УДК 517+531.01 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-33-54

М.В. Шамолин[1]

О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 3. ЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯ СИЛ ОТ ТЕНЗОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

В предлагаемом цикле работ исследуются уравнения движения динамически симметричного закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n-мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В данной работе рассматривается тот случай, когда силовое поле зависит линейным образом от тензора угловой скорости.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

Цитирование. Шамолин М.В. О движении маятника в многомерном пространстве. Часть 3. Зависимость поля сил от тензора угловой скорости // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 33–54. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-33-54.

1. Введение зависимости от угловой скорости

Данная глава посвящена динамике многомерного твердого тела в пространстве $\mathbf{E}^n$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск $\mathcal{D}^{n-1}$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости Ω лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [1–3].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{1.1}$$

где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости Ω. При этом зависимость функции R от тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D}\Omega \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Здесь $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{r_{n-1}}}{v_D},\ x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_{r_{n-2}}}{v_D},\ \ldots,\ x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1} h_1 \frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{1.3}$$

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

Таким образом, функция $\mathbf{r}_N$ выбирается в следующем виде (диск $\mathcal{D}^{n-1}$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D}\Omega h, \tag{1.4}$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \Omega \in \mathrm{so}(n). \tag{1.5}$$

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Таким образом, выполнены равенства

$$\begin{gathered} x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1 - h_1\tfrac{\omega_{r_{n-1}}}{v_D}, \;\; x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2 + h_1\tfrac{\omega_{r_{n-2}}}{v_D}, \;\; \ldots, \\ x_{n-1,N} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} + (-1)^n h_1\tfrac{\omega_{r_2}}{v}, \\ x_{nN} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} + (-1)^{n+1} h_1\tfrac{\omega_{r_1}}{v}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от тензора угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [4, 5], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \;\; s(\alpha) = B\cos\alpha, \;\; A, B > 0. \tag{1.8}$$

2. Приведенные системы

Для случая n-мерного твердого тела нас будет прежде всего интересовать случай $(1—(n-1))$, т. е. когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1\ldots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, \underbrace{I_2, \ldots, I_2}_{n-1}\}, \tag{2.1}$$

а именно, в гиперплоскости $Dx_2\ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

В нашем случае закрепленного маятника действительно реализуется случай (2.1). Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$:

$$
\begin{gathered}
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=\\
=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=\\
=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_2(\Omega)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_1(\Omega)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

при этом $r_{n-2}+1=r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t=1,\dots,n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1,\dots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, тензора Ω, причем

$$
W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\ldots=\omega_{k_s}=0}=0,\ \ s=(n-1)(n-2)/2,\ \ k_j\neq r_i,
\tag{2.3}
$$

$$
j=1,\dots,s,\ \ i=1,\dots,n-1.
$$

Таким образом, первая группа кинематических уравнений в нашем случае примет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
v_D\cos\alpha=-v_\infty\cos\xi,\\
v_D\sin\alpha\cos\beta_1=l\omega_{r_{n-1}}+v_\infty\sin\xi\cos\eta_1,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2=-l\omega_{r_{n-2}}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}=\\
=(-1)^{n+1}l\omega_{r_2}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-2},\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}=(-1)^n l\omega_{r_1}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-2}.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

И далее, образуется вторая группа кинематических уравнений:

$$
\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \dots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix}=T_{1,2}(\eta_{n-2})\circ T_{2,3}(\eta_{n-3})\circ\ldots\circ
$$

$$
\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2)T_{n-2,n-1}(\eta_1)\begin{pmatrix}(-1)^n\dot\eta_{n-2}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}\\ (-1)^{n+1}\dot\eta_{n-3}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot\eta_2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\\ -\dot\eta_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\\ \dot\xi\end{pmatrix}.
\tag{2.5}
$$

