

## МЕХАНИКА

УДК 539.42

DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66

Л.Н. Косыгина<sup>1</sup>

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С БОКОВЫМИ НАДРЕЗАМИ: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе проведено теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) бесконечной пластины с двумя полубесконечными симметричными краевыми разрезами. Аналитическое решение получено с помощью разложения в ряд М. Уильямса и последующего подсчета амплитудных коэффициентов разложения с использованием комплексного представления напряжений. Проведен анализ многопараметрического разложения поля напряжений и вычислительный эксперимент с удержанием различного количества слагаемых. Сравнение комплексного представления поля напряжений с полученным асимптотическим разложением в ряд М. Уильямса показало необходимость аккуратной оценки количества удерживаемых слагаемых в зависимости от расстояния от вершины трещины.

**Ключевые слова:** разложение М. Уильямса, напряженно-деформированное состояние пластины с полубесконечными разрезами, вычисление высших приближений асимптотического ряда М. Уильямса.

**Цитирование.** Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 55–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66>.

### Введение

Предложенное М. Уильямсом описание поля напряжений в окрестности вершины трещины посредством асимптотического разложения является одним из широко используемых методов решения задач механики разрушения [1–11]. М. Уильямс использовал функцию напряжений [12–16], представленную в виде разложения в ряд по собственным функциям  $\chi(r, \theta) = \sum_i f_i(\theta)r^{\lambda_i}$ , где  $f_i(\theta)$  и  $\lambda_i$  — собственные функции и собственные значения соответственно, а  $r, \theta$  — полярные координаты. В этом случае компоненты напряжений имеют следующий вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(m)} f_{k,ij}^{(m)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}, \quad (1)$$

где индекс  $m$  в круглых скобках здесь и далее по тексту отвечает типу нагружения функции ( $m = 1$  соответствует нормальному отрыву,  $m = 2$  поперечному сдвигу),  $f_{k,ij}^{(m)}(\theta)$  являются универсальными угловыми функциями и определяются соотношениями

$$\begin{aligned} f_{k,11}^{(1)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left[ 2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{k,22}^{(1)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left[ 2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{k,12}^{(1)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta - \left[\frac{k}{2} + (-1)^k\right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>© Косыгина Л.Н., 2018

Косыгина Лилия Николаевна (fleur.lilia@gmail.com), кафедра математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$\begin{aligned}
f_{k,11}^{(2)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left\{ \left[ 2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \sin \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \theta - \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right\}, \\
f_{k,22}^{(2)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left\{ \left[ 2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right] \sin \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \theta + \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right\}, \\
f_{k,12}^{(2)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{k}{2} - 3 \right) \theta - \left[ \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \cos \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \theta \right\},
\end{aligned} \tag{3}$$

а амплитудные коэффициенты  $a_k^{(m)}$  учитывают множество краевых задач механики разрушения (геометрию образца и систему нагрузок).

Первые два слагаемых для ряда Уильямса (1) достаточно просто определяются и существует большое количество аналитических решений [7–9], полученных посредством разложения Уильямса для различных образцов с трещинами. Однако в ряде экспериментальных и теоретических работ [1–6; 10; 11], опубликованных в последнее время, показана необходимость учета большего числа слагаемых, что в действительности является трудной задачей. Масштабные множители  $a_k^{(m)}$  могут быть определены разными способами: 1) экспериментально; 2) теоретически; 3) численно с помощью метода конечного элемента. Фотоупругость, с одной стороны, является эффективным способом нахождения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса, поскольку экспериментально можно определить разность главных напряжений и найти амплитудные коэффициенты с помощью оптико-механического закона. С другой стороны, использование метода фотоупругости приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой в случае большого количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении М. Уильямса наталкивается на существенные математические трудности. В силу указанных причин представляется важным и актуальным рассмотреть конфигурации образцов с трещинами, для которых имеется аналитическое решение, раскладывая которое в ряд в окрестности трещины можно получить высшие приближения и оценить их вклад в общее поле напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины. В настоящей работе приводится комплексное представление поля напряжений в образце с двумя симметричными надрезами, находящимся под действием соредоточенных сил (рис. 1), и разложение функции Вестергаарда в ряд с целью определения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений в этом образце.

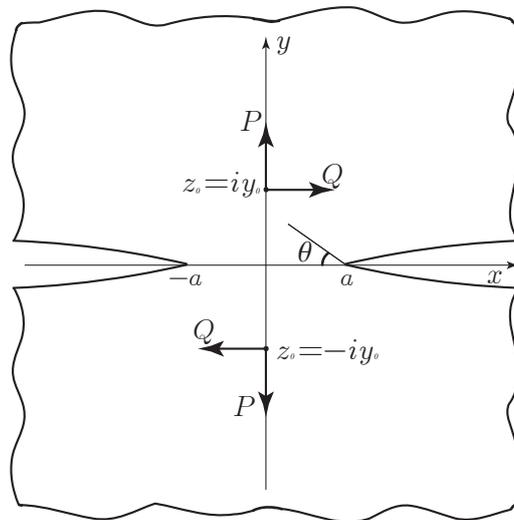


Рис. 1. Пластина с двумя полубесконечными краевыми надрезами

## 1. Комплексное представление решения. Функция Вестергаарда

При решении плоских задач теории упругости часто используется функция напряжений. Для расчета напряжений у трещины удобно ее выбрать в виде комплексной функции двух переменных, что значительно упрощает математические выкладки. В общем виде любую функцию напряжений можно представить следующим образом [17]

$$\Phi(z) = \operatorname{Re} [(x_1 - ix_2)\phi(z) x_1 + \chi(z)],$$

здесь  $\operatorname{Re} [ ]$  — действительная часть функции комплексного переменного  $z = x_1 + ix_2$ , а  $\phi(z)$ ,  $\chi(z)$  — аналитические функции, выбранные соответствующим образом.

