Диффузионно-волновое уравнение методами группового анализа исследовалось в работе [7]. Методом разделения переменных диффузионно-волновое уравнение исследовалось в работе [8].

В работах [9], [10] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка решена задача Коши и первая краевая задача для дробного уравнения диффузии вида (1). Затем методом функции Грина построены решения основных краевых задач в прямоугольной области и с помощью фундаментального решения решена задача Коши для диффузионно-волнового уравнения.

Более полную библиографию можно найти например в [11] и [12].

В данной работе исследуется внутреннекраевая задача со смещением с интегральным условием. На важность исследования краевых задач с нелокальным условием, содержащим интеграл от искомой функции по пространственным переменным, впервые обратил внимание А.А. Самарский [13]. В дальнейшем подобные задачи для уравнений различных типов исследовались во многих работах, например [14] и [15].

Отметим монографию [16], в которой проведен анализ наиболее типичных краевых и внутреннекраевых задач со смещением для уравнений в частных производных различных типов, сделан аналитиический обзор задач, которые можно отнести к классу нелокальных, получены энергетические оценки и необходимые краевые и внутреннекраевые условия со смещением для широких классов уравнений в частных производных основных и смешанных типов в двумерных и многомерных областях (см. библ. сп.).

1. Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,\eta) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,\eta) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in \Omega$.

Ставится следующая

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям:*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,\,t) = \tau(x), \qquad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(0,\,t) + \int\limits_0^l M(x,t)u(x,\,t)dx = \psi(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3}$$

$$u(l,\,t) = \varphi(t), \qquad 0 < t < T, \tag{4}$$

где $\tau(x)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $M(x,t)$ — заданные непрерывные функции.

2. Редукция к интегральному уравнению

Далее обозначим через $u(0,t) = \rho(t)$.

Для нахождения решения задачи (1), (2)–(4) воспользуемся предсталением решения первой краевой задачи для уравнения (1), которое выписывается в виде [12, стр. 99]

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \rho(\eta)G_{\xi}(x,t,0,\eta)d\eta - \int\limits_0^t \varphi(\eta)G_{\xi}(x,t,l,\eta)d\eta +$$

$$+\int\limits_0^l \tau(\eta)G(x,t,\xi,0)d\xi - \int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,\eta)G(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{5}$$

где

$$G(x,t,\xi,\eta) = \frac{(t-\eta)^{\beta-1}}{2}\times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|\,x-\xi+2nl}{(t-\eta)^{\beta}}\right) - e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|\,x+\xi+2nl}{(t-\eta)^{\beta}}\right)\right]$$

— функция Грина первой краевой задачи, $\beta = \alpha/2$,

$$e_{1,\beta}^{1,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n + \mu)}$$

— функция Райта [12, стр. 23].

Удовлетворив функцию (5) условию (3), после несложных преобразований получим

$$\rho(t) + \int_0^t \rho(\eta) K(t,\eta) d\eta = F(t), \tag{6}$$

где

$$K(t,\eta) = \int_0^l M(x,t) G_\xi(x,t,0,\eta) dx, \tag{7}$$

$$G_\xi(x,t,0,\eta) = (t-\eta)^{-1} \Big[e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x}{(t-\eta)^\beta}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|x-2nl|}{(t-\eta)^\beta}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{(x+2nl)}{(t-\eta)^\beta}\right) \Big],$$

$$F(t) = \psi(t) + \int_0^l M(x,t) \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(x,t,l,\eta) d\eta dx -$$

$$- \int_0^l M(x,t) \int_0^l \tau(\xi) G(x,t,\xi,0) d\xi dx + \tag{8}$$

$$+ \int_0^l M(x,t) \int_0^t \int_0^l f(\xi,\eta) G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta dx.$$

3. Исследование ядра

Исследуем далее функцию (7)

$$K(t,\eta) = \int_0^l M(x,t)(t-\eta)^{-1} \times$$

$$\times \Big[e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x}{(t-\eta)^\beta}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|x-2nl|}{(t-\eta)^\beta}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|x+2nl|}{(t-\eta)^\beta}\right) \Big] dx.$$

Будем считать, что функция $M(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}$. Пусть $\overline{M}(t) = \sup\limits_{x\in[0,l]} \mid M(x,t) \mid$. Используя оценку для функции Райта [12, стр. 27] оценим $K(t,\eta)$.