Сразу же заметим, что система (2.2), в силу имеющейся динамической симметрии

$$
I_2=\ldots=I_n,
\tag{2.6}
$$

обладает $s=(n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$
\omega_{k_1}\equiv\omega^0_{k_1}=\mathrm{const},\ \ \dots,\ \ \omega_{k_s}\equiv\omega^0_{k_s}=\mathrm{const},\ \ s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.
\tag{2.7}
$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$
\omega^0_{k_1}=\ldots=\omega^0_{k_s}=0.
\tag{2.8}
$$

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является $(n-1)$-мерная сфера

$$
\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2}\ \mathrm{mod}\ 2\pi\},
\tag{2.9}
$$

а фазовым пространством — касательное расслоение $(n-1)$-мерной сферы

$$\begin{gathered} T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(\dot{\xi},\dot{\eta}_1,\ldots,\dot{\eta}_{n-2};\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}: \\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Теорема 2.1. *Совместные уравнения (2.2), (2.4), (2.5) при выполнении условий (2.6)–(2.8), (1.4), (1.8) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (2.10) $(n-1)$-мерной сферы (2.9).*

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_*=ln_0,\ \ n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\ \ H_{1*}=\frac{h_1B}{(n-2)I_2n_0},\ \ <\cdot>=n_0v_\infty<'>, \tag{2.11}$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} \xi''+(b_*-H_{1*})\xi'\cos\xi+\sin\xi\cos\xi- \\ -\left[\eta_1'^2+\eta_2'^2\sin^2\eta_1+\eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2+\right. \\ \left.+\ldots+\eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}=0, \\ \eta_1''+(b_*-H_{1*})\eta_1'\cos\xi+\xi'\eta_1'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}- \\ -\left[\eta_2'^2+\eta_3'^2\sin^2\eta_2+\eta_4'^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3+\right. \\ \left.+\ldots+\eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1=0, \\ \eta_2''+(b_*-H_{1*})\eta_2'\cos\xi+\xi'\eta_2'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+ \\ +2\eta_1'\eta_2'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}- \\ -\left[\eta_3'^2+\eta_4'^2\sin^2\eta_3+\eta_5'^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4+\right. \\ \left.+\ldots+\eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2=0, \\ \eta_3''+(b_*-H_{1*})\eta_3'\cos\xi+\xi'\eta_3'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+ \\ +2\eta_1'\eta_3'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+2\eta_2'\eta_3'\tfrac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}- \\ -\left[\eta_4'^2+\eta_5'^2\sin^2\eta_4+\eta_6'^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5+\right. \\ \left.+\ldots+\eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{n-4}''+(b_*-H_{1*})\eta_{n-4}'\cos\xi+\xi'\eta_{n-4}'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+ \\ +2\eta_1'\eta_{n-4}'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\eta_{n-5}'\eta_{n-4}'\tfrac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}}- \\ -\left[\eta_{n-3}'^2+\eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4}=0, \\ \eta_{n-3}''+(b_*-H_{1*})\eta_{n-3}'\cos\xi+\xi'\eta_{n-3}'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+ \\ +2\eta_1'\eta_{n-3}'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\eta_{n-4}'\eta_{n-3}'\tfrac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}}- \\ -\eta_{n-2}'^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3}=0, \\ \eta_{n-2}''+(b_*-H_{1*})\eta_{n-2}'\cos\xi+\xi'\eta_{n-2}'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+ \\ +2\eta_1'\eta_{n-2}'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\eta_{n-3}'\eta_{n-2}'\tfrac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}}=0,\ \ b_*>0,\ \ H_{1*}>0. \end{gathered} \tag{2.12}$$