Вестергаард, решая задачу распределения напряжений около острой трещины, проанализировал свойства комплексных функций определенного типа и подобрал граничные условия, соответствующие этим

свойствам [18]. Им было предложено при решении задачи о растяжении пластины (случай трещины первого типа — нормальный отрыв) использовать комплексную функцию следующего вида

$$\Phi_1(z) = \operatorname{Re} [\Phi_1^{**}(z)] + x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1^*(z)], \quad (4)$$

здесь  $\operatorname{Im} []$  — мнимая части функции комплексного переменного  $z$ , а  $\Phi_1^*(z)$  и  $\Phi_1^{**}(z)$  первый и второй интегралы функции  $\Phi(z)$

$$\Phi_1(z) = \frac{d\Phi_1^*(z)}{dz}, \quad \Phi_1^*(z) = \frac{d\Phi_1^{**}(z)}{dz}.$$

Для трещины первого типа комплексное представление напряжений определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \operatorname{Re} [\Phi_1(z)] - x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1'(z)], \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \operatorname{Re} [\Phi_1(z)] + x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1'(z)], \\ \sigma_{12}^{(1)} &= -x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1'(z)]. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае трещины второго типа (поперечный сдвиг) в качестве функции напряжений рассматривается функция

$$\Phi_2(z) = -x_2 \operatorname{Re} [\Phi_2^*(z)],$$

где  $\Phi_2^*(z)$  — функция комплексного переменного, выбранная с учетом граничных условий.

Тогда для трещины второго типа комплексное представление напряжений определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} &= 2 \operatorname{Im} [\Phi_2(z)] + x_2 \operatorname{Re} [\Phi_2'(z)], \\ \sigma_{22}^{(2)} &= -x_2 \operatorname{Re} [\Phi_2'(z)], \\ \sigma_{12}^{(2)} &= \operatorname{Re} [\Phi_2(z)] - x_2 \operatorname{Im} [\Phi_2'(z)]. \end{aligned} \quad (6)$$

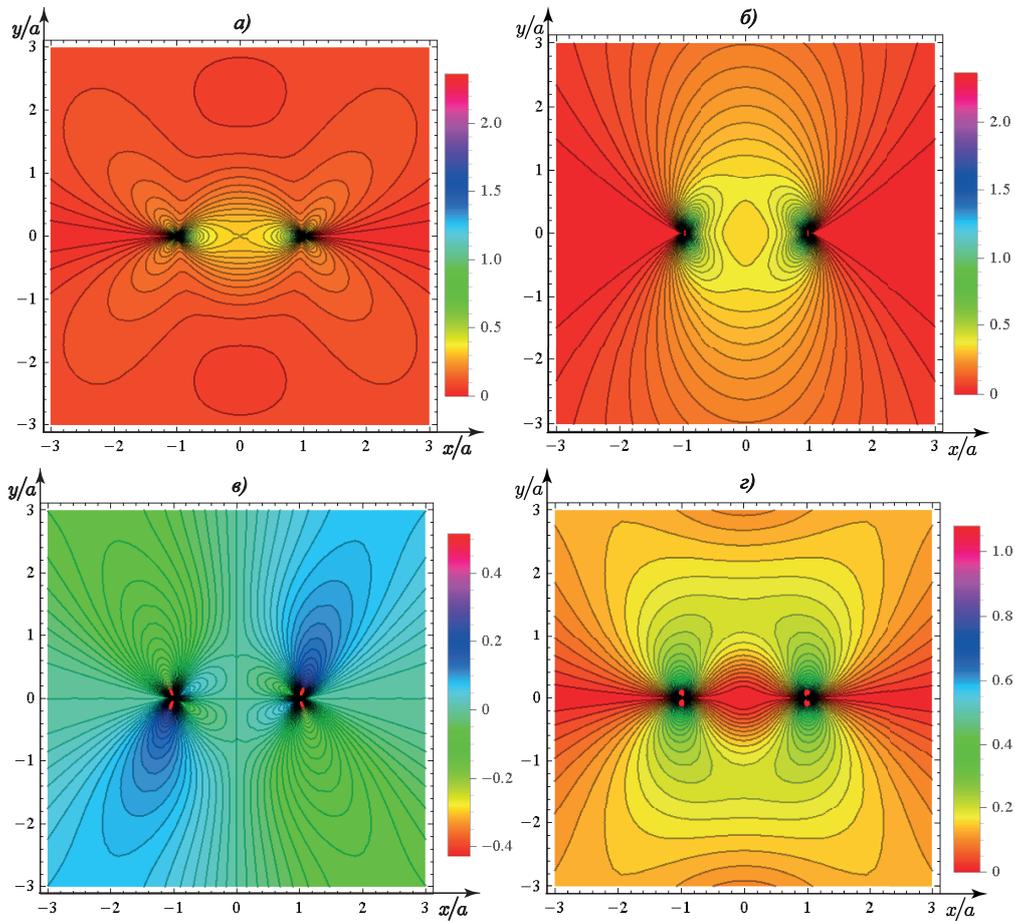


Рис. 2. Контурные линии компонент тензора напряжений в случае нормального отрыва. а) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^{(1)}$ ; б) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{22}^{(1)}$ ; в) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{12}^{(1)}$ ; г) линии интенсивности напряжений  $\sigma_e^{(1)}$

Поскольку рассматриваемая среда является линейно-упругой и изотропной, то справедлив принцип суперпозиции. Тогда для смешанного нагружения поле напряжений определяется соотношениями

$$\sigma_{ij}^e = M^e \sigma_{ij}^{(1)} + (1 - M^e) \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (7)$$

здесь  $M^e = 2/\pi \operatorname{arctg}(P/Q)$ ,  $0 \leq M^e \leq 1$  — параметр смешанности, его варьирование позволяет получить весь диапазон смешанных форм деформирования: от нормального отрыва при  $M^e = 1$  до поперечного сдвига при  $M^e = 0$ .

## 2. Растяжение пластины с двумя боковыми надрезами. Комплексное представление решения

Как упоминалось выше, для получения высших приближений ряда Уильямса и оценки их вклада в общее поле напряжений необходимо рассматривать конфигурации образцов с трещинами, для которых имеется аналитическое решение. Одним из таких образцов является пластина с двумя полубесконечными боковыми разрезами (рис. 1). Итак, рассмотрим бесконечную пластину с двумя полубесконечными боковыми разрезами симметричными относительно мнимой оси (вершины разрезов располагаются на расстоянии  $a$  от мнимой оси).