Учитывая, что $e_{1,\beta}^{1,\beta}$ — положительная функция,

$$\Big| \frac{\overline{M}(t)}{t-\eta} \int_0^l \Big[e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x}{(t-\eta)^\beta}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|x-2nl|}{(t-\eta)^\beta}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|x+2nl|}{(t-\eta)^\beta}\right) \Big] dx \Big| \leqslant \overline{M}(t) C \Big| \frac{(t-\eta)^{\beta(1+\theta)-1}}{l^\theta} -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(t-\eta)^{\beta(1+\theta)-1}}{l^\theta (2n+1)^\theta} - \frac{(t-\eta)^{\beta(1+\theta)-1}}{l^\theta (2n-1)^\theta} \right) \Big|$$

или

$$\frac{\overline{M}(t)}{(t-\eta)^{1-\beta}} \Big[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{l}{(t-\eta)^\beta}\right) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|l+2nl|}{(t-\eta)^{\beta}}\right)-e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|l-2nl|}{(t-\eta)^{\beta}}\right)\Big] \leqslant C(t-\eta)^{\beta(1+\theta)-1}, \tag{9}$$

где C — константа, не зависящая от x, $\theta \in (1,2]$.

4. Формулировка результата

Если $t^{1-\alpha}\psi(t) \in C[0,T]$, то из (8) следует, что также $t^{1-\alpha}F(t) \in C[0,T]$. Поэтому из оценки (9) следует, что ядро $K(t,\eta)$ имеет степенную и интегрируемую особенность и, следовательно, резольвента

$$R(t,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n K_{n+1}(t,\eta)$$

тоже имеет такую особенность, где

$$K_1(t,\eta)=K(t,\eta),\ K_n(t,\eta)=\int_{\eta}^{t} K(t,s)K_{n-1}(s,\eta)ds.$$

Таким образом уравнение (6) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода, решение которого можно выписать в виде [см. 17]

$$\rho(t)=F(t)-\int_0^t F(\eta)R(t,\eta)d\eta, \tag{10}$$

где $R(t,\eta)$ — резольвента ядра $K(t,\eta)$.

Теперь, пользуясь представлением (5), решение задачи (1), (2)–(4) может быть выписано в виде

$$u(x,t)=\int_0^t \left[F(t)-\int_0^t F(\eta)R(t,\eta)d\eta\right] G_{\xi}(x,t,0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t \varphi(\eta)G_{\xi}(x,t,l,\eta)d\eta+ \tag{11}$$

$$+\int_0^l \tau(\eta)G(x,t,\xi,0)d\xi-\int_0^t\int_0^l f(\xi,\eta)G(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Сформулируем теорему о разрешимости задачи (1), (2)–(4).

Теорема. *Пусть $M(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<1$, $t^{1-\alpha}\rho(t)$, $t^{1-\alpha}\psi(t)$, $t^{1-\alpha}\varphi(t) \in C[0,T]$, $\tau(x) \in C[0,l]$, $t^{1-\alpha}f(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x. Тогда решение задачи (2)–(4) для уравнения (1) существует, единственно и представимо в виде (11).*

Доказательство.

Заметим, что единственность решения задачи (1), (2)–(4) следует из единственности решения интегрального уравнения (9) и представления (11). Учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\rho(t)$ доказательство того, что функция (11) является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2)–(4) проводится также как и в работе [10].

Литература

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

[2] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

[3] Лосанова Ф.М. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе // Вестник КРАУНЦ. физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 17–21. DOI: https://doi.org/10.18454/2079-6641-2015-11-2-17-21.

[4] Wyss W. The fractional diffusion equation // J. Math. Phys. 1986. 27:11. P. 2782–2785.

[5] Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Докл. РАН. 2004. 394:2. P. 159–161.

[6] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos Solitons Fractals. 1996. 7:9. P. 1461–1477. DOI: http://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00125-5.

[7] Luchko Yu., Gorenflo R. Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. 1998. 1:1. P. 63–78.