В частности, при $n=5$ имеем:

$$\begin{gathered} \xi''+(b_*-H_{1*})\xi'\cos\xi+\sin\xi\cos\xi- \\ -\left[\eta_1'^2+\eta_2'^2\sin^2\eta_1+\eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\right]\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}=0, \\ \eta_1''+(b_*-H_{1*})\eta_1'\cos\xi+\xi'\eta_1'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}-\left[\eta_2'^2+\eta_3'^2\sin^2\eta_2\right]\sin\eta_1\cos\eta_1=0, \\ \eta_2''+(b_*-H_{1*})\eta_2'\cos\xi+\xi'\eta_2'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\eta_1'\eta_2'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}-\eta_3'^2\sin\eta_2\cos\eta_2=0, \\ \eta_3''+(b_*-H_{1*})\eta_3'\cos\xi+\xi'\eta_3'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\eta_1'\eta_3'\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+2\eta_2'\eta_3'\tfrac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}=0, \\ b_*>0,\ \ H_{1*}>0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Вспомним для начала про группу переменных z:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}=T_{1,2}(\eta_{n-2})\circ T_{2,3}(\eta_{n-3})\circ\ldots\circ T_{n-2,n-1}(\eta_1)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\eta)$, $k=1,\ldots,n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \;\; m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta, \;\; m_{k+1,k} = \\ = -m_{k,k+1} = \sin\eta.$$

После же перехода от переменных z к промежуточным безразмерным переменным

$$\begin{gathered} z_k = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_k, \;\; k = 1, \ldots, n-2, \\ z_{n-1} = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin\xi, \end{gathered} \tag{2.16}$$

система (2.12) будет эквивалентна системе

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-1} - b_* \sin\xi, \tag{2.17}$$

$$Z'_{n-1} = -\sin\xi\cos\xi + \\ + (1 + b_* H_{1*})\, (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2) \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} Z_{n-1} \cos\xi, \tag{2.18}$$

$$Z'_{n-2} = -\,(1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - \\ -\,(1 + b_* H_{1*})\, (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2) \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + H_{1*} Z_{n-2} \cos\xi, \tag{2.19}$$

$$Z'_{n-3} = -\,(1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + (1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\ + (1 + b_* H_{1*})\, (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2) \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{1}{\sin\eta_1} \frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + H_{1*} Z_{n-3} \cos\xi, \tag{2.20}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_1 = -\,(1 + b_* H_{1*})\, Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{s-1}} \right\} + \\ + H_{1*} Z_1 \cos\xi, \tag{2.21}$$

$$\eta'_1 = -\,(1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-2} \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{2.22}$$

$$\eta'_2 = (1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-3} \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1}, \tag{2.23}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}\, (1 + b_* H_{1*})\, Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4}}, \tag{2.24}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}\, (1 + b_* H_{1*})\, Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}}, \tag{2.25}$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^{n-1} \{ (Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi \} \tag{2.26}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \;\; 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (2.17)–(2.25) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (2.17)–(2.24) порядка $2(n-1)-1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*})\, Z_4 - b_* \sin\xi, \tag{2.27}$$

$$Z'_4 = -\sin\xi\cos\xi + \\ + (1 + b_* H_{1*})\, (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} Z_4 \cos\xi, \tag{2.28}$$

$$Z'_3 = -\,(1 + b_* H_{1*})\, Z_3 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - \\ -\,(1 + b_* H_{1*})\, (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + H_{1*} Z_3 \cos\xi, \tag{2.29}$$

$$Z'_2 = -\,(1 + b_* H_{1*})\, Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + (1 + b_* H_{1*})\, Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}+H_{1*}Z_2\cos\xi, \tag{2.30}$$

$$Z_1'=-\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}+\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}-$$

$$-\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}+H_{1*}Z_1\cos\xi, \tag{2.31}$$

$$\eta_1'=-\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{2.32}$$

$$\eta_2'=\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{2.33}$$

$$\eta_3'=-\left(1+b_{*}H_{1*}\right)Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \tag{2.34}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^8:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \mod 2\pi\} \tag{2.35}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (2.27)–(2.34) по причине цикличности переменной η_3 выделяется независимая подсистема седьмого порядка (2.27)–(2.33), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем семимерном многообразии.