Функции Вестергарда для трещин первого и второго типа в рассматриваемом случае имеют соответственно вид [19]

$$\Phi_1(z) = \frac{P}{\pi} \left( f - \alpha y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0} \right), \quad \Phi_2(z) = \frac{Q}{\pi} \left( f + \alpha y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0} \right), \quad (8)$$

здесь

$$f = \frac{y_0}{y_0^2 + z^2} \sqrt{\frac{a^2 + y_0^2}{a^2 - z^2}}.$$

После применения оператора дифференцирования и ряда преобразований комплексные потенциалы (8) удается представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_i(z) &= \frac{c_4^{(i)}(z^2 + c_5^{(i)})}{\sqrt{a^2 - z^2} (z^2 + y_0^2)^2}, \quad (9) \\ c_4^{(i)} &= c_1^{(i)} c_3^{(i)}, \quad c_5^{(i)} = c_2^{(i)} / c_1^{(i)}, \\ c_1^{(1)} &= a^2 + y_0^2 - \alpha(a^2 + 2y_0^2), \quad c_1^{(2)} = a^2 + y_0^2 + \alpha(a^2 + 2y_0^2), \\ c_2^{(1)} &= y_0^2 [y_0^2 + a^2(1 + \alpha)], \quad c_2^{(2)} = y_0^2 [y_0^2 + a^2(1 - \alpha)], \\ c_3^{(1)} &= \frac{P y_0}{\pi \sqrt{a^2 + y_0^2}}, \quad c_3^{(2)} = \frac{Q y_0}{\pi \sqrt{a^2 + y_0^2}}. \end{aligned}$$

Для получения поля напряжений требуется выделить действительные и мнимые части функций, входящих в комплексные потенциалы (9)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ (z^2 + y_0^2)^2 \right] &= A_1 = (x^2 - x_2^2 + y_0^2)^2 - 4x_1^2 x_2^2, \\ \operatorname{Im} \left[ (z^2 + y_0^2)^2 \right] &= A_2 = 4x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2 + y_0^2), \\ \operatorname{Re} \left[ \sqrt{a^2 - z^2} \right] &= Y_1 = \sqrt{(X_1 + \sqrt{X_1^2 + X_2^2})} / 2, \\ \operatorname{Im} \left[ \sqrt{a^2 - z^2} \right] &= Y_2 = X_2 / (2Y_1), \quad X_1 = a^2 - x_1^2 + x_2^2, \quad X_2 = -2x_1 x_2, \\ \operatorname{Re} \left[ z^2 + c_5^{(i)} \right] &= D_1^{(i)} = x_1^2 - x_2^2 + c_5^{(i)}, \quad \operatorname{Im} \left[ z^2 + c_5^{(i)} \right] = D_2 = 2x_1 x_2. \end{aligned}$$

Приведенные выше соотношения позволяют представить мнимую и действительную части комплексных потенциалов в виде

$$\operatorname{Re} [\Phi_i(z)] = f_1^{(i)} (D_1^{(i)} B_1 - D_2 B_2), \quad \operatorname{Im} [\Phi_i(z)] = f_1^{(i)} (D_1^{(i)} B_2 + D_2 B_1),$$

$$B_1 = A_1 Y_1 - A_2 Y_2, \quad B_2 = A_1 Y_2 + A_2 Y_1, \quad f_1^{(i)} = c_4^{(i)} / [(A_1^2 + A_2^2) (Y_1^2 + Y_2^2)].$$

Аналогичным образом выделяются действительные и мнимые части функций, входящих в выражение производных комплексных потенциалов

$$\Phi_i'(z) = \frac{3c_4^{(i)} z (z^4 + a_1 z^2 + a_2)}{(a^2 - z^2)^{3/2} (z^2 + y_0^2)^2}, \quad (10)$$

