МАТЕМАТИКА

УДК 517.9; 544.034 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13

С.О. Гладков, С.Б. Богданова[1]

К ВОПРОСУ О ДРОБНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

Благодаря операции дробного дифференцирования, вводимой с помощью интеграла Фурье, приведены результаты вычисления дробных производных для некоторых типов элементарных функций. С помощью метода численного интегрирования вычислены значения дробных производных для произвольной размерности ε, где ε — любое число больше нуля. Доказано, что при целых значениях ε получаются обычные производные первого, второго и т. д. порядков. В качестве примера рассмотрено уравнение теплопроводности Фурье, пространственное дифференцирование в котором осуществляется с помощью производных дробного порядка. Приведено его решение через интеграл Фурье и показано, что в частном случае целого ε решение переходит в известные результаты, получаемые в n-мерном случае, где $n = 1, 2 \ldots$ и т. д.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, интеграл Фурье, интеграл Римана, теплопроводность, фрактал, дробная размерность, уравнение Фурье, мера.

Цитирование. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13.

Введение

Вопросы, связанные с практическим приложением методов дробного дифференцирования в различного рода прикладных задачах, например, в теории диффузии или в теории теплопроводности (см., к примеру, [1; 2]), вызывают неподдельное любопытство широкого круга исследователей, область интересов которых связана с изучением физических свойств объектов нецелой размерности, к числу которых можно отнести любые фрактальные многообразия [3–6].

Надо сказать, что с формальной точки зрения дробное дифференцирование применялось, например, в работах [7; 8], при исследовании процесса теплопереноса и магнитной восприимчивости в квазиодномерных структурах. А, например, в работах [9; 10] авторами ставился эксперимент при решении ряда задач теории пластичности. Для описания результата ими была использована формула дробного дифференцирования в виде интеграла Фурье. Заметим, что сами авторы отмечали в своих работах, что применение дробного дифференцирования в форме интеграла Римана (который, кстати, используют очень многие авторы (см. к примеру работы [11–13], а также монографию [14])) чрезвычайно неудобно и аналитически нерешаемо (некоторые примеры, подтверждающие сказанное, приведены чуть ниже).

1. Основные результаты

Целью настоящей статьи является проверка корректности формулы дробного дифференцирования, которая была применена в упомянутых выше работах [1; 2], и которая была введена в виде

$$\partial^{1+\varepsilon} f(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ik)^{1+\varepsilon} e^{ikx} f_k dk \qquad (1)$$

Гладков Сергей Октябринович (sglad51@mail.ru), кафедра прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (МАИ), 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Богданова Софья Борисовна (sonjaf@list.ru), кафедра прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (МАИ), 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

где f_k – Фурье–образ функции $f(x)$, для класса которых существует интеграл (1), а ε любое неотрицательное число. В качестве примеров, иллюстрирующих корректность формулы (1), рассмотрим следующие.

1. $f(x) = \sin ax$.

   В результате вычисления с помощью программы Maple–17 получаем

$$\partial^{1+\varepsilon}\sin(ax) = \frac{a}{2}\left((ai)^{\varepsilon}\cdot e^{iax} + (-ai)^{\varepsilon}\cdot e^{-iax}\right) \tag{2}$$

   Как видим, при $\varepsilon = 0$ мы приходим к обычной производной от $\sin ax$ то есть $f' = a\cos ax$. Если положить в (2) $\varepsilon = 1$, то приходим к выражению для второй производной от $\sin ax$, то есть $f' = -a^2\sin ax$. Легко проверить, что при любых целых $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, ...$ будут получаться обычные производные соответствующего порядка.

2. $f(x) = \cos ax$.

   Тогда

$$\partial^{1+\varepsilon}\cos(ax) = \frac{ia}{2}\left((ai)^{\varepsilon}\cdot e^{iax} - (-ai)^{\varepsilon}\cdot e^{-iax}\right) \tag{3}$$

   Отсюда также, как и в примере 1, будет следовать, что при всех целых $\varepsilon = 1, 2, ...$ мы получим правильные выражения для соответствующих производных от $\cos ax$.

