УДК 519.999 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-3-30-34

***Ю.О. Яковлева***[1]

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения третьего порядка в частных производных, не содержащего производные порядка ниже третьего, с некратными характеристиками в плоскости двух независимых переменных. Дифференциальное уравнение имеет три некратные характеристики и является строго гиперболическим. Регулярное решение задачи Коши для дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками найдено в явном виде. Полученное решение задачи Коши позволяет описать процесс распространения начального отклонения, начальной скорости и начального ускорения некоторой колебательной системы.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение третьего порядка, гиперболическое уравнение, некратные характеристики, метод общих решений, задача Коши, регулярное решение, начальное отклонение, начальная скорость.

**Цитирование.** Яковлева Ю.О. Задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 30–34. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-30-34.

## 1. Предварительные сведения

Известно, что в теории гиперболических уравнений основополагающую роль играет понятие характеристики. Краевые задачи для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений третьего и более высокого порядка с некратными характеристиками в некоторых случаях удается решить без вспомогательных функций. В статье излагается метод построения общего решения и решения задачи Коши для строго гиперболического уравнения третьего порядка в плоскости двух независимых переменных с заданием начальных условий на нехарактеристической прямой. Регулярное решение задачи Коши получено в явном виде.

## 2. Основные результаты

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка в частных производных, не содержащее производные порядка ниже третьего,

$$a_0u_{xxx} + a_1u_{xxy} + a_2u_{xyy} + a_3u_{yyy} = 0, \qquad (2.1)$$

где $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ — некоторые ненулевые действительные постоянные.

Пусть характеристическое уравнение

$$-a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0 \; \left(\lambda = \frac{dy}{dx}\right)$$

имеет три различных отличных от нуля корня $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.
Тогда $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{a_1}{a_0}$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{a_3}{a_0}$. Согласно [1] семейства линий

$$y - \lambda_1 x = C_1, y - \lambda_2 x = C_2, y - \lambda_3 x = C_3$$

являются характеристиками уравнения (2.1), а уравнение (2.1) является строго гиперболическим по Петровскому [2].


*Яковлева Юлия Олеговна* (julia.yakovleva@mail.ru), кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Как известно [1], общее решение уравнение (2.1) из класса $C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ представляется в виде суммы

$$u(x,y)=f_1(y-\lambda_1x+C_1)+f_2(y-\lambda_2x+C_2)+f_3(y-\lambda_3x+C_3).$$

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(x,y)=f_1(y-\lambda_1x)+f_2(y-\lambda_2x)+f_3(y-\lambda_3x). \tag{2.2}$$

Рассмотрим **задачу Коши**. Найти регулярное решение $u\,(x,\,y)\in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ уравнения (2.1) в плоскости независимых переменных $(x,\,y)$, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $y=0$:

$$u\,(x,\,y)\,|_{y=0}=\alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=0}=\beta(x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{y=0}=\gamma(x), \tag{2.3}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)\in C^3(L)$, $L=[0,\,l]$, $\vec{n}=(0,1)$ — нормаль к нехарактеристической линии.

Регулярным решением [3; 4] задачи Коши (2.3) в плоскости независимых переменных $(x,\,y)$ будем называть решение, удовлетворяющее уравнению (2.1) и условиям задачи Коши (2.3) в обычном смысле.

Определим функции $f_1$, $f_2$, $f_3$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (2.3):

$$f_1(-\lambda_1x)+f_2(-\lambda_2x)+f_3(-\lambda_3x)=\alpha(x),$$
$$f_1'(-\lambda_1x)+f_2'(-\lambda_2x)+f_3'(-\lambda_3x)=\beta(x),$$
$$f_1''(-\lambda_1x)+f_2''(-\lambda_2x)+f_3''(-\lambda_3x)=\gamma(x).$$

Найдем функции

$$\begin{gathered}
f_1(y-\lambda_1x)=f_1(0)-\lambda_1f_1'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right)+\\
+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\left(\alpha\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right)-\alpha(0)-\alpha'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right)\right)+\\
+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\left((\lambda_2+\lambda_3)\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_1}y}\beta(t)dt-(\lambda_2+\lambda_3)\beta(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right)\right)+\\
+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\lambda_2\lambda_3\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_1}y}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y-t\right)dt,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
f_2(y-\lambda_2x)=f_2(0)-\lambda_2f_2'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right)-\\
-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\alpha\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right)-\alpha(0)-\alpha'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right)\right)-\\
-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\left((\lambda_1+\lambda_3)\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_2}y}\beta(t)dt-(\lambda_1+\lambda_3)\beta(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right)\right)-\\
-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\lambda_1\lambda_3\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_2}y}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y-t\right)dt,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
f_3(y-\lambda_3x)=f_3(0)-\lambda_3f_3'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right)-\\
-\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\alpha(0)+\alpha'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right)-\alpha\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right)\right)+\\
+\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\left((\lambda_1+\lambda_2)\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_3}y}\beta(t)dt-(\lambda_1+\lambda_2)\beta(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right)\right)+\\
+\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_3}y}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y-t\right)dt.
\end{gathered}$$

После некоторых преобразований подставим функции $f_1$, $f_2$, $f_3$ в (2.2).