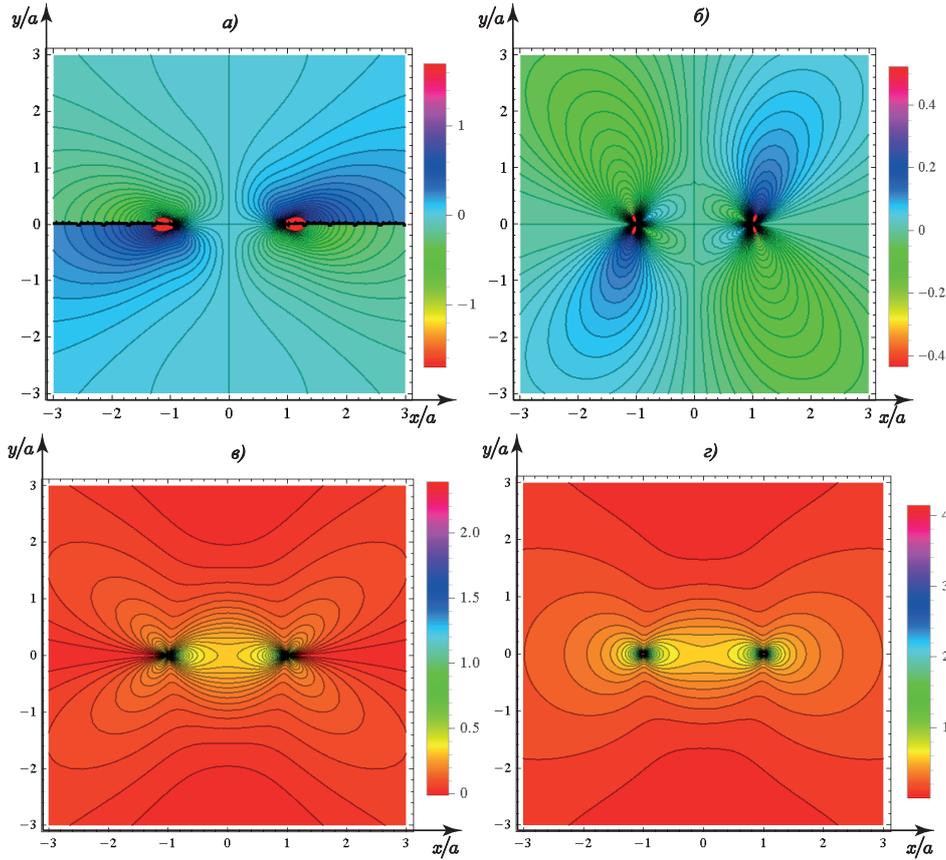


Рис. 3. Контурные линии компоненты тензора напряжений в случае поперечного сдвига. а) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^{(2)}$ ; б) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{12}^{(2)}$ ; в) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{22}^{(2)}$ ; г) линии интенсивности напряжений  $\sigma_e^{(2)}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(z^2 + y_0^2)] &= A_{11} = x_1^2 + y_0^2 - x_2^2, & \operatorname{Im} [(z^2 + y_0^2)] &= A_{22} = 2x_1x_2, \\ \operatorname{Re} [(z^2 + y_0^2)^3] &= p_1 = A_{11}^3 - 3A_{11}A_{22}^2, & \operatorname{Im} [(z^2 + y_0^2)^3] &= p_2 = 3A_{11}^2A_{22} - A_{22}^3, \\ \operatorname{Re} [(a^2 - z^2)^{3/2}] &= q_1 = Y_1^3 - 3Y_1Y_2^2, & \operatorname{Im} [(a^2 - z^2)^{3/2}] &= q_2 = 3Y_1^2Y_2 - Y_2^3, \\ \operatorname{Re} [z^4 + a_1z^2 + a_2] &= r_1 = a_1(x_1^2 - x_2^2) + a_2 - 4x_1^2x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2, \\ \operatorname{Im} [z^4 + a_1z^2 + a_2] &= r_2 = 2x_1x_2[2(x_1^2 - x_2^2) + a_1]. \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют представить мнимую и действительную части производных комплексных потенциалов (10) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\Phi_i'(z)] &= f_2^{(i)} R_1, & \operatorname{Im} [\Phi_i'(z)] &= f_2^{(i)} R_2, \\ f_2^{(i)} &= 3c_4^{(i)} / [(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)], \\ R_1 &= (p_1q_2 + p_2q_1)(r_1x_2 + r_2x_1) + (p_1q_1 - p_2q_2)(r_1x_1 - r_2x_2), \\ R_2 &= (p_1q_1 - p_2q_2)(r_1x_2 + r_2x_1) - (p_1q_2 + p_2q_1)(r_1x_1 - r_2x_2). \end{aligned}$$

Тогда поля напряжений, полученные после подстановки ранее приведенных выражений в представление (5), будут иметь вид

а) трещина первого типа (нормальный отрыв)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= f_1^{(1)}(B_1D_1^{(1)} - B_2D_2) - f_2^{(1)}R_2x_2, \\ \sigma_{22}^{(1)} &= f_1^{(1)}(B_1D_1^{(1)} - B_2D_2) + f_2^{(1)}R_2x_2, \\ \sigma_{12}^{(1)} &= -f_2^{(1)}R_1x_2, \end{aligned} \quad (11)$$

б) трещина второго типа (поперечный сдвиг)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} &= 2(B_2D_1^{(2)} + B_1D_2)f_1^{(2)} + f_2^{(2)}R_1x_2, \\ \sigma_{22}^{(2)} &= -f_2^{(2)}R_1x_2, \\ \sigma_{12}^{(2)} &= (B_1D_1^{(2)} - B_2D_2) - f_2^{(2)}R_2x_2. \end{aligned} \quad (12)$$

в) соотношения для поля напряжений в случае смешанного нагружения легко получить из выражения (7) с помощью (11) и (12).

На графиках приведены контурные линии компонент тензора напряжений для нормального отрыва (рис. 2), поперечного сдвига (рис. 3) и смешанного нагружения (рис. 4).

