

М.О. Мамчурев¹

МОДЕЛЬ ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОГО ТРАНСПОРТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА РЕКОМБИНАЦИИ В СЛОЯХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Исследуется теоретическая (полуфеноменологическая) модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой, учитывающая процесс рекомбинации носителей заряда (НЗ) основанная на дифференциальном уравнении в частных производных дробного порядка по временной переменной. В аналитическом виде найдены решения уравнений модели.

Ключевые слова: объемная плотность заряда, рекомбинация носителей заряда, диффузионно-дрейфовый транспорт носителей заряда, дробная производная Римана — Лиувилля, дробная производная Капуто, фрактальная структура.

Цитирование. Мамчурев М.О. Модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда с учетом процесса рекомбинации в слоях с фрактальной структурой // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 67–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-67-71>.

Введение

Для описания различных процессов переноса в средах с фрактальной структурой в настоящее время широко применяется математический аппарат дробного интегродифференцирования [1, 2]. Уравнения с дробной производной по времени описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за время эволюции. В работах [3–5] с помощью таких уравнений описаны процессы диффузии на фрактальных структурах, моделирующих пористые и неупорядоченные структуры, обсуждается их применимость для описания процессов переноса и релаксации.

В работах [8] разработаны модели дисперсионного транспорта НЗ в неупорядоченных средах.

При описании модели неравновесного транспорта НЗ в неупорядоченных полупроводниках [8, 9] было получено уравнение диффузии-дрейфа с зависящими от времени подвижностью и коэффициентом диффузии. Главная особенность этого уравнения – наличие частной производной по времени дробного порядка, совпадающего с дисперсионным параметром $\alpha < 1$.

В работе [9] предложена теоретическая (полуфеноменологическая) модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой, основанная на дифференциальном уравнении в частных производных дробного порядка по временной переменной

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

В аналитическом виде найдено решение этого уравнения и проведен анализ выражения для плотности тока носителей заряда. С помощью численных расчетов показано, что уменьшение порядка дробной производной при наличии внешнего электрического поля приводит к уширению и асимметрии пространственных распределений носителей заряда, что с физической точки зрения соответствует усилению процессов рассеяния.

В работе [10] показано, что для $\rho(x, t)$ выполняется следующий закон сохранения заряда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) dx.$$

¹© Мамчурев М.О., 2018

Мамчурев Мухтар Османович (mamchuevmo@yandex.ru), отдел теоретической и математической физики, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Это свойство является необходимым для применения уравнения (1) при моделировании переноса заряда в фрактальных полупроводниковых структурах.

Уравнение (1) описывает диффузионно-дрейфовый транспорт НЗ без учета процессов генерации и рекомбинации.

В данной работе исследуется модель диффузионно-дрейфового транспорта НЗ с учетом процессов генерации и рекомбинации.

1. Диффузионно-дрейфовое приближение

В данном приближении плотность тока НЗ линейно зависит от градиентов потенциала электрического поля и концентрации заряда. Коэффициент пропорциональности является множителем подвижности НЗ, параметром определяющим объемные свойства полупроводника. В диффузионно-дрейфовом приближении концентрация НЗ мала, рассматривается случай невырожденного полупроводника. Электрическое поле также слабое, т.е. не вносит заметного вклада в равновесное распределение скоростей НЗ. В невырожденном полупроводнике НЗ дрейфуют в слабом электрическом поле и диффундируют независимо от остальных НЗ. Представление плотности тока в виде дрейфовой и диффузионной составляющих справедливо при $L \geq \sqrt{D\tau}$.

Из условия слабости полей следует, что в процессе движения носители заряда не должны разогреваться, т.е. набирать за время между неупругими столкновениями энергию, которая превышала бы их среднюю тепловую энергию.

2. Аналитические решения уравнений модели

Будем использовать оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля [1]:

$$D_{st}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1+\alpha}} dt', & \alpha < 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} f(t), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а также регуляризованную дробную производную (производную Капуто)

$$\partial_{st}^{\alpha} f(t) = \text{sign}^n(t-s) D_{st}^{\alpha-n} \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, α — порядок операторов.

Уравнение диффузионно-дрейфового транспорта НЗ с учетом процессов генерации и рекомбинации имеет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho = 0, \quad (2)$$

где $\rho(x, t)$ — плотность заряда, $a = \mu E \sqrt{\frac{\tau}{D}} = \text{const}$, где E — напряженность внешнего электрического поля, μ и D — подвижность и коэффициент диффузии НЗ, τ — это время жизни НЗ. Пространственная переменная x является безразмерной и отнесена к диффузионной длине $\sqrt{D\tau}$.

