УДК 517.9 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-3-14-22

О.А. Иванова, С.Н. Мелихов[1]

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ С УМНОЖЕНИЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМ СДВИГАМИ

В топологическом сопряженном к счетному индуктивному пределу E весовых пространств Фреше целых функций многих комплексных переменных с помощью обычных сдвигов определено умножение — свертка. Полученная алгебра изоморфна коммутанту системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в E. В построенной алгебре аналитических функционалов в двух несмешанных случаях введена топология, с которой эта алгебра становится топологической и уже топологически изоморфна указанному коммутанту с соответствующей (естественной) операторной топологией. Доказано, что в этих ситуациях данная алгебра не имеет делителей нуля при условии, что многочлены плотны в E. Показана существенность этого предположения для справедливости последнего утверждения.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, алгебра аналитических функционалов, топологическая алгебра, коммутант, оператор свертки.

Цитирование. Иванова О.А., Мелихов С.Н. О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 14–22. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-14-22.

Введение

Начиная с 30-х годов прошлого века интенсивно развивается теория банаховых алгебр, в частности, $\mathbb{C}^*$-алгебр, нашедшая многочисленные применения не только в математике, но и в физике (например, в квантовой механике). Топологические алгебры, не являющиеся банаховыми, даже близкие к ним, не обладают рядом их важных свойств. Например, одним из центральных моментов в теории банаховых алгебр является использование достаточного набора ненулевых мультипликативных линейных функционалов. Для топологической алгебры, не являющейся банаховой, такие линейные непрерывные функционалы на ней могут и не существовать. Несмотря на это, и небанахов случай имеет широкое поле применений (см. [1; 2]). Отметим также использование небанаховых алгебр при исследовании операторов обобщенного интегрирования [3], в спектральной теории в пространствах аналитических функционалов [4–5] (изучаемые в [3–5] объекты близки к рассматриваемым в этой работе), в теории операторов обобщенного сдвига [6], групп Ли [7] и алгебр Ли [8]. В настоящей статье исследуется алгебра, имеющая "хорошее" представление в ненормируемом весовом пространстве целых функций. Именно, здесь изучается алгебра линейных непрерывных функционалов (аналитических функционалов) на счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых (в $\mathbb{C}^N$) функций, введенная в [9]. Многие локально выпуклые пространства и их сопряженные, используемые в комплексном анализе, анализе Фурье, в теории распределений и ультрараспределений, реализуются с помощью преобразования Фурье-Лапласа и его аналогов в виде пространства E. Умножение $\odot$ в сопряженном E' к E задается обычными сдвигами, т. е. является стандартной сверткой функционалов. Алгебра $(E', \odot)$ изоморфна коммутанту $\mathcal{K}(\partial)$ системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов в E с обычным умножением — композицией операторов. Ненулевыми мультипликативными функционалами на ней, задаваемыми элементами E, являются те и только те, которые соответствуют принадлежащим E экспонентам [9, замечание 4]. Значит, если E не содержит ни одной экспоненты, то таких функционалов нет. Мы показываем, что в несмешанных случаях, когда E является счетным индуктивным пределом

Иванова Ольга Александровна (neo_ivolga@mail.ru), кафедра математического анализа и геометрии, Южный федеральный университет, 344090, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.
Мелихов Сергей Николаевич (melih@math.rsu.ru), кафедра алгебры и дискретной математики, Южный федеральный университет, 344090, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а; Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, 362027, Российская Федерация, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53.

банаховых пространств или пространством Фреше, построенная алгебра является топологической при наделении E' соответствующей топологией сопряженного пространства. В этих случаях указанный изоморфизм $(E', \odot)$ и $\mathcal{K}(\partial)$ является и топологическим, если в $\mathcal{K}(\partial)$ вводится естественная операторная топология. (В общем случае топологичность изоморфизма имеет место, если E' наделено слабой, а $\mathcal{K}(\partial)$ — слабо-операторной топологией [9].) В общей, смешанной, ситуации доказаны достаточные условия топологического характера для наличия алгебраического свойства — отсутствия делителей нуля в $(E', \odot)$. В частности, в рассмотренных "чистых" ситуациях $(E', \odot)$ не имеет делителей нуля при предположении, что многочлены плотны в E. Это предположение существенно, как показывает пример пространства E, изоморфному сильному сопряженному к $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Отсутствие делителей нуля в $(E', \odot)$ означает инъективность оператора свертки в E', заданного ненулевым функционалом, что полезно, в частности, при исследовании уравнений свертки в конкретных пространствах.

Далее мы используем сведения из теории локально выпуклых пространств из [10–12]. Всюду ниже алгебра — это комплексное линейное пространство $\mathcal{A}$ с умножением, т. е. билинейным отображением $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Она называется топологической, если $\mathcal{A}$ является локально выпуклым пространством и умножение непрерывно из $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$.