[8] Андреев А.А., Еремин А.С. Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени // Математическое моделирование и краевые задачи, Тр. двенадцатой межвуз. конф. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 3–9.

[9] Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1430–1433. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017925.68789.e9.

[10] Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1286–1289. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa.

[11] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[12] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 2005. 199 с.

[13] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.

[14] Ионкин Н.И. Решение одной задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1280–1283. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16.

[15] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.

[16] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М: Наука, 2006. 287 с.

[17] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М: Наука, 1975. 304 с.

References

[1] Nakhushev A.M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. M.: Vyssh. shk., 1995, 301 p. [in Russian].

[2] Uchaikin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p. [in Russian].

[3] Losanova F.M. *Zadacha s usloviem Samarskogo dlia uravneniia drobnoi diffuzii v polupolose* [Problem with conditions Samara for fractional diffusion equation in the half]. *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences], 2015, 11:2, pp. 15–18. DOI: https://doi.org/10.18454/2079-6641-2015-11-2-17-21 [in Russian].

[4] Wyss W. The fractional diffusion equation. *J. Math. Phys.*, 27:11 (1986), pp. 2782–2785 [in English].

[5] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Zadacha Koshi dlia evoliutsionnykh uravnenii drobnogo poriadka* [The Cauchy problem for evolution equations of fractional order]. *Dokl. RAN*, 2004, 349:2, pp. 159–161 [in Russian].

[6] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos Solitons Fractals*, 1996, 7:9, pp. 1461–1477. DOI: http://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00125-5 [in English].

[7] Luchko Yu., Gorenflo R. Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1998, 1:1, pp. 63–78 [in English].

[8] Andreev A.A., Eremin A.S. *Kraevaia zadacha dlia uravneniia diffuzii s drobnoi proizvodnoi po vremeni* [Boundary-value problem for the diffusion equation with a fractional derivative with respect to time]. In: *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi, Tr. dvenadtsatoi mezhvuz. konf.* [Mathematical modelling and boundary-value problems, Proceedings of the 12th interacademic conference]. Samara: SamGTU, 2004, Part 3, pp. 3–9 [in Russian].

[9] Pskhu A.V. *Reshenie kraevykh zadach dlia uravneniia diffuzii drobnogo poriadka metodom funktsii Grina* [Solution of Boundary Value Problems for the Fractional Diffusion Equation by the Green Function Method]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2003, 39:10, pp. 1509–1513. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017925.68789.e9.

[10] Pskhu A.V. *Reshenie pervoi kraevoi zadachi dlia uravneniia diffuzii drobnogo poriadka* [Solution of the First Boundary Value Problem for a Fractional-Order Diffusion Equation]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2003, 39:9, pp. 1359–1363. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa [in Russian].

[11] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. [in Russian].

[12] Pskhu A.V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. M.: Nauka, 2005, 199 p. [in Russian].

[13] Samarskii A.A. *O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravnenii* [Some problems of the theory of differential equations]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 [in Russian].

[14] Ionkin N.I. *Reshenie odnoi zadachi teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem* [The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1977, 13:2, pp. 294–304 [in Russian].

[15] Pulkina L.S. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia* [A Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2004, 40:7, pp. 947–953. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16 [in Russian].

[16] Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shift for Partial Differential Equations]. M.: Nauka, 2006, 287 p. [in Russian].

[17] Krasnov M.L. *Integral'nye uravneniia* [Integral equations]. M.: Nauka, 1975, 304 p. [in Russian].

F.M. Losanova[2]

A PROBLEM WITH NONLOCAL DISPLACEMENT FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

In this paper, we construct a solution of the inner-boundary problem with a nonlocal shift for the fractional diffusion equation in a rectangular region.

Key words: internal task, nonlocal offset, Wright type function.

Citation. Losanova F.M. *Zadacha s nelokal'nym smeshcheniem dlia uravneniia drobnoi diffuzii* [A problem with nonlocal displacement for fractional diffusion equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 3, pp. 35–40. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-35-40 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $4/IX/2018$.
The article received $4/IX/2018$.

[2] *Losanova Fatima Mukhamedovna* (`losanovaf@gmail.com`), Sinergetics Problems laboratory, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Kabardino-Balkar Republic, Russian Federation.