Уравнение (2) применимо лишь для случая, когда фрактальный слой можно считать макроскопически сплошной средой — данный слой всегда занимает определенный объем и ограничивается некоторой гладкой поверхностью в евклидовом пространстве при произвольном значении метрической фрактальной размерности (т.н. массовый фрактал). При этом свойство фрактальности учитывается через феноменологический параметр α . Такой подход, по существу, подразумевает эргодичность системы, когда пространственная фрактальность учитывается через динамику НЗ по временной переменной. Если имеется фрактальная среда, то процесс переноса в ней НЗ должен происходить медленнее, чем в аналогичной сплошной среде; в предлагаемой модели этому соответствует условие $\alpha < 1$. Кроме того, система предполагается «адиабатической», т.е. имеет место условие $\alpha = \text{const}$.

Генерация и рекомбинация подвижных носителей (основных и неосновных) происходит в полупроводнике непрерывно, поэтому скорость изменения их концентрации определяется разностью скоростей этих процессов. Изменение концентрации неосновных носителей при внешнем воздействии (при облучении светом или воздействии лазерного излучения) запишем следующим классическим уравнением:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\tau} \quad (3)$$

Если в начальный момент времени плотность заряда равна $\rho_0(x)$, то функция $\rho(x, t)$ определяется как решение задачи Коши с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (4)$$

Решение задачи (1), (4) имеет вид [11]

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{a(x-\xi)}{2}} D_{0t}^{\alpha-1}(x-\xi, t) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) K(x-\xi, t) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} (x, t) &= \frac{1}{2} \int_{|x|}^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) h_0(x, \tau) d\tau, \\ K(x, t) &= \frac{e^{-\frac{a}{2}x}}{2} \int_{|x|}^{\infty} t^{-\alpha} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) h_0(x, \tau) d\tau, \\ h_0(x, \tau) &= \begin{cases} J_0(\sqrt{c}\sqrt{\tau^2-x^2}), & c > 0, \\ I_0(\sqrt{|c|}\sqrt{\tau^2-x^2}), & c < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$\phi(\alpha, \beta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}$, функция Райта, $J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$, $I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ – функции Бесселя.

При $c > 0$ решение уравнения (2) имеет вид

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{a(x-\xi)}{2}} \int_{|x|}^{\infty} t^{-\alpha} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) J_0(\sqrt{c}\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau.$$

Неравновесные НЗ возникают в результате облучения поверхности полупроводника лазерным излучением. Если в полупроводнике нет электрического тока и объемных зарядов, вследствие процессов генерации и рекомбинации НЗ придут в равновесное состояние. Тогда изменение во времени неравновесных концентрации электронов (дырок) в зонах может определяться уравнением

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho = -\frac{\rho}{\tau}. \quad (5)$$

Пусть

$$\rho(0) = \rho_0 \quad (6)$$

– начальная плотность заряда, тогда распределение плотности заряда, может быть найдено как решение задачи Коши (5), (6) [1], и определяется формулой

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot E_{1/\alpha}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\tau}; 1\right),$$

где $E_{1/\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha k + \mu)}$ – функция Миттаг-Леффлера.

При $\alpha = 1$, обобщенное уравнение (5) переходит в классическое уравнение (3) описывающее процессы генерации и рекомбинации НЗ.

В работе [3] уравнение вида (5) исследуется посредством ренорм-групповых преобразований, выводится уравнение с дробной производной по времени описывающее релаксацию заряда на фракталах. Получена функция Грина, показано, что релаксация заряда на фракталах на больших временах носит степенной характер.

При отсутствии электрического поля ($a = 0$) процесс диффузионно-дрейфового транспорта НЗ примет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\rho. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) с начальным условием (4) имеет вид [11]:

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) \int_{|x|}^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) I_0(\sqrt{c}\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau.$$

Как показывают расчеты, проведенные в работе [9], заметное влияние параметра α на пространственное распределение НЗ, имеет место при увеличении численного значения параметра a .

Фрактальная структура образца параметра a должны оказывать влияние на кинетику НЗ, влияние этих параметров необходимо выявить в ходе численных экспериментов.

Полученные результаты могут быть применены для построения математических моделей описывающие нелинейные и нелокальные процессы переноса носителей заряда в полупроводниковых фрактальных структурах в рамках диффузио-дрейфового приближения.

Литература

- [1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [2] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
- [3] Архинчев В.Е. О релаксаций заряда фрактальных структурах // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. Вып. 7. С. 1007–1009. URL: http://www.jetpletters.ac.ru/ps/267/article_4379.pdf.
- [4] Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. №2. С. 354–367. URL: <http://mi.mathnet.ru/tmf5547>.
- [5] Чукбар К.В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. Вып. 5(11). С. 1875–1884.
- [6] Архинчев В.Е. О дрейфе при случайном блуждании по самоподобным кластерам // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 3. С. 1016–1023. URL: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1016.pdf.
- [7] Архинчев В.Е. Случайное блуждание по иерархическим гребешковым структурам // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 4. С. 1285–1296. URL: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1285.pdf.
- [8] Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // УФН. 2009. Т. 179. № 10. С. 1079–1104. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200910c.1079>.
- [9] Рехвиашвили С.Ш., Мамчурев Мурат О., Мамчурев Мухтар О. Модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой // ФТТ. 2016. Т. 58. № 4. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/42870>.
- [10] Мамчурев Мухтар О. К вопросу о применении дробного интегродифференцирования в моделировании диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 20–27. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26602895>.
- [11] Мамчурев Мурат О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.