3. $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\begin{aligned}
\partial^{1+\varepsilon}\left(\exp(-ax^2)\right) = \frac{1}{4\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right)\cdot 2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\cdot a^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\cdot \\
\cdot(i\cdot e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, \sqrt{2a}\cdot x) + \\
+i\cdot e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, -\sqrt{2a}\cdot x) - \\
-i\cdot e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, \sqrt{2a}\cdot x) - \\
-i\cdot e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, -\sqrt{2a}\cdot x) - \\
-e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, \sqrt{2a}\cdot x) + \\
+e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, -\sqrt{2a}\cdot x) - \\
-e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, \sqrt{2a}\cdot x) + \\
e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot CylinderD(1+\varepsilon, -\sqrt{2a}\cdot x))
\end{aligned} \tag{4}$$

   Имеем где $CylinderD(a, x)$ — функция параболического цилиндра, для которой имеет место равенство $CylinderD(-a-\frac{1}{2}, x) = CylinderU(a, x) = y(x)$, где $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y'' - (\frac{1}{4}x^2 + a)\cdot y = 0$. Благодаря свойствам функций параболического цилиндра можно легко показать, что при $\varepsilon = 0$ из общего выражения (2.4) получается правильная производная $f' = -2xe^{-x^2}$. Для любых других целых значений также получаются, в чем можно весьма просто убедиться, правильные выражения для высших производных от функции распределения Гаусса.

4. $f(x) = x^m$,

   где m — любое целое неотрицательное число. Для $m = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\partial^{1+\varepsilon}(x^1) &= i\cdot\lim_{k\to 0}\left(-\tfrac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)e^{ikx}}{k} - i(ik)^{1+\varepsilon}xe^{ikx}\right) = \\
&= \lim_{k\to 0}(ik)^{\varepsilon}e^{ikx}\left(\varepsilon + 1 + ikx\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

   Если $\varepsilon = 0$ получаем $f' = 1$, а для всех остальных целых значений ε, как и должно быть, получаются нули. В случае $m = 2$ имеем

$$\partial^{1+\varepsilon}(x^2) =$$
$$= -\lim_{k\to 0}\left(\tfrac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 e^{ikx}}{k^2} - \tfrac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)e^{ikx}}{k^2} + \tfrac{2i(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 x e^{ikx}}{k} - (ik)^{1+\varepsilon}x^2 e^{ikx}\right) =$$
$$= \lim_{k\to 0}(ik)^{\varepsilon}e^{ikx}\left(-\tfrac{i\varepsilon(1+\varepsilon)}{k} + 2(1+\varepsilon)x + ikx^2\right) \tag{6}$$

Как видно, при $\varepsilon = 0$ получаем отсюда $f' = 2x$, а при $\varepsilon = 1$ легко найти, что $f' = 2$. Для $m = 3$ находим $f'' = 2$. Для $m = 3$ находим

$$\partial^{1+\varepsilon}(x^3) =$$
$$= -i\lim_{k\to 0}\left(-\tfrac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^3 e^{ikx}}{k^3} + \tfrac{3(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 e^{ikx}}{k^3} - \tfrac{3i(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 x e^{ikx}}{k^2} -\right.$$
$$\left.-\tfrac{2(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)e^{ikx}}{k^3} + \tfrac{3i(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)xe^{ikx}}{k^2} + \tfrac{3(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)x^2 e^{ikx}}{k} + i(ik)^{1+\varepsilon}x^3 e^{ikx}\right) =$$
$$= \lim_{k\to 0}(ik)^{\varepsilon}e^{ikx}\left(\tfrac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}{k^2} - \tfrac{3i\varepsilon(1+\varepsilon)x}{k} + 3(1+\varepsilon)x^2 + ikx^3\right) \tag{7}$$

и если $\varepsilon = 0$, то $f' = 3x^2$. При $\varepsilon = 1$ $f'' = 6x$, а при $\varepsilon = 2$ $f'' = 6$. Как видно из (2.5)–(2.7), общая рекурренатная формула для степенной функции x^n будет такой

$$\partial^{1+\varepsilon}(x^n) =$$
$$= \lim_{k\to 0}(ik)^{\varepsilon}\exp(ikx)\left(-\tfrac{i^{n-1}(n-1-\varepsilon)...(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)\varepsilon}{k^{n-1}} + \tfrac{ni^{n-2}\varepsilon(1+\varepsilon)x^{n-2}}{k^{n-2}} +\right.$$
$$\left.+... + n(1+\varepsilon)x^{n-1} + ikx^n\right). \tag{8}$$