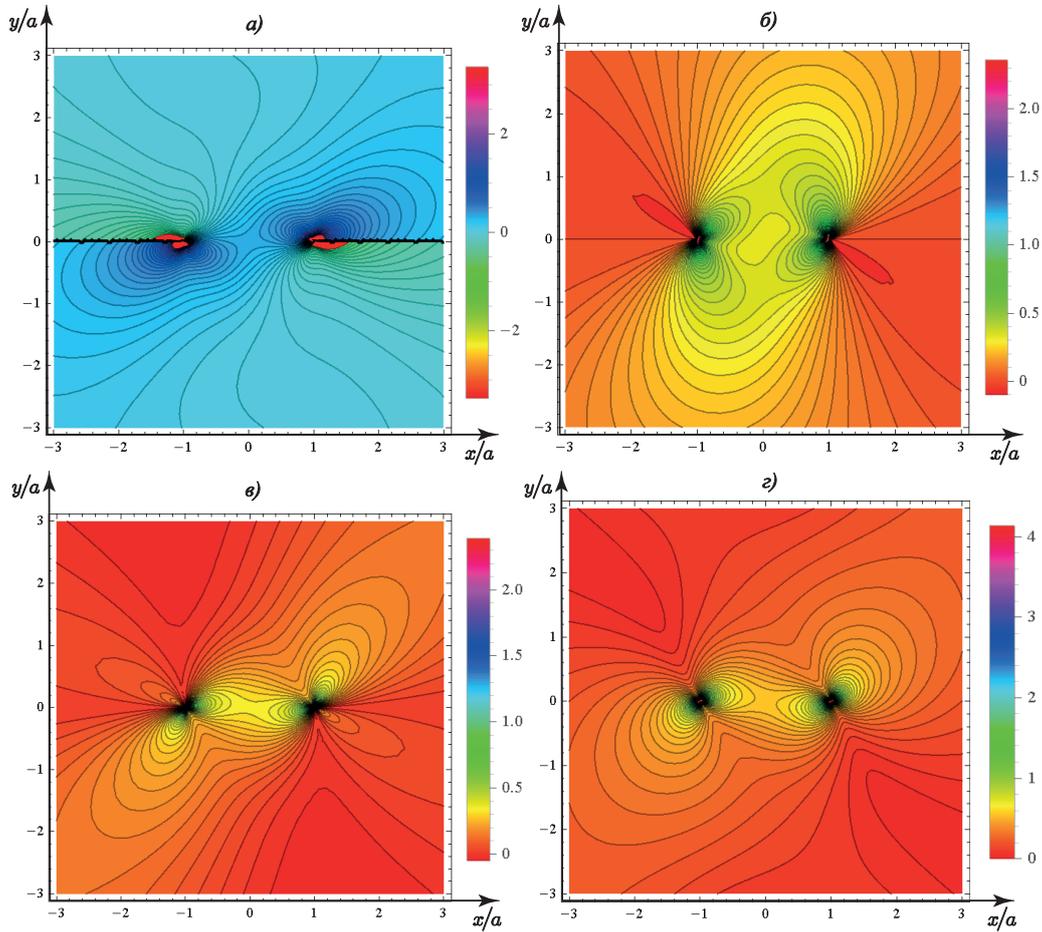


Рис. 4. Контурные линии компонент тензора напряжений в случае смешанного нагружения для параметра смешанности  $M^e = 0.5$ . а) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}$ ; б) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{22}$ ; в) линии равных значений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{12}$ ; г) линии интенсивности напряжений  $\sigma_e$

### 3. Растяжение пластины с двумя боковыми надрезами. Асимптотическое представление решения

#### 3.1. Нормальный отрыв

Разложение в ряд Тейлора функций, входящих в комплексный потенциал (9), в окрестности вершины трещины  $z = -a$  имеет вид

$$\begin{aligned} z^2 + c_5^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(1)} (z+a)^k, & (a-z)^{-1/2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(1)} (z+a)^m, \\ (z+iy_0)^{-2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^{(1)} (z+a)^p, & (z-iy_0)^{-2} &= \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^{(1)} (z+a)^j, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(1)} &= a^2 + c_5^{(1)}, & \alpha_1^{(1)} &= -2a, & \alpha_2^{(1)} &= 1, & \alpha_k^{(1)} &= 0, k > 2, \\ \beta_m^{(1)} &= \frac{|2m-1|!!}{2^{2m+1/2} a^{m+1/2} m!}, & \delta_p^{(1)} &= \frac{p+1}{(a+iy_0)^{p+2}}, & \eta_j^{(1)} &= \frac{j+1}{(a-iy_0)^{j+2}}. \end{aligned}$$

Подстановка соотношений (13) в (9) дает асимптотическое разложение комплексного потенциала в окрестности вершины трещины  $z = -a + re^{i\theta}$

$$\Phi_1(z) = c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(1)} (z+a)^{n-1/2},$$

$$\zeta_n^{(1)} = \sum_{l=0}^n \xi_l^{(1)} \gamma_{n-l}^{(1)}, \quad \xi_l^{(1)} = \sum_{j=0}^l \alpha_j^{(1)} \beta_{j-l}^{(1)}, \quad \gamma_l^{(1)} = \sum_{j=0}^l \delta_j^{(1)} \eta_{j-l}^{(1)}.$$

Тогда в окрестности вершины трещины  $z = -a + re^{i\theta}$  комплексный потенциал и его производная имеют вид

$$\Phi_1(z) = c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(1)} r^{n-1/2} \left[ \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta + i \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right],$$

$$\Phi_1'(z) = c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \zeta_n^{(1)} r^{n-3/2} \left[ \cos\left(n - \frac{3}{2}\right) \theta + i \sin\left(n - \frac{3}{2}\right) \theta \right]. \quad (14)$$

Подстановка полученных соотношений (14) в (5) приводит к выражениям

$$\sigma_{ij} = c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(1)} r^{n-1/2} g_{n,ij}^{(1)}(\theta), \quad (15)$$

$$g_{n,11}^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \left(n + \frac{3}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta \right],$$

$$g_{n,22}^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta - \left(n - \frac{5}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right],$$

$$g_{n,12}^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[ \sin\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right].$$

Разложение Уильямса для трещины первого типа представляется соотношением

$$\sigma_{ij}^{(1)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} f_{k,ij}^{(1)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}. \quad (16)$$

Следует отметить, что в результате сравнения выражения (15) и представления (16), все амплитудные множители с четными номерами равны нулю и также справедливы соотношения

$$f_{2n+1,ij}^{(1)}(\theta) = (2n+1) g_{n,ij}^{(1)}(\theta).$$

Тогда амплитудные коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса равны

$$a_{2n+1}^{(1)} = \frac{c_4^{(1)} \zeta_n^{(1)}}{2n+1}, \quad a_{2n}^{(1)} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

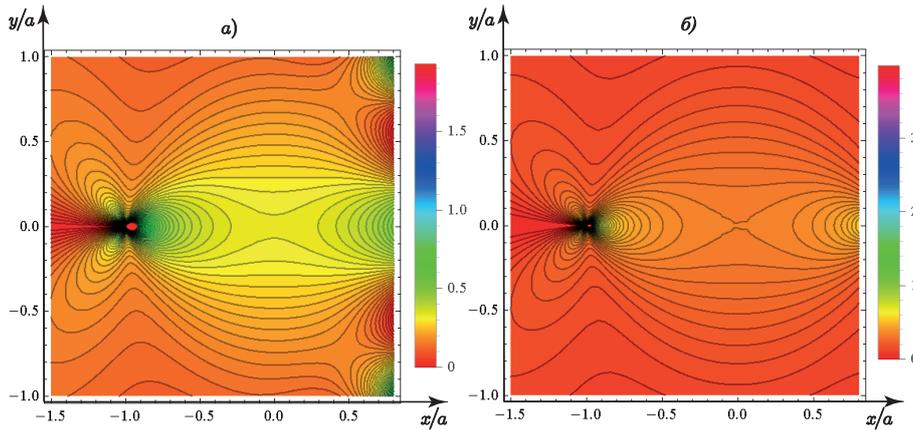


Рис. 5. Линии уровня напряжений  $\sigma_{11}$  в окрестности вершины трещины  $z = -a$  а) асимптотическое представление напряжений ( $n = 31$ ), б) комплексное представление напряжений

Поскольку разложение в ряд Тейлора справедливо в круге  $|z+a| < 2a$  (рис. 5), то в окрестности вершины второй трещины необходимо также получить асимптотическое представление.