1. Предварительные сведения

1.1. Основные пространства

Приведем необходимые сведения из статьи [9]. Пусть $N \in \mathbb{N}$; $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, — двойная последовательность непрерывных функций такая, что в $\mathbb{C}^N$

$$v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}, \ n, k \in \mathbb{N}.$$

Символ $A(\mathbb{C}^N)$ обозначает пространство всех целых (в $\mathbb{C}^N$) функций. Для $n, k \in \mathbb{N}$ определим весовые банаховы пространства

$$E_{n,k} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}^N) \middle| \ \|f\|_{n,k} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_{n,k}(z))} < +\infty \right\}$$

и пространства Фреше $E_n := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} E_{n,k}$. Топология в E_n задается последовательностью норм $\|\cdot\|_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Каждое пространство E_n непрерывно вложено в E_{n+1}.

Положим $E := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ и введем в E топологию индуктивного предела пространств Фреше E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений вложения E_n в E.

Далее $|z| := \left(\sum\limits_{j=1}^{N} |z_j|^2 \right)^{1/2}$ для $z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$. Определим условия

$(V1)$ $\quad \forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s$:

$$\lim_{|z| \to \infty} \left(\inf_{|t-z| \leqslant 1} v_{m,k}(t) - \sup_{|t-z| \leqslant 1} v_{n,s}(t) \right) = +\infty$$

и

$(V2)$ $\quad \forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s \ \exists C < +\infty : \ \forall t, z \in \mathbb{C}^N$

$$v_{n,s}(t+z) \leqslant v_{m,k}(t) + v_{m,k}(z) + C.$$

Пусть $\partial_j f := \frac{\partial f}{\partial z_j}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Введем операторы сдвига

$$\tau_z(f)(t) := f(t+z), \ \ z, t \in \mathbb{C}^N, \ \ f \in E.$$

Замечание 1. Пусть выполняется условие (V1).
(i) Все операторы ∂_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, и τ_z, $z \in \mathbb{C}^N$, линейно и непрерывно отображают E в E.
(ii) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m. При этом m для каждого n можно выбрать таким, как в условии (V1).

Конкретные примеры введенных пространств E, описание их свойств можно найти в [9; 13; 14].

1.2. Умножение в E'

Пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов в E. Оно является алгеброй с умножением — композицией операторов. Введем коммутант $\mathcal{K}(\partial)$ системы $\{\partial_j \,|\, 1 \leqslant j \leqslant N\}$ в $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(\partial) := \{A \in \mathcal{L}(E) \,|\, A\partial_j = \partial_j A \ \text{ в } \ E, \ 1 \leqslant j \leqslant N\}$$

и коммутант $\mathcal{K}(\tau)$ системы операторов сдвига в $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(\tau) := \{A \in \mathcal{L}(E) \,|\, \forall z \in \mathbb{C}^N \ A\tau_z = \tau_z A \ \text{ в } \ E\}.$$

Умножение в E' оказывается непосредственно связанным с введенными коммутантами. Приведем их описание.

Теорема 1. [9] Пусть выполняются условия (V1) и (V2). Следующие утверждения равносильны:

(i) $A \in \mathcal{K}(\partial)$.

(ii) $A \in \mathcal{K}(\tau)$.

(iii) Существует $\varphi \in E'$ такое, что $A(f)(z) = \varphi(\tau_z(f)), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}^N$.

Далее предполагаем, что последовательность $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (V1) и (V2). Определим в E' операцию умножения $\odot$. Для $\varphi, \psi \in E'$ положим

$$(\varphi \odot \psi)(f) := \varphi_z(\psi(\tau_z(f))), \ f \in E.$$

Здесь нижний индекс у функционала показывает, по какой переменной действует функционал. Операция $\odot$ определена корректно, а отображение $\omega : E' \to \mathcal{K}(\partial)$,

$$\omega(\varphi)(f)(z) := \varphi(\tau_z(f)), \varphi \in E', f \in E, z \in \mathbb{C}^N,$$

биективно. При этом ω — изоморфизм алгебр $(E', \odot)$ и $\mathcal{K}(\partial)$, и обе они ассоциативны и коммутативны.

Пусть $\delta_z(f) := f(z), \ f \in E, \ z \in \mathbb{C}^N$. Все функционалы δ_z линейны и непрерывны на E. Отметим, что для любого $A \in \mathcal{K}(\partial)$ выполняется равенство $\omega^{-1}(A) = \delta_0 A$.

2. Топологический изоморфизм E' и $\mathcal{K}(\partial)$

2.1. О топологической алгебре $(E', \odot)$

Положим $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\quad |\alpha| := \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j$ для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$. Введем функционалы

$$\varphi_\alpha(f) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}(0), \ f \in E, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Ясно, что $\varphi_\alpha \in E'$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Отметим равенство $\varphi_\alpha \odot \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$.