References

- [1] Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. [in Russian].
- [2] Uchaikin V.V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p. [in Russian].
- [3] Arkhincheev V.E. *O relaksatsii zariada fraktal'nykh strukturakh* [On the charge relaxation of fractal structures]. *Pis'ma v ZhETF* [JETP Letters], 1990, Vol. 52, Issue 7, pp. 1007–1009. Available at: http://www.jetpletters.ac.ru/ps/267/article_4379.pdf [in Russian].
- [4] Nigmatullin R.R. *Drobnii integral i ego fizicheskaiya interpretatsiya* [Fractional integral and its physical interpretation]. *TMF* [Theoretical and Mathematical Physics], 1992, Vol. 90, no. 2, pp. 354–367. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tmf5547> [in Russian].
- [5] Chukbar K.V. *Stokhasticheskii perenos i drobnnye proizvodnye* [Stochastic Transport and Fractional Derivatives]. *ZhETF* [JETP], 1995, Vol. 108, no. 5 (11), pp. 1875–1884 [in Russian].
- [6] Archincheev V.E. *O dreife pri sluchainom bluzhdanii po samopodobnym klasteram* [On the drift in a random walk along self-similar clusters]. *ZhETF* [JETP], 1999, Vol. 115, no. 3, pp. 1016–1023. Available at: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1016.pdf [in Russian].
- [7] Archincheev V.E. *Sluchainoe bluzhdanie po ierarkhicheskim grebeshkovym strukturam* [Random walk along hierarchical comb-like structures]. *ZhETF* [JETP], 1999, Vol. 115, no. 4, pp. 1285–1296. Available at: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1285.pdf [in Russian].
- [8] Sibatov R.T., Uchaikin V.V. *Drobnno-differentsial'nyi podkhod k opisaniyu dispersionnogo perenosa v poluprovodnikakh* [Fractional-differential approach to the description of dispersion transport in semiconductors]. *UFN* [Physics-Uspekhi], 2009, Vol. 179, no. 10, pp. 1079–1104. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200910c.1079> [in Russian].
- [9] Rekhviashvili S.Sh., Mamchuev Murat O., Mamchuev Mukhtar O. *Model' diffuzionno-dreifovogo transporta nositelei zariada v sloiakh s fraktal'noi strukturoi* [Model of the diffusion-drift transport of charge carriers in layers with a fractal structure]. *FTT* [Physics of the Solid State], 2016, Vol. 58, no. 4. Available at: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/42870> [in Russian].
- [10] Mamchuev Mukhtar O. *K voprosu o primeneni i drobnogo integrodifferentsirovaniya v modelirovani i diffuzionno-dreifovogo transporta nositelei zariada v sloiakh s fraktal'noi strukturoi* [On the application of fractional integro-differentiation in the modeling of diffusion-drift transport of charge carriers in layers with a fractal structure]. *Izvestiya KBNTs RAN* [News of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2016, no. 4 (72), pp. 20–27. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26602895> [in Russian].

- [11] Mamchuev Murat O. *Kraevye zadachi dlia uravnenii i sistem uravnenii s chastnymi proizvodnymi drobnogo poriadka* [Boundary value problems for equations and systems of partial differential equations of fractional order]. Nalchik: Izd-vo KBNTs RAN, 2013, 200 p. [in Russian].

*M.O. Mamchuev*²

MODEL OF THE DRIFT-DIFFUSION TRANSPORT OF CHARGE CARRIERS CONSIDERING RECOMBINATION IN LAYERS WITH FRACTAL STRUCTURE

In this article, we study a model of the drift-diffusion transport of charge carries in the layers of certain fractal structure. We take into account the process of recombination of charge carries. Solutions of model equations are found in the closed form.

Key words: volume charge density, charge carrier recombination, drift-diffusion transport of charge carriers, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, fractal structure.

Citation. Mamchuev M.O. *Model' diffuzionno-dreifovogo transporta nositelei zariada s uchetom protsessa rekombinatsii v sloiakh s fraktal'noi strukturoi* [Model of the drift-diffusion transport of charge carriers considering recombination in layers with fractal structure]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 67–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-67-71> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 28/VI/2018.

The article received 28/VI/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

² Mamchuev Mukhtar Osmanovich (mamchuevmo@yandex.ru), Department of Theoretical and Mathematical Physics, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.