Разложение в ряд Тейлора функций, входящих в комплексный потенциал (9), в окрестности вершины трещины  $z = a$  имеет вид

$$z^2 + c_5^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^{(1)} (z-a)^k, \quad (a-z)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\beta}_m^{(1)} (z-a)^m,$$

$$(z+iy_0)^{-2} = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\delta}_p^{(1)} (z-a)^p, \quad (z-iy_0)^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\eta}_j^{(1)} (z-a)^j, \quad (17)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0^{(1)} &= a^2 + c_5^{(1)}, \quad \tilde{\alpha}_1^{(1)} = 2a, \quad \tilde{\alpha}_2^{(1)} = 1, \quad \tilde{\alpha}_k^{(1)} = 0, \quad k > 2, \\ \tilde{\beta}_m^{(1)} &= \frac{(-1)^m |2m-1|!!}{2^{2m+1/2} a^{m+1/2} m!}, \quad \tilde{\delta}_p^{(1)} = \frac{(-1)^p (p+1)}{(a+iy_0)^{p+2}}, \quad \tilde{\eta}_j^{(1)} = \frac{(-1)^j (j+1)}{(a-iy_0)^{j+2}}. \end{aligned}$$

Подстановка соотношений (17) в (9) дает асимптотическое разложение комплексного потенциала  $\Phi_1(z)$  в окрестности вершины трещины  $z = a$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_n^{(1)} (z-a)^{n-1/2}, \\ \tilde{\zeta}_n^{(1)} &= \sum_{l=0}^n \tilde{\xi}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_{n-l}^{(1)}, \quad \tilde{\xi}_l^{(1)} = \sum_{j=0}^l \tilde{\alpha}_j^{(1)} \tilde{\beta}_{j-l}^{(1)}, \quad \tilde{\gamma}_l^{(1)} = \sum_{j=0}^l \tilde{\delta}_j^{(1)} \tilde{\eta}_{j-l}^{(1)}. \end{aligned}$$

Поскольку в окрестности вершины трещины  $z = a + re^{-i(\pi+\theta)}$ , то комплексный потенциал и его производная имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{\zeta}_n^{(1)} r^{n-1/2} \left[ \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta + i \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right], \\ \Phi_1'(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(n - \frac{1}{2}\right) \tilde{\zeta}_n^{(1)} r^{n-3/2} \left[ \cos\left(n - \frac{3}{2}\right) \theta + i \sin\left(n - \frac{3}{2}\right) \theta \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка полученных соотношений (18) в (5) приводит к выражениям

$$\sigma_{ij} = c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_n^{(1)} r^{n-1/2} g_{n,ij}^{(1)}(\theta). \quad (19)$$

Проведение сравнительного анализа (19) и (16) приводит к следующим выражениям для амплитудных множителей

$$\tilde{a}_{2n+1}^{(1)} = \frac{(-1)^n c_4^{(1)} \tilde{\zeta}_n^{(1)}}{2n+1}, \quad \tilde{a}_{2n}^{(1)} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

### 3.2. Поперечный сдвиг

Поскольку комплексные потенциалы для трещин первого и второго типа имеют общий вид (9) с точностью до индекса, то для случая поперечного сдвига в дальнейшем используются асимптотические разложения, полученные в предыдущем разделе с соответствующей заменой индекса в круглых скобках с "1" на "2". Тогда подстановка соотношений (14) в (6) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= c_4^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(2)} r^{n-1/2} g_{n,ij}^{(2)}(\theta), \quad (20) \\ g_{n,11}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left[ \left(n + \frac{7}{2}\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \left(n - \frac{1}{2}\right) \sin\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta \right], \\ g_{n,22}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[ \sin\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right], \\ g_{n,12}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left[ \left(n + \frac{3}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta \right]. \end{aligned}$$

Разложение М. Уильямса поля напряжений для трещины второго типа представляется соотношением

$$\sigma_{ij}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} f_{k,ij}^{(2)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}. \quad (21)$$

Следует отметить, что в результате сравнения выражения (20) и представления (21), как и в случае нормального отрыва, все амплитудные множители с четными номерами равны нулю и справедливы соотношения

$$f_{2n+1,ij}^{(2)}(\theta) = -(2n+1)g_{n,ij}^{(2)}(\theta).$$

Тогда амплитудные коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса равны

$$a_{2n+1}^{(2)} = -\frac{c_4^{(2)} \zeta_n^{(2)}}{2n+1}, \quad a_{2n}^{(2)} = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

Аналогичным образом легко получить разложения в окрестности вершины второй трещины  $z = a$ , что приводит к следующим соотношениям для амплитудных коэффициентов ряда М. Уильямса

$$\tilde{a}_{2n+1}^{(2)} = \frac{(-1)^{n+1} c_4^{(2)} \tilde{\zeta}_n^{(2)}}{2n+1}, \quad \tilde{a}_{2n}^{(2)} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