Символом $\sigma(E', E)$ обозначим слабую топологию в E', определяемую естественной двойственностью между E и E'. Система $\{\varphi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $(E', \sigma(E', E))$, т.е. замыкание ее линейной оболочки в $(E', \sigma(E', E))$ совпадает с E'. Действительно, если $f \in E$ и $\varphi_\alpha(f) = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, то по теореме единственности $f = 0$.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ определим дуальные к $\|\cdot\|_{n,k}$ "нормы": для $\varphi \in E_n'$

$$\|\varphi\|'_{n,k} := \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n.k} \leqslant 1} |\varphi(f)|.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в E_n' введем топологию λ_n индуктивного предела пространств

$$\widetilde{E}_{n,k} := \{\varphi \in E_n' \,|\, \|\varphi\|'_{n,k} < +\infty\}, \ k \in \mathbb{N},$$

относительно отображений вложения $\widetilde{E}_{n,k}$ в E_n'. При этом $\widetilde{E}_{n,k}$ — банахово пространство с нормой $\|\varphi\|'_{n,k}$ (см. [10, гл. 8, 8.4.14]). В E' зададим топологию λ проективного предела последовательности пространств (E_n', λ_n), $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений сужения $j_n' : E' \to E_n'$, $\varphi \mapsto \varphi\big|_{E_n}$, сопряженных к вложениям $j_n : E_n \to E$.

Следующая лемма проясняет характер непрерывности операторов вида $\omega(\varphi)$ в E.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (V1) и (V2). Тогда $\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s \ \exists D < +\infty$: для любого $\varphi \in E'$ такого, что $j_m'(\varphi) \in \widetilde{E}_{m,k}$, любого $f \in E_n$

$$\|\omega(\varphi)(f)\|_{m,k} \leqslant D \|j_m'(\varphi)\|'_{m,k} \|f\|_{n,s}.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Выберем m и для k определим s и C по (V2). Тогда для любого $\varphi \in E'$, для которого $j'_m(\varphi) \in \widetilde{E}_{m,k}$, любого $f \in E_n$

$$\|\omega(\varphi)(f)\|_{m,k} = \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|\varphi(\tau_z(f))|}{\exp(v_{m,k}(z))} \leqslant \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \sup_{z,t \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(t+z)|}{\exp(v_{m,k}(z)+v_{m,k}(t))} \leqslant$$

$$e^C \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \sup_{z,t \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(t+z)|}{\exp(v_{n,s}(z+t))} = e^C \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \|f\|_{n,s}.$$

Мы докажем топологичность алгебры $(E', \odot)$ в двух частных, "чистых" случаях. Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. В этой ситуации каждое пространство E_n является банаховым с нормой $\|\cdot\|_{n,1}$. Вследствие замечания 1 (ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется m такое, что вложение E_n в E_m компактно. Поэтому [12, теорема 25.20, замечание 24.24] (E', λ) — пространство Фреше-Шварца с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм $\|j'_n(\varphi)\|'_{n,1}$, $\varphi \in E'$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае топологию μ в $\mathcal{K}(\partial)$ зададим последовательностью преднорм $q_n(A) := \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leqslant 1} \|A(f)\|_{m(n),1}$, $A \in \mathcal{K}(\partial)$, где $m(n)$ выбрано для n по лемме 1. Заметим, что $(\mathcal{K}(\partial), \mu)$ является пространством Фреше. Это влечет, что топология μ не зависит от выбора $m(n)$.

Пусть теперь функции $v_{n,k}$ не зависят от n, т.е. $v_{n,k} = v_{1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. В этом случае E является монтелевским пространством Фреше (см. [10, гл. 8, 8.4.7], [12, гл. 3, § 24]), а (E', λ) — индуктивным пределом последовательности банаховых пространств $\widetilde{E}_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в E'. Для $k \in \mathbb{N}$ введем пространства $\mathcal{K}_k(\partial) = \{A \in \mathcal{K}(\partial) \,|\, t_k(A) = \sup_{f \in E, \|f\|_{1,s(k)} \leqslant 1} \|A(f)\|_{1,k} < +\infty\}$, где $s(k)$ выбрано для k по лемме 1. При этом t_k — норма в $\mathcal{K}_k(\partial)$ и $\mathcal{K}(\partial) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_k(\partial)$. В данном случае топология μ в $\mathcal{K}(\partial)$ — это топология индуктивного предела последовательности нормированных пространств $\mathcal{K}_k(\partial)$ с нормами t_k, $k \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $\mathcal{K}(\partial)$. (Из теоремы 4, доказываемой ниже, следует, что μ не зависит от выбора $s(k)$.)

Для обеих описанных несмешанных топологических структур топология λ в E' согласуется с двойственностью между E' и E, т.е. она мажорирует слабую $\sigma(E', E)$ и мажорируется топологией Макки $\tau(E', E)$ [11, гл. IV, § 3].