Итак, на примерах 1–4 мы убедились, что формула (1) является вполне корректной, и ей можно пользоваться с целью вычисления любых производных дробного порядка. Стоит также обратить внимание, что вычисление дробных производных с помощью интеграла Римана — Лиувилля, который используется в огромном количестве работ, и в частности, в уже отмеченных выше статьях [11–13], а также в монографии [14], приводит к несколько иным формулам, использование которых, мягко говоря, даже в простейших случаях довольно проблематично. Действительно, рассмотрим производную дробного порядка по Риману — Лиувиллю, которую представим в виде интеграла на отрезке, как, например, в [14], а именно

$$\partial^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n-1}} \tag{9}$$

где α любое число, а n целая часть α плюс один. В качестве примера пусть будет $f(x) = \sin ax$, а $\alpha = \frac{1}{11}$. Программа Maple–17 отказывается вычислить этот интеграл, и возвращает его в первоначальном виде.

Понятно, что использование подходов (1) и (9) диктуется только вкусами авторов, однако, применение этих выражений в конкретных вычислениях позволяет сделать вывод об очевидном, на наш взгляд, преимуществе формулы (1). В самом деле, в ней не заложено ограничение на величину ε, как в формуле (8) на α. Кроме того, она описывает более широкий спектр функций, так как в случае применения формулы (1) речь идет не о действительном пространстве, а о комплексном.

В случае целочисленных значений α в соответствии с (9) мы имеем дело с обычной производной. Например, пусть $\alpha = 2$, тогда из (9) следует

$$\partial^1 f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_a^x f(t)dt = f'(x) \tag{10}$$

Остановимся еще на одном конкретном примере приложения формулы (1) к чисто физической задаче. Вычислим распределение температуры по топологически одномерному фрактальному объекту размерности $1 + \varepsilon$. Как известно [15], в одномерном случае уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{11}$$

где $T = T(x,t)$ — температура, а χ — коэффициент температуропроводности. В том случае, когда речь идет о фрактальном объекте, вместо (11) мы должны использовать уравнение (см., например, работы [16]) вида

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi_{1+\varepsilon}\frac{\partial^{1+\varepsilon}T}{\partial x^{1+\varepsilon}}=\frac{\chi_{1+\varepsilon}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^{1+\varepsilon}e^{ikx}T_k(t)dk, \tag{12}$$

где $T_k(t)$ — Фурье–образ функции $T(x,t)$. В соответствии с (12) уравнение относительно Фурье-образа T_k имеет вид

$$\frac{\partial T_k}{\partial t}=\chi_{1+\varepsilon}(ik)^{1+\varepsilon}T_k. \tag{13}$$

Откуда

$$T_k(t)=T_k(0)e^{\chi_{1+\varepsilon}(ik)^{1+\varepsilon}t} \tag{14}$$

где $T_k(0)=T_k(t)\big|_{t=0}$ значение Фурье — образа температуры в начальный момент времени. Оно определяется как

$$T_k(0)=\int_{-\infty}^{\infty}T(x,0)e^{-ikx}dx, \tag{15}$$

где $T(x,0)$ начальное распределение температуры. Это означает, что решение следует представить в виде

$$T(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_k(0)e^{\chi_{1+\varepsilon}(ik)^{1+\varepsilon}t+ikx}dk=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(x',0)e^{\chi_{1+\varepsilon}(ik)^{1+\varepsilon}t+ik(x-x')}dkdx'$$

В более компактной форме распределение температуры по фрактальному квазиодномерному объекту удобно записать как

$$T(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}J(x-x',t)T(x',0)dx', \tag{16}$$

где функция

$$J(x-x',t)=\frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-Au^{1+\varepsilon}+iub}du \tag{17}$$