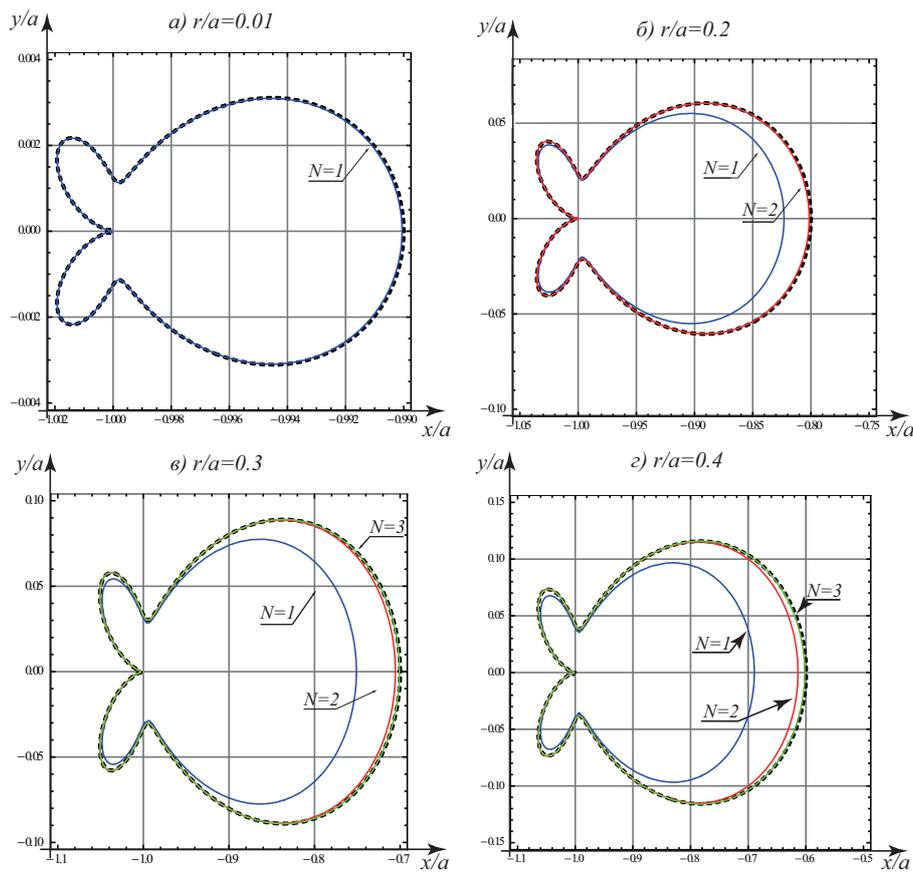


Рис. 6. Линии уровня компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  в окрестности вершины трещины  $z = -a$  а) линии уровня компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  на расстоянии от вершины трещины  $r/a = 0.01$  б) линии уровня компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  на расстоянии от вершины трещины  $r/a = 0.2$ ; в) линии уровня компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  на расстоянии от вершины трещины  $r/a = 0.4$

### 3.3. Смешанное нагружение

Для нахождения асимптотического представления в случае смешанного нагружения необходимо подставить полученные разложения (16) и (21) соотношения (7) и, выбрав значение для параметра смешанности  $M^e$ , получить соответствующие формы смешанного нагружения.

## 4. Анализ количества удерживаемых слагаемых

Для оценки количества удерживаемых слагаемых в полученном разложении поля напряжений в ряд М. Уильямса в системе компьютерной алгебры Mathematica была разработана программа, которая позволяет вычислить любое наперед заданное количество коэффициентов асимптотического разложения. Что, в свою очередь, дает возможность оценить вклад высших приближений и ответить на вопрос: нужно ли учитывать высшие приближения и, если да, то сколько слагаемых в разложении следует учитывать.

На рис. 6 приведены распределения нормального напряжения  $\sigma_{11}$  на разных расстояниях от кончика трещины  $z = -a$  в случае нормального отрыва, поперечного сдвига и смешанного нагружения. Сплошные разноцветные линии соответствуют асимптотическому разложению с различным количеством удерживаемых слагаемых, разрывная линия — комплексному представлению поля напряжений. Анализируя полученные представления, можно сделать вывод, что при удалении от вершины трещины действительно необходимо увеличивать количество учитываемых слагаемых в разложении М. Уильямса. Например, для достижения точности  $10^{-6}$  на расстояниях от кончика трещины, равных  $0.4a$ , требуется учитывать девятнадцать слагаемых, при расстояниях, эквивалентных  $0.1a$ , требуется учитывать девять слагаемых, а при  $0.01a$  требуемая точность достигается уже учетом трех слагаемых.

## Выводы

В работе получено многопараметрическое разложение поля напряжений на примере задачи о растяжении бесконечной пластины с двумя полубесконечными боковыми разрезами, а также проведен вычислительный эксперимент с удержанием различного количества слагаемых в полученном асимптотическом разложении М. Уильямса. Сравнение полученных асимптотического и комплексного представлений показало необходимость учета высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений. Чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых следует удерживать в разложении.

Таким образом, при построении асимптотических решений задач, для которых отсутствуют точные аналитические решения, следует прибегать к построению многопараметрических асимптотических разложений. Проведенный анализ в дальнейшем может быть использован при обработке экспериментальных данных (например, в рамках метода цифровой фотоупругости). Разложение поля напряжений в ряд М. Уильямса может быть использовано при решении задач для любых конфигураций образцов с трещинами, а все математические трудности возникают при нахождении амплитудных коэффициентов  $a_k^{(m)}$ , для определения которых можно использовать экспериментальные картины, полученные с помощью метода цифровой фотоупругости.

Автор выражает благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, доценту, профессору кафедры математического моделирования в механике Самарского национального университета имени академика С.П. Королева Степановой Ларисе Валентиновне за советы и ценные замечания при работе над данной статьей.

## Литература

- [1] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. V. 100–101. P. 11–28.
- [2] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // *Вестник Пермского национального технического университета. Механика*. 2015. № 4. С. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12.
- [3] Степанова Л.В., Аддылина Е.М. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55. № 5. С. 181–194. URL: <http://www.sibran.ru/upload/iblock/959/95931c7940886f46456f33261fbe806c.pdf>.
- [4] Игонин С.А., Степанова Л.В. Асимптотика полей напряжений и сплошности у вершины усталостной трещины в поврежденной среде в условиях плоского напряденного состояния // *Вестник Самарского государственного университета*. 2013. № 9-2. С. 97–108. URL: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=vsgu&paperid=305&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=vsgu&paperid=305&option_lang=rus).
- [5] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane // *Solid State Phenomena*. 2017. V. 258. P. 209–212. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.225.
- [6] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Lomakov P.N. A Photoelastic Study for Multiparametric Analysis of the Near Crack Tip Stress Field Under Mixed Mode Loading // *Procedia Structural Integrity*. 2016. V. 2. P. 1797–1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226.
- [7] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. V. 134. P. 218–241. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>.
- [8] Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field // *International Journal of Fracture*. 2010. V. 161. P. 221–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9443-3>.
- [9] Malikova L., Vesely V. Significance of Higher-order Terms of the Williams Expansion for Plastic Zone Extent Estimation Demonstrated on a Mixed-mode Geometry // *Procedia Materials Science*. 2014. V. 3. P. 1383–1388. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.223.
- [10] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structure*. 2012. V. 49. P. 556–566. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [11] Hello G., Tahar M.B. On the exactness of truncated crack-tip stress expansions // *Procedia Materials Science*. 2014. V. 3. P. 750–755. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.123.
- [12] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension // *Journal of Applied Mechanics*. 1952. V. 19. P. 109–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.037>.