Теорема 2. Пусть выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n. Тогда (E', λ) с умножением $\odot$ является топологической алгеброй.

Доказательство. Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и выберем m по условию (V2). По лемме 1 существует $C_1 < +\infty$ такое, что для любых $\varphi, \psi \in E'$

$$\|j'_n(\varphi \odot \psi)\|'_{n,1} = \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leqslant 1} |\varphi(\omega(\psi)(f))| \leqslant$$

$$\|j'_m(\varphi)\|'_{m,1} \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leqslant 1} \|\omega(\psi)(f)\|_{m,1} \leqslant C_1 \|j'_m(\varphi)\|'_{m,1} \|j'_m(\psi)\|'_{m,1}.$$

Отсюда следует, что отображение $\odot : (E', \lambda) \times (E', \lambda) \to (E', \lambda)$ непрерывно.

Пусть теперь $v_{n,k} = v_{1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $(E', \lambda) = \mathrm{ind}_{k \to} \widetilde{E}_{1,k}$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и выберем s по (V2). По лемме 1 существует $C_2 < +\infty$ такое, что для любых $\varphi, \psi \in \widetilde{E}_{1,s}$

$$\|\varphi \odot \psi\|'_{1,s} = \sup_{f \in E, \|f\|_{1,s} \leqslant 1} |\varphi(\omega(\psi)(f))| \leqslant$$

$$\|\varphi\|'_{1,k} \sup_{f \in E, \|f\|_{1,s} \leqslant 1} \|\omega(\psi)(f)\|_{1,k} \leqslant C_2 \|\varphi\|'_{1,k} \|\psi\|'_{1,k}. \tag{2.1}$$

Заметим, что $E' \times E' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\widetilde{E}_{1,k} \times \widetilde{E}_{1,k}\right)$. Кроме того, из теоремы об открытом отображении [12, теорема 24.30] следует, что произведение $(E', \lambda) \times (E', \lambda)$ является индуктивным пределом последовательности произведений $\widetilde{E}_{1,k} \times \widetilde{E}_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $(E', \lambda) \times (E', \lambda)$. (Пространство $\mathrm{ind}_{k \to} \left(\widetilde{E}_{1,k} \times \widetilde{E}_{1,k}\right)$ имеет сеть, а $(E', \lambda) \times (E', \lambda)$ ультраборнологично.) Это и неравенство (2.1) влекут, что отображение $\odot : (E', \lambda) \times (E', \lambda) \to (E', \lambda)$ непрерывно.

2.2. Условия, при которых ω — топологический изоморфизм

Приведем вначале результат из [9] для общего случая, когда рассматриваемые пространства снабжены слабыми и с ними связанными топологиями. Обозначим символом $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$ пространство $\mathcal{K}(\partial)$ со слабо-операторной топологией, т. е. топологией поточечной сходимости, когда в E введена слабая топология $\sigma(E,E')$ (см. [11, гл. III, § 3, пример 4 (а), с. 104]). Отметим, что вследствие бочечности E пространство всех линейных слабо непрерывных операторов в E алгебраически совпадает с $\mathcal{L}(E)$ [10, гл. 8, § 8.6, с. 703; теорема 8.6.1].

Теорема 3. [9, теорема 3] Отображение ω является топологическим изоморфизмом локально выпуклых пространств $(E',\sigma(E',E))$ и $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$.

В несмешанных ситуациях этот результат имеет место для более естественных топологий.

Теорема 4. Предположим, что выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n,k\in\mathbb{N}$, не зависят от k или n. Тогда алгебраический изоморфизм $\omega:(E',\odot)\to\mathcal{K}(\partial)$ является также и топологическим изоморфизмом пространств E' и $\mathcal{K}(\partial)$ при наделении их топологиями λ и μ соответственно.

Доказательство. Пусть $v_{n,k}=v_{n,1}$, $n,k\in\mathbb{N}$. Поскольку для любых $n\in\mathbb{N}$, $\varphi\in E'$ (число $m=m(n)$, выбранное для n по лемме 1, участвует в определении топологии μ)

$$\|j_n'(\omega^{-1}(\omega(\varphi)))\|_{n,1}'=\|j_n'(\delta_0\omega(\varphi))\|_{n,1}'=\sup_{f\in E_n,\|f\|_{n,1}\leqslant 1}|\omega(\varphi)(f)(0)|\leqslant$$

$$e^{v_{m,1}(0)}\sup_{f\in E_n,\|f\|_{n,1}\leqslant 1}\sup_{z\in\mathbb{C}^N}\frac{|\omega(\varphi)(f)(z)|}{\exp(v_{m,1}(z))}=e^{v_{m,1}(0)}q_n(\omega(\varphi)),$$

то отображение ω^{-1} непрерывно из $(\mathcal{K}(\partial),\mu)$ в (E',λ). По теореме об открытом отображении ω — топологический изоморфизм (E',λ) на $(\mathcal{K}(\partial),\mu)$.