здесь новый безразмерный аргумент $u=\frac{x'}{L}$, L – параметр длины,$b=x-x'$, $A=a_\varepsilon\left(\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)-i\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\right)$ и $a_\varepsilon=\frac{\chi_{1+\varepsilon}t}{L^{1+\varepsilon}}$. Сходимость интеграла (17) скрыта в условии, накладываемом на ε, а именно должно быть $0<\varepsilon\leqslant 1$. Заметим, что это неравенство автоматически следует и из определения рассматриваемой нами фрактальной структуры, которая по условию является квазиодномерной. В случае квазидвухмерного или квазитрехмерного объекта вместо (17) мы автоматически получили бы соответственно двойной и тройной интегралы. Кроме того, необходимо заметить, что фрактальность структуры и порядок дробного дифференцирования должны быть одинаковыми. К сожалению, вычисление интеграла (17) с помощью программы Maple–17 оказывается невозможным. Однако, благодаря методу перевала (см., например, [16]) можно получить аналитический ответ. В частном случае при $\varepsilon=1$ получаем традиционное решение, приведенное в [15]. Из сказанного выше можно сделать следующий вывод. При исследовании огромного многообразия каких-либо физических процессов, приводящих с необходимостью к рациональным или иррациональным размерностям, удобно использовать формальный математический аппарат дробного дифференцирования либо в форме (1), либо в форме (9), что диктуется, на наш взгляд, только внутренним убеждением авторов.

Литература

[1] Гладков С.О. К теории гидродинамических явлений в квазиодномерных системах // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 11. С. 130–132. URL: https://journals.ioffe.ru/articles/38956.

[2] Гладков С.О. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 7. С. 8–12. URL: https://journals.ioffe.ru/articles/33167.

[3] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск.: РХД, 2002. 665 с.

[4] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 524 с.

[5] Синергетика и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова [и др.]. М.: Наука, 1994. 383 с.

[6] Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск.: РХД, 2001. 528 с.

[7] Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории продольной магнитной восприимчивости квазитрехмерных ферромагнитных диэлектриков // ФТТ. 2012. Т. 54. № 1. С. 70–73. URL: https://journals.ioffe.ru/articles/482.

[8] Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о магнитной восприимчивости фрактальных ферромагнитных проволок // Известия вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 4. С. 44–47. URL: http://i.uran.ru/webcab/system/files/journalspdf/izvestiya-vuzov.ser.fizika/izvestiya-vuzov.ser.fizika-2014-t.57-n-4/42014.pdf.

[9] Bagley R.L., Torvik P.J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity // Journal of Rheology. 1983. Vol. 27(201). P. 201–210. DOI: 10.1122/1.549724.

[10] On the fractional calculus model of viscoelastic behavior/ R. L. Bagley, P. J. Torvik // Journal of Rheology. 1986. Vol. 30 (1). P. 133–155. DOI: 10.1122/1.549887.

[11] Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С.660–670. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=7144&option_lang=rus.

[12] Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tmf&paperid=5547&option_lang=rus.

[13] Нахушев А.М. Структурные и качественные свойства оператора, обратного оператору дробного интегро–дифференцирования с фиксированным началом и концом // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1093–1100. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754189.

[14] Самко С.Г., Килбас А.А, Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. 688 с.

[15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[16] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional system // Physica B: Condensed Matter. 2010. Vol. 405. P. 1973–1975.

References

[1] Gladkov S.O. *K teorii gidrodinamicheskikh iavlenii v kvaziodnomernykh sistemakh* [On the theory of hydrodynamic phenomena in quasi-one-dimensional systems]. *ZhTF* [Technical Physics (Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki)], 2001, Vol. 71, no 11, pp. 130–132. Available at: https://journals.ioffe.ru/articles/38956 [in Russian].

[2] Gladkov S.O. *K teorii odnomernoi i kvaziodnomernoi teploprovodnosti* [On the theory of one-dimensional and quasi-one-dimensional thermal conductivity]. *ZhTF* [Technical Physics (Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki)], 1997, Vol. 67, no 7, pp. 8–12. Available at: https://journals.ioffe.ru/articles/33167 [in Russian].

[3] Mandelbrot B. *Fraktal'naia geometriia prirody* [Fractal geometry of nature]. Izhevsk: RKhD, 2002, 665 p. [in Russian].

