УДК 517.95 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29

М.А. Керефов, Ф.М. Нахушева, С.Х. Геккиева[1]

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА АЛЛЕРА — ЛЫКОВА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

Работа посвящена рассмотрению уравнения Аллера — Лыкова с дробной по времени производной Римана — Лиувилля с краевыми условиями третьего рода, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Подобные условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость. Аналогичные условия возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка. Для рассматриваемой задачи с помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана — Лиувилля, из которой следует единственность решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Аллера — Лыкова, дробная производная, нелокальная задача, обобщенное уравнение влагопереноса, сосредоточенная теплоемкость, метод энергетических неравенств, априорная оценка, краевая задача.

Цитирование. Керефов М.А., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 23–29. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29.

Введение

В основе математических моделей, описывающих процессы фильтрации жидкости в пористых средах [1; 2], передачи тепла в гетерогенной среде [3; 4], переноса почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности [5; 6] лежат уравнения в частных производных третьего порядка. В настоящее время активно изучаются локальные и нелокальные краевые задачи для указанных уравнений, в том числе краевые задачи, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Такие задачи возникают в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка [7, с. 233]. Отметим в этом направлении работы [8–10], в которых рассмотрены краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью.

В данной работе исследована краевая задача с сосредоточенной теплоемкостью для уравнения вида

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}u + D_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

где D_{0t}^{α} — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля [11, с. 9], $0 < \alpha < 1$, A_1, $A = const > 0$.

Керефов Марат Асланбиевич (kerefov@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Нахушева Фатима Мухамедовна (fatima_nakhusheva@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Геккиева Сакинат Хасановна (gekkieva_s@mail.ru), отдел математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением Аллера — Лыкова, которое впервые было предложено Куликом В.Я. [12] для описания процессов испарения и инфильтрации влаги в почве. Такого рода уравнения рассмотрены в работах [13–16].

1. Постановка задачи

В области $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T\}$ рассмотрим уравнение (1).

Регулярным решением уравнения (1) в области Q_T назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t), \ D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right); \ D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t), \ u_{xx}(x,t), \ D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C\left(Q_T\right)$, которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in Q_T$. Сформулируем нелокальную краевую задачу для уравнения (1).

Задача. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q_T, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi(x,t) = \chi_1 D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - \mu_1(t), \quad x = 0, \\ -\Pi(x,t) = \chi_2 D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - \mu_2(t), \quad x = l, \end{array} \right. \tag{1}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \nu(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

где $\tau(x), \ \nu(x), \ \mu_1(t), \ \mu_2(t)$ — заданные функции, $\Pi(x,t) = k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}$ — поток влаги через сечение x в единицу времени, $\chi_1(t), \ \chi_2(t)$ — сосредоточенная теплоемкость на границах области по направлению x.

Пусть существует регулярное решение задачи. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $k_x(x,t), \ k_t(x,t), \ f(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right), \ \nu(x) \in C[0,l], \ \tau(x) \in C^2[0,l], \ k \geqslant c_1 > 0, \ k_t \leqslant 0, \ \chi_1, \ \chi_2 \geqslant 0, \ \chi_1 + \chi_2 > 0$ всюду на $\bar{Q}_T$ и выполнено условие $\tau(0) = \tau(l) = \tau'(0) = \tau'(l) = 0$, тогда для решения задачи (1), (1), (2) справедлива априорная оценка:

$$\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u\|_{2,Q_t}^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_1(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|\tau'(x)\|_0^2 + \|\tau''(x)\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \int_0^t \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)d\tau\right). \tag{3}$$

Доказательство. Аналогично [16] введем новую неизвестную функцию $g(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = g(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$$

так, что $g(x,t)$ представляет собой отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1}t^{\alpha-1} = 0, \ D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1} = 0$ [17, с. 15] функция $g(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}g + D_{0t}^{\alpha}g - (kg_x)_x - AD_{0t}^{\alpha}g_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}g(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}\left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) = \tau(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}t^{\alpha-1} = 0,$$
$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}g(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}\left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) = \nu(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1} = \nu(x) \tag{5}$$

и граничными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi(x,t) = \chi_1 D_{0t}^{\alpha}g(x,t) - \mu_1(t), \quad x = 0, \\ -\Pi(x,t) = \chi_2 D_{0t}^{\alpha}g(x,t) - \mu_2(t), \quad x = l, \end{array} \right. \tag{6}$$

где $\Pi(x,t) = k(x,t)\frac{\partial g}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial g}{\partial x}, \ F(x,t) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(k_x\tau'(x) + k\tau''(x)\right).$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана — Лиувилля, для чего умножим уравнение (4) скалярно на $D_{0t}^{\alpha}g$:

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1}g, D_{0t}^{\alpha}g\right) + \left(D_{0t}^{\alpha}g, D_{0t}^{\alpha}g\right) - \left((kg_x)_x, D_{0t}^{\alpha}g\right) - A\left(D_{0t}^{\alpha}g_{xx}, D_{0t}^{\alpha}g\right) = \left(F, D_{0t}^{\alpha}g\right), \tag{7}$$

где $(u,v) = \int\limits_0^l uv dx, \ (u,u) = \|u\|_0^2.$

Преобразуем слагаемые тождества (7) с учетом (5), (6):

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1}g, D_{0t}^{\alpha}g\right) = \frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2,$$

$$(D_{0t}^{\alpha}g, D_{0t}^{\alpha}g) = \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2\,,$$

$$((kg_x)_x\,, D_{0t}^{\alpha}g) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l (kg_x)_x\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{ kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l - \int\limits_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(l,t)g_x(l,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(l,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(0,t)g_x(0,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(0,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx,$$

$$A\left(D_{0t}^{\alpha}g_{xx}, D_{0t}^{\alpha}g\right) = \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_{xx}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx =$$

$$= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l\right\} - A\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2\,,$$

$$(F, D_{0t}^{\alpha}g) \leqslant \frac{1}{2}\,\|F\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2\,.$$

С учетом полученных неравенств из (7) получим:

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(l,t)g_x(l,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(l,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(0,t)g_x(0,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(0,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx -$$

$$-\frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l\right\} + A\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\|F\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2\,.$$

Последнее неравенство с учетом граничных условий (6) примет вид:

$$\begin{gathered}\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\int\limits_0^t \frac{g_x(x,t)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx + A\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2 + \\ + \left((\chi_2 D_{0t}^{\alpha}g(l,t) - \mu_2(t)\right)\,D_{0t}^{\alpha}g(l,t) + \left(\chi_1 D_{0t}^{\alpha}g(0,t) - \mu_1(t)\right)D_{0t}^{\alpha}g(0,t) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\,\|F\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Последние слагаемые в левой части неравенства (8) оценим так:

$$\mu_1 D_{0t}^{\alpha}g(0,t) + \mu_2 D_{0t}^{\alpha}g(l,t) \leqslant \frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(D_{0t}^{\alpha}g(0,t)\right)^2 + \left(D_{0t}^{\alpha}g(l,t)\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right) + \left(\varepsilon\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2 + c_{\varepsilon}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2\right).$$

Здесь мы воспользовались известной оценкой [18, с. 173]:

$$\|u\|_c^2 \leqslant \varepsilon\,\|u_x\|_0^2 + c_{\varepsilon}\,\|u\|_0^2\,,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная, $c_{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}$.

Учитывая условия $\chi_1,\ \chi_2 \geqslant 0,\ \chi_1+\chi_2 > 0$, усилим неравенство (8). Тогда получим

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx + A\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2 +$$

$$+\chi_1\left(D_{0t}^{\alpha}g(0,t)\right)^2+\chi_2\left(D_{0t}^{\alpha}g(l,t)\right)^2\leqslant \tag{9}$$
$$\leqslant \varepsilon\left\|D_{0t}^{\alpha}g_x\right\|_0^2+\left(c_\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)+\frac{1}{2}\left\|F\right\|_0^2.$$

Проинтегрируем (9) по τ от 0 до t:

$$\frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-c_\varepsilon\right)\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g\right\|_0^2d\tau+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l kg_x(x,t)\int\limits_0^\tau\frac{g_x(x,\xi)d\xi}{(\tau-\xi)^\alpha}dxd\tau+(A-\varepsilon)\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g_x\right\|_0^2d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(\mu_1^2+\mu_1^2\right)d\tau+\frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}g(x,0)\right\|_0^2.$$

Предположим, что $k_t\leqslant 0$, тогда неотрицательность тройного интеграла в левой части последнего неравенства доказывается так же, как в [11, с. 43]. Усиливая это неравенство, получим:

$$A_1\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+2\nu\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_{2,Q_t}^2+2\nu_1\left\|D_{0t}^{\alpha}g_x\right\|_{2,Q_t}^2\leqslant\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2+\int\limits_0^t\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau+A_1\left\|\nu(x)\right\|_0^2,$$

где $\nu=\frac{1}{2}-c_\varepsilon>0$, $\nu_1=A-\varepsilon>0$, $\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_{2,\Omega_t}^2=\int_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha}g(x,t)\right\|_0^2d\tau$. Откуда следует оценка

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|D_{0t}^{\alpha}g_x\right\|_{2,Q_t}^2\leqslant M(t)\left(\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|\nu(x)\right\|_0^2+\int\limits_0^t\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau\right)$$

или, возвращаясь к $u(x,t)$, получим (3).