Пусть теперь $v_{n,k}=v_{1,k}$, $n,k\in\mathbb{N}$. Как и выше, для любых $k\in\mathbb{N}$, $\varphi\in E'$ справедливо следующее неравенство, в котором $s=s(k)$, выбранное для k по лемме 1, участвует в определении топологии μ:

$$\|\omega^{-1}(\omega(\varphi))\|_{1,s}'\leqslant e^{v_{1,k}(0)}t_k(\omega(\varphi)).$$

Это влечет непрерывность отображения ω^{-1} из $\mathcal{K}_k(\partial)$ в $\widetilde{E}_{1,s}$. Значит, $\omega^{-1}:(\mathcal{K}(\partial),\mu)\to(E',\lambda)$ непрерывно. Вследствие леммы 1 для любых $k\in\mathbb{N}$, $\varphi\in\widetilde{E}_{1,k}$ выполняется неравенство $t_k(\omega(\varphi))\leqslant D\|\varphi\|_{1,k}'$. Поэтому отображение $\omega:(E',\lambda)\to(\mathcal{K}(\partial),\mu)$ также непрерывно.

Пусть $\partial^\alpha:=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_N^{\alpha_N}}$ для $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$; $\mathbb{C}(\partial):=\operatorname{span}\{\partial^\alpha\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^N\}$, т. е. $\mathbb{C}(\partial)$ — множество всех многочленов от операторов ∂_j, $1\leqslant j\leqslant N$.

Следствие 1. Предположим, что выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n,k\in\mathbb{N}$, не зависят от k или n. Множество $\mathbb{C}(\partial)$ плотно в $(\mathcal{K}(\partial),\mu)$.

Следствие 1 вытекает из плотности системы функционалов $\{\varphi_\alpha\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^N\}$ в (E',λ) и того, что $\omega(\varphi_\alpha)=$ $=\partial^\alpha$ для любого $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$.

Укажем, при каких условиях $\mathbb{C}(\partial)$ обладает более сильным аппроксимационным свойством, а именно, когда всякий оператор из $\mathcal{K}(\partial)$ является дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Ряд достаточных условий этого для пространств целых функций, реализумых в виде пространств последовательностей, получен в [15].

Следствие 2. Предположим, что выполняются условия условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n,k\in\mathbb{N}$, не зависят от k или n. Следующие утверждения равносильны:

(i) $\{\varphi_\alpha\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^N\}$ — базис в (E',λ).

(ii) $\{\partial^\alpha\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^N\}$ — базис в $(\mathcal{K}(\partial),\mu)$.

3. Ассоциированный оператор свертки

Зафиксируем $\varphi\in E'$ и положим $T_\varphi(\psi):=\varphi\odot\psi$, $\psi\in E'$. Оператор T_φ назовем оператором свертки. Он отображает E' в E'. Положим $A_\varphi:=\omega(\varphi)$, т.е. $A_\varphi(f)(z)=\varphi(\tau_z(f))$, $f\in E$, $z\in\mathbb{C}^N$. Поскольку для любых $\psi\in E'$, $f\in E$

$$T_\varphi(\psi)(f)=(\psi\odot\varphi)(f)=\psi(A_\varphi(f)),\tag{3.2}$$

то T_φ непрерывен в $(E',\sigma(E',E))$. Из (3.2) следует также, что $T_\varphi:E'\to E'$ – оператор, сопряженный к $A_\varphi:E\to E$.

Далее докажем утверждение об отсутствии делителей нуля в $(E',\odot)$, справедливое при выполнении некоторых топологических условий. Ниже $z^\alpha:=z_1^{\alpha_1}\cdots z_N^{\alpha_N}$, $\alpha!:=\alpha_1!\cdots\alpha_N!$, $z\in\mathbb{C}^N$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$.

Теорема 5. Предположим, что все многочлены содержатся в E и плотны в E. Пусть, кроме того, существует локально выпуклая топология $\widetilde{\lambda}$ в E', согласующаяся с двойственностью между E' и E, такая, что $(E', \widetilde{\lambda})$ является топологической алгеброй с умножением $\odot$. Тогда E' с умножением $\odot$ не имеет делителей нуля.