Учитывая условия согласования, решением задачи Коши (2.3) является функция

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k+1}\lambda_k^2}{\prod\limits_{m=1,\,m\neq k}^{3}(\lambda_k-\lambda_m)}F(x,y,\lambda_k), \tag{2.4}$$

где

$$F(x,y,\lambda_k)=\alpha(x-\frac{1}{\lambda_k}y)+\frac{a_1-\lambda_k a_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_k}y}\beta(t)dt+\frac{a_3}{a_0\lambda_k}\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda_k}y}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_k}y-t\right)dt.$$

Функция (2.4) представима в виде:

$$u(x,y)=\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}F(x,y,\lambda_1)-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}F(x,y,\lambda_2)+$$

$$+\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}F(x,y,\lambda_3).$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что формула (2.4) удовлетворяет уравнению (2.1) и начально-краевым условиям (2.3).

Пусть $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$. Проведем характеристики через точки $(0,0)$, $(l,0)$ плоскости $\{(x,\,y):x\in\mathbb{R},\,y\in\mathbb{R}\}$ [5].

На рисунке 1 приведены: $P_{123}$ — область определения задачи Коши (2.1), (2.3) при $x\in[0,\,l]$, $P_0$ — области покоя, а также области "слабого" и "сильного" влияния $P_i$, $P_{ij}$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$ соответственно.

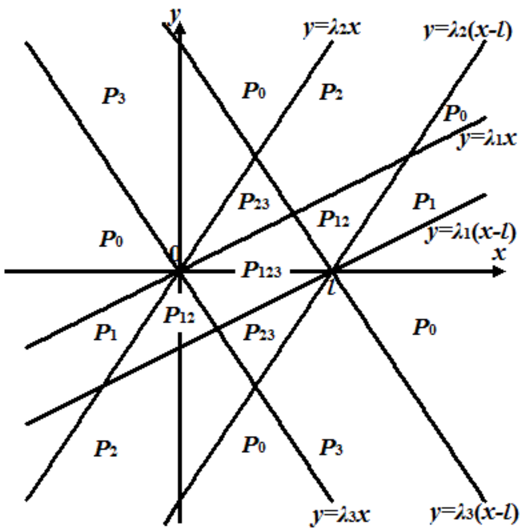


Рис. 1.

Если в условии (2.3) начальные функции задаются на конечном отрезке $x\in[0,\,l]$, то конечность области зависимости решений от начальных данных $P_{123}$ легко описывается в терминах характеристик уравнения [6].

## Литература


[1] Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ле Тхи Тху Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // Тр. Ин-та матем. 2010. № 2(18). С. 36–54. URL: http://mi.mathnet.ru/timb16.

[2] Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. 500 с.

[3] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. 2014. № 4(37). С. 7–15. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1349.

[4] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия физ.-мат. науки. 2017 № 4(21). С. 752–759. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1577.

[5] Яковлева Ю.О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. 2012. № 1(26). С. 247–250. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1028.

[6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Наука, 1972. 736 с.

# References

[1] Korzyuk V.I., Cheb E.S., Le Thi Thu. *Reshenie smeshannoi zadachi dlia bivolnovogo uravneniia metodom kharakteristik* [Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics]. *Tr. In-ta matem.* [Trudy Instituta Matematiki], 2010, no. 2(18), pp. 36–54. Available at: http://mi.mathnet.ru/timb16 [in Russian].

[2] Petrovskiy I.G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. M.: Nauka, 1986, 500 p. [in Russian].

[3] Andreev A.A., Yakovleva Ju.O. *Zadacha Koshi dlia sistemy uravnenii giperbolicheskogo tipa chetvertogo poriadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami* [Cauchy Problem For the System of General Hyperbolic Differential Equations of the Forth Order with Nonmultiple Characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriia fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2014, Vol. 37, no. 4, pp. 7–15. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1349 [in Russian].

[4] Andreev A.A., Yakovleva Ju.O. *Zadacha Koshi dlia sistemy differentsial'nykh uravnenii giperbolicheskogo tipa poriadka n s nekratnymi kharakteristikami* [The Cauchy problem for a general hyperbolic differential equation of the n-th order with the nonmultiple characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriia fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2017, Vol. 21, no. 4, pp. 752–759. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1577 [in Russian].

[5] Yakovleva Ju.O. [The analogue of D'Alembert formula for hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriia fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2012, Vol. 26, no. 1, pp. 247–250. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1028 [in Russian].

[6] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Izd-vo Nauka, 1972, 735 p. [in Russian].

***J.O. Yakovleva***[2]

# THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

In the article the Cauchy problem for the third order hyperbolic differential equation with nonmultiple characteristics is considered on the plane of two independent variables. The differential equation has tree nonmultiple characteristics and this equation is strongly hyperbolic equation. The regular solution of the Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the third order with the nonmultiple characteristics is constructed in an explicit form, the solution is obtained by the method of general solutions. The solution of the Cauchy problem enables describing the propagation of initial displacement, initial velocity and initial acceleration.

**Key words:** differential equation of the third order, hyperbolic equation of the third order, nonmultiple characteristics, method of common solutions, Cauchy problem, regular solution, initial displacement, initial velocity.

**Citation.** Yakovleva Ju.O. *Zadacha Koshi dlia giperbolicheskogo uravneniia tret'ego poriadka* [The Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the third order]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 30–34. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-30-34 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 22/*VIII*/2018.
The article received 22/*VIII*/2018.



[2] *Yakovleva Julia Olegovna* (`julia.yakovleva@mail.ru`), Department of Higher Mathematics, Samara State Technical Universuty, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.