Теорема доказана.

Замечание. Из (3) следует единственность решения задачи (1), (1), (2).

Действительно, пусть u – решение однородной задачи, т. е. $f=\tau=\nu=0$. Тогда из (3) имеем:

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^{\alpha}u_x\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|D_{0t}^{\alpha}u\right\|_{2,Q_t}^2=0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона — Лейбница [17, с. 15]:

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u(x,t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t),$$

в частности, получим:

$$u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)=0\ \text{в}\ Q_T.$$

Учитывая произвольность T, получаем, что $u(x,t)=0$ во всех точках $(x,t)\in Q$.

Литература

[1] Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 25. Вып. 5. С. 852–864.

[2] Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.

[3] Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.

[4] Ting T., Cooling A. Process according to two temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 45. № 9. P. 23. DOI: http://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90116-4.

[5] Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. № 9.

[6] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.

[7] Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 358 с.

[8] Нахушева Ф.М., Водахова В.А., Кудаева Ф.Х., Абаева З.В. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 763. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24123596.

[9] Нахушева Ф.М., Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Кармоков М.М. Разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 839. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24921705.

[10] Шхануков-Лафишев М.Х., Лафишева М.М., Нахушева Ф.М., Мамбетова А.Б. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью // Владикавказский матем. журн. 2013. Т. 15. № 4. С. 58–64. DOI: http://doi.org/10.23671/VNC.2013.4.7345.

[11] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.

[12] Кулик В.Я. Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований // Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух. Л.: Наука. 1972.

[13] Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с нелокальным условием // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19. Вып. 1. С. 50–58. DOI: http://doi.org/10.23671/VNC.2017.1.5821.

[14] Геккиева С. Х. Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с дробной по времени производной // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели». Нальчик. 2017. С. 99–102.

[15] Архестова С.М., Шхануков-Лафишев М.Х., Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с нелокальным условием // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2012. № 3(47). С. 7–16.

[16] Геккиева С.Х., Керефов М.А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. № 1(21). С. 21–32. DOI: http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31.

[17] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.

[18] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.

References

[1] Barenblat G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. *Ob osnovnykh predstavleniiakh teorii fil'tratsii odnorodnykh zhidkostei v treshchinovatykh porodakh* [About the main submissions of the theory of filtration of uniform liquids in jointed breeds]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1960, Vol. 25, Issue 5, pp. 852–864 [in Russian].

[2] Dzektser E.S. *Uravneniia dvizheniia podzemnykh vod so svobodnoi poverkhnost'iu v mnogosloinykh sredakh* [Equations of the movement of underground waters with a free surface in multilayered environments]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Earth Sciences], 1975, Vol. 220, no 3, pp. 540–543 [in Russian].

[3] Rubinshtein L.I. *K voprosu o protsesse rasprostraneniia tepla v geterogennykh sredakh* [To the question of the process of distribution of heat in heterogeneous environments]. *Izv. AN SSSR. Ser. geogr.* [Izvestiya RAN (Akad. Nauk SSSR). Seriya Geograficheskaya], 1948, Vol. 12, no 1, pp. 27–45 [in Russian].

[4] Ting T., Cooling A. Process according to two temperature theory of heat conduction. *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, Vol. 45, no 9, p. 23. DOI: http://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90116-4 [in English].

[5] Hallaire M. L'eau et la production vegetable. *Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, no 9 [in French].

[6] Chudnovsky A.F. *Teplofizika pochv* [Thermophysics of soils]. M.: Nauka, 1976, 352 p. [in Russian].

[7] Nerpin S.V., Chudnovsky A.F. *Energo- i massoobmen v sisteme rastenie-pochva-vozdukh* [Power- and a mass exchange in system plant-soil-air]. L.: Gidrometeoizdat, 1975, 358 p. [in Russian].

[8] Nakhusheva F.M., Vodakhova V.A., Kudaeva F.Kh., Abaeva Z.V. *Lokal'no-odnomernaia skhema dlia uravneniia diffuzii drobnogo poriadka s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation with a concentrated heat capacity]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia* [Modern problems of science and education], 2015. no 2, p. 763. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24123596 [in Russian].

[9] Nakhusheva F.M., Kudaeva F.Kh., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M. *Raznostnaia skhema dlia uravneniia diffuzii drobnogo poriadka s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Difference schemes for the fractional order diffusion equation with a concentrated heat capacity]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia* [Modern problems of science and education], 2015, no 2, p. 839. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24921705 [in Russian].