Доказательство. Пусть $\varphi \odot \psi = 0$, $\varphi, \psi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Поскольку множество $\Omega := \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в $(E', \sigma(E', E))$ и топология $\widetilde{\lambda}$ согласуется с двойственностью между E' и E, то Ω полно и в $(E', \widetilde{\lambda})$ [11, гл. IV, § 3, 3.1]. Значит, существуют сети

$$R_\xi = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_{\gamma,\xi} \varphi_\gamma,\ \xi \in \Lambda, \ \text{ и } \ S_\eta = \sum_{\zeta \in \mathbb{N}_0^N} b_{\zeta,\eta} \varphi_\zeta,\ \eta \in \triangle,$$

сходящиеся в $(E', \widetilde{\lambda})$ к φ и ψ соответственно. При этом для любых $\xi \in \Lambda$ и $\eta \in \Delta$ не более конечного числа коэффициентов $a_{\gamma,\xi} \in \mathbb{C}$ и $\beta_{\zeta,\eta} \in \mathbb{C}$ отлично от нуля. Тогда, учитывая, что $\varphi_\gamma \odot \varphi_\zeta = \varphi_{\gamma+\zeta}$, и непрерывность умножения $\odot : (E', \widetilde{\lambda}) \times (E', \widetilde{\lambda}) \to (E', \widetilde{\lambda})$, получим:

$$0 = \varphi \odot \psi = \left(\lim_{\xi \in \Lambda} R_\xi\right) \odot \left(\lim_{\eta \in \Delta} S_\eta\right) = \lim_{(\xi,\eta) \in \Lambda \times \Delta} \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^N} \left(\sum_{\gamma+\zeta=\nu} a_{\gamma,\xi} b_{\zeta,\eta}\right) \varphi_\nu \tag{3.3}$$

(последний предел существует и равен 0 в $(E', \widetilde{\lambda})$). Поскольку $(\varphi_\alpha)_z(z^\beta/\beta!) = \delta_{\alpha,\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, то в $\mathbb{C}$ для любых $\gamma, \zeta \in \mathbb{N}_0^N$ существуют $\lim\limits_{\xi \in \Lambda} a_{\gamma,\xi}$, равный $\varphi_z(z^\gamma/\gamma!) =: a_\gamma$, и $\lim\limits_{\eta \in \Delta} b_{\zeta,\eta}$, равный $\psi_z(z^\zeta/\zeta) = =: b_\zeta$. Кроме того, с учетом (3.3), для любого $\nu \in \mathbb{N}_0^N$ имеет место равенство

$$0 = \sum_{\gamma+\zeta=\nu} a_\gamma b_\zeta.$$

Так как множество всех многочленов плотно в E, то существует $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ такое, что $a_\gamma \neq 0$. Поскольку кольцо формальных степенных рядов от N переменных (над полем $\mathbb{C}$) целостное (см., например, [16, гл. 2, § 4, 4.1], [17, доказательство теоремы 9.12]), то $b_\zeta = 0$ для любого $\zeta \in \mathbb{N}_0^N$. Поэтому $\psi = 0$.

Следствие 3. Пусть выполняются предположения теоремы 5. Тогда для любого $\varphi \in E' \backslash \{0\}$ множество $A_\varphi(E)$ плотно в E.

Доказательство. По предыдущей теореме оператор свертки $T_\varphi : E' \to E'$ инъективен. Отсюда и того, что T_φ — сопряженный к отображению $A_\varphi : E \to E$, вытекает плотность $A_\varphi(E)$ в E [10, гл. 8, 8.6, с. 706].

Следствие 4. Предположим, что функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n и множество всех многочленов содержится и плотно в E. Тогда алгебра E' с умножением $\odot$ не имеет делителей нуля и для любого $\varphi \in E' \backslash \{0\}$ множество $A_\varphi(E)$ плотно в E.

Замечание 2. (i) Условие плотности множества всех многочленов в E существенно для справедливости следствия 4. Пусть E задается последовательностью $v_{n,k}(z) = v_{n,1}(z) := n(|\operatorname{Im} z| + \log(1 + |z|))$, $n, k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^N$ (функции $v_{n,k}$ от k не зависят и удовлетворяют условиям (V1) и (V2)). По теореме Пэли-Винера-Шварца [18, теорема 7.3.1] преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F} : \varphi \mapsto \varphi_x(e^{-i\langle x,t\rangle})$, $t \in \mathbb{C}^N$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)'$, является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к пространству Фреше $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций на E (здесь $\langle x, t\rangle := \sum\limits_{j=1}^N x_j t_j$). При этом множество $\mathbb{C}[z]$ всех многочленов переменных $z_1, ..., z_N$ содержится в E, не совпадает с E и замкнуто в E. (Его замкнутость следует из конечномерности всех пересечений $\mathbb{C}[z] \cap E_n$, $n \in \mathbb{N}$.) Значит, оно не плотно в E. Преобразование $\widetilde{\mathcal{F}} : \varphi \mapsto \varphi_z(e^{-i\langle z,t\rangle})$, $t \in \mathbb{R}^N$, $\varphi \in E'$, является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к E на $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. При этом $\widetilde{\mathcal{F}}$ — отображение, сопряженное к $\mathcal{F} : C^\infty(\mathbb{R}^N)' \to E$ относительно дуальных пар $(C^\infty(\mathbb{R}^N)', C^\infty(\mathbb{R}^N))$ и (E, E').