[4] Feder J. *Fraktaly* [Fractals]. M.: Mir, 1991, 524 p. [in Russian].

[5] Ivanova V.S. [et al.] *Sinergetika i fraktaly v materialovedenii* [Synergetics and fractals in materials science]. M.: Nauka, 1994, 383 p. [in Russian].

[6] Schroeder M. *Fraktaly, khaos, stepennye zakony* [Fractals, Chaos, Power Laws]. Izhevsk: RKhD, 2001, 528 p. [in Russian].

[7] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K teorii prodol'noi magnitnoi vospriimchivosti kvazitrekhmernykh ferromagnitnykh dielektrikov* [On the theory of longitudinal magnetic susceptibility of quasi-three-dimensional ferromagnetic dielectrics]. *FTT* [Solid-State Physics], 2012, Vol. 54, no 1, pp. 70–73. Available at: https://journals.ioffe.ru/articles/482 [in Russian].

[8] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K voprosu o magnitnoi vospriimchivosti fraktal'nykh ferromagnitnykh provolok* [On the Question of the Magnetic Susceptibility of Ferromagnetic Wires]. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2014, Vol. 57, no 4, pp. 44–47. Available at: http://i.uran.ru/webcab/system/files/journalspdf/izvestiya-vuzov.ser.fizika/izvestiya-vuzov.ser.fizika-2014-t.57-n-4/42014.pdf [in Russian].

[9] Bagley R.L., Torvik P.J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 1983, Vol. 27 (201), pp. 201–210. DOI: 10.1122/1.549724 [in English].

[10] Bagley R.L., Torvik P.J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 1986, Vol. 30 (1), pp. 133–155. DOI: 10.1122/1.549887 [in English].

[11] Kochubey A.N. *Diffuziia drobnogo poriadka* [Fractional order diffusion]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1990, Vol. 26, no 4, pp. 660–670. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=7144&option_lang=rus [in Russian].

[12] Nigmatullin R.R. *Drobnyi integral i ego fizicheskaia interpretatsiia* [Fractional integral and its physical interpretation]. *Teoreticheskaia i matematicheskaia fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 1992, Vol. 90, no 3, pp. 354–368. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tmf&paperid=5547&option_lang=rus [in Russian].

[13] Nakhushev A.M. *Strukturnye i kachestvennye svoistva operatora, obratnogo operatoru drobnogo integro–differentsirovaniia s fiksirovannym nachalom i kontsom* [Structural and qualitative properties of the operator, inverse to the operator of fractional integro-differentiation with fixed start and end]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2000, Vol. 36, no 8, pp. 1093–1100. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754189 [in Russian].

[14] Samko S.G., Kilbas A.A, Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. [in Russian].

[15] Landau L.D., Lifshits Ye.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. M.: Nauka, 1986, 736 p. [in Russian].

[16] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional system. *Physica B: Condensed Matter*, 2010, Vol. 405, pp. 1973–1975 [in English].

S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova[2]

ON FRACTIONAL DIFFERENTIATION

Due to the operation of fractional differentiation introduced with the help of Fourier integral, the results of calculating fractional derivatives for certain types of functions are given. Using the numerical method of integration, the values of fractional derivatives for arbitrary dimensionality ε, (where ε**is** any number greater than zero) are calculated. It is proved that for $\{integer\}$ values of ε we obtain ordinary derivatives of the first, second and more high orders. As an example it was considered heat conduction equation of Fourier, where spatial derivation was realized with the use of fractional derivatives. Its solution $\{is\}$ given$\{by\}$ Fourier integral. $\{moreover\}$, it was shown that integral went into the required results in special case of the whole ε obtained in n-dimensional case, where $n = 1, 2\ldots$, etc.

Key words: fractional differentiation, Fourier integral, Riemann integral, heat conduction, fractal, fractional dimension, Fourier equation, measure.

Citation. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K voprosu o drobnom differentsirovanii* [On fractional differentiation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 4/*VIII*/2018.
The article received 4/*VIII*/2018.

[2]*Gladkov Sergey Oktyabrinovich* (sglad51@mail.ru), Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Bogdanova Sofya Borisovna (sonjaf@list.ru), Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.