[10] Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Lafisheva M.M., Nakhusheva F.M., Mambetova A.B. *Lokal'no-odnomernaia skhema dlia uravneniia teploprovodnosti s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Local and one-dimensional scheme for the heat conductivity equation with the concentrated thermal capacity]. *Vladikavkazskii matem. zhurn.* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2013, Vol. 15, Issue 4, pp. 58–64. DOI: http://doi.org/10.23671/VNC.2013.4.7345 [in Russian].

[11] Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculation and its application]. M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. [in Russian].

[12] Kulik V.Ya. *Issledovanie dvizheniia pochvennoi vlagi s tochki zreniia invariantnosti otnositel'no nepreryvnykh grupp preobrazovanii* [Research of the movement of soil moisture from the point of view of invariancy of rather continuous groups of transformations]. In: *Sb. "Issledovanie protsessov obmena energiei i veshchestvom v sisteme pochva-rastenie-vozdukh"* [Collection "Research of the Processes of Exchange of Energy and Substance in the System Soil-Plant-Air"]. L.: Nauka, 1972 [in Russian].

[13] Lafisheva M.M., Kerefov M.A., Dyshekova R.V. *Raznostnye skhemy dlia uravneniia vlagoperenosa Allera — Lykova s nelokal'nym usloviem* [Differential schemes for the equation of moisture transfer of Aller — Lykov with not local condition]. *Vladikavkazskii matem. zhurn.* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2017. Vol. 19, Issue 1, pp. 50–58. DOI: http://doi.org/10.23671/VNC.2017.1.5821 [in Russian].

[14] Gekkieva S.Kh. *Pervaia kraevaia zadach dlia uravneniia vlagoperenosa Allera — Lykova s drobnoi po vremeni proizvodnoi* [First boundary-value problem for Aller — Lykov moisture transfer equation with time fractional derivative]. *Materialy Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Ustoichivoe razvitie: problemy, kontseptsii, modeli"* [Materials of the All-Russian conference with the international participation "Sustainable development: problems, concepts, models"]. Nalchik, 2017, pp. 99–102 [in Russian].

[15] Arkhestova S.M., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. *Raznostnye skhemy dlia uravneniia vlagoperenosa Allera — Lykova s nelokal'nym usloviem* [Differential schemes for the equation of moisture transfer of Aller — Lykov with not local condition]. *Izvestiia Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of Kabardino-Balkarian scientific center of the Russian Academy of Sciences], 2012, no 3 (47), pp. 7–16 [in Russian].

[16] Gekkieva S.Kh., Kerefov M.A. *Kraevye zadachi dlia obobshchennogo uravneniia vlagoperenosa* [The boundary value problem for the generalized moisture transfer equation]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin KRASEC. Physical & Mathematical Sciences], 2018, no 1 (21), pp. 21–32. DOI: http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31 [in Russian].

[17] Pskhu A.V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Equations in private derivatives of a fractional order]. M.: Nauka, 2005, 199 p. [in Russian].

[18] Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

M.A. Kerefov, F.M. Nakhusheva, S.Kh. Gekkieva[2]

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ALLER — LYKOV MOISTURE TRANSPORT GENERALIZED EQUATION WITH CONCENTRATED HEAT CAPACITY

The article considers the Aller — Lykov equation with a Riemann — Liouville fractional time derivative, boundary conditions of the third kind and with the concentrated specific heat capacity on the boundary of the domain. Similar conditions arise in the case with a material of a higher thermal conductivity when solving a temperature problem for restricted environment with a heater as a concentrated heat capacity. Analogous conditions also arise in practices for regulating the water-salt regime of soils, when desalination of the upper layer is achieved by draining of a surface of the flooded for a while area. Using energy inequality methods, we obtained an a priori estimate in terms of the Riemann — Liouville fractional derivative, which revealed the uniqueness of the solution to the problem under consideration.

Key words: Aller's — Lykov equation, fractional derivative, nonlocal problem, moisture transfer generalized equation, concentrated heat capacity, inequalities method, a priori estimate, boundary value problem.

Citation. Kerefov M.A., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. *Kraevaia zadacha dlia obobshchennogo uravneniia vlagoperenosa Allera — Lykova s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Boundary value problem for the Aller — Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity] [Boundary value problem for the Aller — Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 3, pp. 23–29. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 5/*IX*/2018.
The article received 5/*IX*/2018.

[2]*Kerefov Marat Aslanbievich* (`kerefov@mail.ru`), Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevsky Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

Nakhusheva Fatima Mukhamedovna (`fatima_nakhusheva@mail.ru`), Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevsky Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

Gekkieva Sakinat Khasanovna (`gekkieva_s@mail.ru`), Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2, Balkarova Street, Dolinsk, Nalchik, 360002, Russian Federation.