Положим $\widehat{\varphi} := \widetilde{\mathcal{F}}(\varphi)$, $\varphi \in E'$. Для $T_\varphi : E' \to E'$ отображение $\widetilde{\mathcal{F}} T_\varphi \widetilde{\mathcal{F}}^{-1}$ является оператором умножения на функцию $\widehat{\varphi}$. Значит, для любого ненулевого функционала $\varphi \in E'$ такого, что на некотором открытом подмножестве $\mathbb{R}^N$ функция $\widehat{\varphi}$ нулевая, оператор свертки $T_\varphi : E' \to E'$ неинъективен.

(ii) В конкретных ситуациях в [15; 17, гл. 9, § 3; 19] доказаны условия, при которых операторы из $\mathcal{K}(\partial)$ сюръективны или являются топологическими изоморфизмами счетных индуктивных или проективных пределов весовых банаховых пространств целых функций. Ситуации, рассмотренные в упомянутых работах, специфичны, и для них выполняются определенные условия, связанные с природой рассматриваемых пространств.

Литература

[1] Хелемский А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986. 288 с.

[2] Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989. 466 с.

[3] Ткаченко В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Матем. заметки. 1979. Т. 25. Вып. 2. С. 271–282. URL: http://mi.mathnet.ru/mz8303.

[4] Ткаченко В.А. Спектральные разложения в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 654–713. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/IM1980v014n03ABEH001146.

[5] Ткаченко В.А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). № 3(7). С. 421–466. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001833.

[6] Гуревич Д.И. Операторы обобщенного сдвига с правым инфинитезимальным оператором Штурма-–Лиувилля // Матем. заметки. 1979. Т. 25. Вып. 3. С. 393–408. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01159513.

[7] Литвинов Г.Л. О преобразовании Лапласа на группах Ли // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. В. 1. С. 83–84. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01075519.

[8] Рашевский П.К. Ассоциативная сверхоболочка алгебры Ли, ее регулярное представление и идеалы // Тр. ММО. 1966. Т. 15. С. 3–54.

[9] Иванова О.А., Мелихов С.Н., Мелихов Ю.Н. О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфимский матем. журн. 2017. Т. 9. № 3. С. 38—49.

[10] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1072 с.

[11] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.

[12] Meise R., Vogt D. Introduction to Functional Analysis. Oxford: Clarendon, 1997. 448 p.

[13] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. № 2. С. 114–137. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1447.

[14] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. 2017. V. 11. P. 1407–1424. DOI: https://doi.org/10.1007/s11785-016-0617-5.

[15] Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В. Общий вид изоморфизмов, перестановочных с оператором дифференцирования, в пространствах целых функций медленного роста // Матем. сб. 1973. Т. 91(133). № 4. С. 475–487. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1973v020n04ABEH001886.

[16] Городенцев А.Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Ч. 1. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 486 с.

[17] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989. 352 с.

[18] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 464 с.

[19] Martineau A. Equations differentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. France. 1967. V. 95. P. 109–154.

References

[1] Helemskii A.Ya. *Gomologiia v banakhovykh i topologicheskikh algebrakh* [Homology of Banach and topological algebras]. M.: Izd-vo MGU, 1986, 288 p. [in Russian].

[2] Helemskii A.Ya. *Banakhovy i polinormirovannye algebry: obshchaia teoriia, predstavleniia, gomologii* [Banach and multi-normed algebras: general theory, presentations, gomologies]. M.: Nauka, 1989, 466 p. [in Russian].

[3] Tkachenko V.A. *Ob operatorakh, kommutiruiushchikh s obobshchennym integrirovaniem v prostranstvakh analiticheskikh funktsionalov* [On operators that commute with generalized integration in spaces of analytic functionals]. *Matem. zametki* [Mathematical notes], 1979, Vol. 25, no 2, pp. 141–146. Available at: http://mi.mathnet.ru/mz8303 [in Russian].

[4] Tkachenko V.A. *Spektral'nye razlozheniia v prostranstvakh analiticheskikh funktsionalov* [Spectral decompositions in spaces of analytic functionals]. *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1980, Vol. 14, no. 3, pp. 597–651. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/IM1980v014n03ABEH001146 [in Russian].

[5] Tkachenko V.A. *Spektral'naia teoriia v prostranstvakh analiticheskikh funktsionalov dlia operatorov, porozhdaemykh umnozheniem na nezavisimuiu peremennuiu* [Spectral theory in spaces of analytic functionals for operator generated by multiplication by the independent variable]. *Matem. sb.* [Mathematics of the USSR-Sbornik], 1981, Vol. 40, no 3, pp. 387–427. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001833 [in Russian].

[6] Gurevich D.I. *Operatory obobshchennogo sdviga s pravym infinitezimal'nym operatorom Shturma-–Liuvillia* [Generalized displacement operators with a right infinitesimal Sturm-Liouville operator]. *Matem. zametki* Mathematical Notes, 1979, Vol. 25, no. 3, pp. 208–215. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01159513 [in Russian].