- [13] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. V. 24. P. 109–114. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf>.
- [14] Williams M.L. The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. V. 49. No 2. P. 199–204. URL: [https://www.researchgate.net/publication/248023746\\_The\\_Stresses\\_Around\\_a\\_Fault\\_or\\_a\\_Crack\\_in\\_Dissimilar\\_Media](https://www.researchgate.net/publication/248023746_The_Stresses_Around_a_Fault_or_a_Crack_in_Dissimilar_Media).
- [15] Zak A.R., Williams M.L. Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface // *Journal of Applied Mechanics*. 1963. V. 30. P. 142–143. URL: <http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140407-142817986>.
- [16] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 336 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15213973>.
- [17] Нотт Д.Ф. Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978. 256 с.
- [18] Броек Д. Основы механики разрушения. М.: Высш. школа, 1980. 368 с.
- [19] Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. NY: ASME Press, 2000. 678 p. URL: <http://bookfi.net/book/1398445>.

## References

- [1] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*, 2016, Vol. 100–101, pp. 11–28. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032 [in English].
- [2] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. *Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M. Uil'iamsa u verшин dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine* [Complete asymptotic expansion of M. Williams at the tips of two collinear cracks of finite length in an infinite plate]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2015, no. 4, pp. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12 [in Russian].
- [3] Stepanova L.V., Adylina E.M. *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie v okrestnosti verшины treshchiny v usloviakh smeshannogo nagruzheniia* [Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed mode loading]. *Prikladnaia matematika i tekhnicheskaiia fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2014, Vol. 55, no. 5, pp. 885–895 [in Russian].
- [4] Igonin S.A., Stepanova L.V. *Asimptotika polei napriazhenii i sploshnosti u verшины ustalostnoi treshchiny v povrezhdennoi srede v usloviakh ploskogo napriadennogo sostoianiia* [Asymptotics of stress and continuity fields at the tip of a fatigue crack in a damaged medium in conditions of plane stress state]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2013, no. 9-2, pp. 97–108. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=305&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=305&option_lang=rus) [in Russian].
- [5] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane. *Solid State Phenomena*, 2017, Vol. 258, pp. 209–212. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.225 [in English].
- [6] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Lomakov P.N. A Photoelastic Study for Multiparametric Analysis of the Near Crack Tip Stress Field Under Mixed Mode Loading. *Procedia Structural Integrity*, 2016, Vol. 2, pp. 1797–1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226 [in English].
- [7] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, Vol. 134, pp. 218–241. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013> [in English].
- [8] Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field. *International Journal of Fracture*, 2010, Vol. 161, pp. 221–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9443-3> [in English].
- [9] Malikova L., Vesely V. Significance of Higher-order Terms of the Williams Expansion for Plastic Zone Extent Estimation Demonstrated on a Mixed-mode Geometry. *Procedia Materials Science*, 2014, Vol. 3, pp. 1383–1388. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.223.
- [10] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structure*, 2012, Vol. 49, pp. 556–566. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024> [in English].
- [11] Hello G., Tahar M.B. On the exactness of truncated crack-tip stress expansions. *Procedia Materials Science*, 2014, Vol. 3, pp. 750–755. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.123 [in English].
- [12] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, Vol. 19, pp. 109–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.037> [in English].

- [13] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pp. 109–114. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf> [in English].
- [14] Williams M.L. The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1959, Vol. 49, no 2, pp. 199–204. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/248023746\\_The\\_Stresses\\_Around\\_a\\_Fault\\_or\\_a\\_Crack\\_in\\_Dissimilar\\_Media](https://www.researchgate.net/publication/248023746_The_Stresses_Around_a_Fault_or_a_Crack_in_Dissimilar_Media) [in English].
- [15] Zak A.R., Williams M.L. Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface. *Journal of Applied Mechanics*, 1963, Vol. 30, pp. 142–143. Available at: <http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140407-142817986> [in English].
- [16] Stepanova L.V. *Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniia* [Mathematical methods of fracture mechanics]. M.: Fizmatlit, 2009, 336 p. [in Russian]. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15213973> [in Russian].
- [17] Knott J.F. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Basis of fracture mechanics]. M.: Metallurgii, 1978, 256 p. [in Russian].
- [18] Broek B. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Basis of fracture mechanics]. M.: Vyssh. shkola, 1980, 368 p. [in Russian].
- [19] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. NY: ASME Press, 2000, 678 p. Available at: <http://bookfi.net/book/1398445> [in English].

L.N. Kosygina<sup>2</sup>

## ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE STRESS FIELD NEAR THE CRACK TIP OF AN INFINITE PLATE WITH TWO SEMI-INFINITE SYMMETRICAL EDGE NOTCHES: THEORETICAL STUDY AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

This article is aimed at theoretical study of the stress-strain state of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches. The analytical solution is obtained by means of decomposition in the M. Williams series expansion and subsequent calculation of the amplitude coefficients of the expansion using the complex representation of stresses. An analysis of the multiparametric expansion of the stress field and a computational experiment with different number of terms are carried out. A comparison of the complex representation of the stress field with the asymptotic series of M. Williams obtained shows the need for an accurate estimate of the number of terms keeping in the expansion series depending on the distance from the crack tip.

**Key words:** decomposition of M. Williams, stress-strain state of a plate with semi-infinite cuts, calculation of higher ordered terms of the asymptotic series of M. Williams.

**Citation.** Kosygina L.N. *Asimptoticheskoe predstavlenie polia napriazhenii u vershiny treshchiny dlia plastiny s bokovymi nadrezami: teoreticheskoe issledovanie i vychislitel'nyi eksperiment* [Asymptotic representation of the stress field near the crack tip of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches: theoretical study and computational experiment]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 55–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 21/VI/2018.

The article received 21/VI/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

<sup>2</sup>Kosygina Liliya Nikolaevna (fleur.lilia@gmail.com), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.