[7] Litvinov G.L. *O preobrazovanii Laplasa na gruppakh Li* [On Laplace transform on Lie groups]. *Funkts. analiz i ego pril.* [Functional Analysis and Its Applications], 1972, Vol. 6, no 1, pp. 76–77. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01075519 [in Russian].

[8] Rashevskii P.K. *Assotsiativnaia sverkhobolochka algebry Li, ee reguliarnoe predstavlenie i idealy* [Associative ultra-envelope of Lie algebra, its regular presentation and ideals]. *Tr. MMO* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 1966, Vol. 15, pp. 3–54. [in Russian].

[9] Ivanova O.A, Melikhov S.N., Melikhov Yu.N. *O kommutante operatorov differentsirovaniia i sdviga v vesovykh prostranstvakh tselykh funktsii* [On the commutant of differentiation and translation operators in weighted spaces of entire functions]. *Ufimskii matem. zhurn.* [Ufa Mathematical Journal], 2017, Vol. 9, no 3, pp. 37–47. DOI: https://doi.org/10.13108/2017-9-3-37.

[10] Edwards R.E. *Funktsional'nyi analiz. Teoriia i prilozheniia* [Functional Analysis. Theory and Applications]. M.: Mir, 1969, 1072 p. [in Russian].

[11] Schaefer H. *Topologicheskie vektornye prostranstva* [Topological vector spaces]. M.: Mir, 1971, 360 p. [in Russian].

[12] Meise R., Vogt D. Introduction to Functional Analysis. Oxford: Clarendon, 1997, 448 p. [in English].

[13] Ivanova O.A., Melikhov S.N. *Ob operatorakh, perestanovochnykh s operatorom tipa Pomm'e v vesovykh prostranstvakh tselykh funktsii* [On Operators Commuting with a Pommiez type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2017, Vol. 28, no 2, pp. 209–224. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1447 [in Russian].

[14] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 2017, Vol. 11, pp. 1407–1424. DOI: https://doi.org/10.1007/s11785-016-0617-5 [in English].

[15] Korobeinik Yu.F., Morzhakov V.V. *Obshchii vid izomorfizmov, perestanovochnykh s operatorom differentsirovaniia, v prostranstvakh tselykh funktsii medlennogo rosta* [General form of isomorphisms commuting with differentiation in spaces of entire functions of slow growth]. *Matem. sb.* [Mathematics of the USSR-Sbornik], 1973, Vol. 20, no 4, pp. 493–505. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1973v020n04ABEH001886 [in Russian].

[16] Gorodentsev A.L. *Algebra. Uchebnik dlia studentov-matematikov. Ch. 1* [Algebra. Textbook for students of mathematics. Part 1]. M.: Izd-vo MTsNMO, 2013, 486 p. [in Russian].

[17] Lelong P., Gruman L. *Tselye funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Entire Functions of Several Complex Variables]. M.: Mir, 1989, 352 p. [in Russian].

[18] Hörmander L. *Analiz lineinykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriia raspredelenii i analiz Fur'e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. I: Distribution Theory and Fourier Analysis]. M.: Mir, 1986, 464 p. [in Russian].

[19] Martineau A. Equations differentielles d'ordre infini. *Bull. Soc. Math. France*, 1967, Vol. 95, pp. 109–154 [in French].

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov[2]

ON TOPOLOGICAL ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONALS WITH A MULTIPLICATION DEFINED BY TRANSLATIONS

We define a multiplication — convolution in the dual of a countable inductive limit E of weighted Fréchet spaces of entire functions of several variables. This algebra is isomorphic to the commutant of the system of partial derivatives in the algebra of all continuous linear operators in E. In the constructed algebra of analytic functionals in two pure cases a topology is defined. With this topology the mentioned algebra is topological and it is now topologically isomorphic to the considered commutant with its natural operator topology. It is proved that in this pure situations the present algebra has no zero divisors provided that polynomials are dense in E. We show that this condition is essential for the validity of the last statement.

Key words: weighted space of entire functions, algebra of analytic functionals, topological algebra, communant, convolution operator.

Citation. Ivanova O.A., Melikhov S.N. *O topologicheskikh algebrakh analiticheskikh funktsionalov s umnozheniem, opredeliaemym sdvigami* [On topological algebras of analytic functionals with a multiplication defined by translations]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 14–22. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-14-22 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $4/IX/2018$.
The article received $4/IX/2018$.

[2] *Ivanova Olga Alexandrovna* (neo_ivolga@mail.ru), Institute for Mathematics, Mechanics and Computer Science in the name of I.I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42, Bolshaya Sadovaya Street, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation.
Melikhov Sergej Nikolaevich (melih@math.rsu.ru), Institute for Mathematics, Mechanics and Computer Science in the name of I.I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42, Bolshaya Sadovaya Street, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation; Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 53, Vatutina Street, Vladikavkaz, 362027, Republic of North Ossetia-Alania, Russian Federation.