3. Полный список первых интегралов при любом конечном n

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (2.17)–(2.25) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (2.17)–(2.25) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1}\\ Z_{n-2}\\ \dots\\ Z_2\\ Z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} w_{n-1}\\ w_{n-2}\\ \dots\\ w_2\\ w_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1}=-Z_{n-1},\ \ w_{n-2}=\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2},\ \ w_{n-3}=\tfrac{Z_2}{Z_1},\\ w_{n-4}=-\tfrac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}},\ \ \ldots,\ \ w_2=-\tfrac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}},\ \ w_1=-\tfrac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}},\end{gathered} \tag{3.1}$$

система (2.17)–(2.25) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{gathered} \xi'=-(1+b_*H_{1*})w_{n-1}-b_*\sin\xi,\\ w_{n-1}'=\sin\xi\cos\xi-(1+b_*H_{1*})w_{n-2}^2\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}+H_{1*}w_{n-1}\cos\xi,\\ w_{n-2}'=(1+b_*H_{1*})w_{n-2}w_{n-1}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}+H_{1*}w_{n-2}\cos\xi,\end{gathered}\right\} \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{gathered} w_s'=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\tfrac{1+w_s^2}{w_s}\tfrac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\\ \eta_s'=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}),\ \ s=1,\ldots,n-3,\end{gathered}\right\} \tag{3.3}$$

$$\eta_{n-2}'=d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}), \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})=\\ =-(1+b_*H_{1*})Z_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})=\\ =(1+b_*H_{1*})Z_{n-3}(w_{n-1},\ldots,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})=\\ =(-1)^n(1+b_*H_{1*})Z_1(w_{n-1},\ldots,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}},\end{gathered} \tag{3.5}$$

при этом

$$Z_k=Z_k(w_{n-1},\ldots,w_1),\ \ k=1,\ldots,n-2, \tag{3.6}$$

— функции в силу замены (3.1).

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\left.\begin{array}{c}\xi' = -(1+b_*H_{1*})w_4 - b_*\sin\xi,\\ w_4' = \sin\xi\cos\xi - (1+b_*H_{1*})w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}w_4\cos\xi,\\ w_3' = (1+b_*H_{1*})w_3w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}w_3\cos\xi,\end{array}\right\} \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\\ \eta_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3),\end{array}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_1' = d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\ \eta_1' = d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3),\end{array}\right\} \tag{3.9}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3), \tag{3.10}$$

где

$$\begin{array}{c} d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi} = \\ = \mp\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1} = \\ = \pm\frac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1},\\ d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2} = \\ = \mp\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2},\end{array} \tag{3.11}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ \ k=1,2,3, \tag{3.12}$$

— функции в силу замены (3.1).

Система (3.2)–(3.4) рассматривается на касательном расслоении

$$\begin{array}{c} T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}\end{array} \tag{3.13}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

В частности, система (3.7)–(3.10) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^8:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\} \tag{3.14}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (3.2)–(3.4) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (3.2), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (3.3) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (3.4) на η_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (3.7)–(3.10) выделяется независимая подсистема третьего порядка (3.7), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (3.8), (3.9) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (3.10) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (3.2)–(3.4) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.2), по одному — для систем (3.3) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (3.4) (*т. е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (3.7)–(3.10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.7), по одному — для систем (3.8), (3.9) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (3.10) (*т. е. всего пять*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (3.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{array}{c}\frac{dw_{n-1}}{d\xi} = \frac{\sin\xi\cos\xi-(1+b_*H_{1*})w_{n-2}^2\cos\xi/\sin\xi+H_{1*}w_{n-1}\cos\xi}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1}-b_*\sin\xi},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\xi} = \frac{(1+b_*H_{1*})w_{n-2}w_{n-1}\cos\xi/\sin\xi+H_{1*}w_{n-2}\cos\xi}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1}-b_*\sin\xi}.\end{array} \tag{3.15}$$

Используя замену $\tau=\sin\xi$, перепишем систему (3.15) в алгебраическом виде

$$\begin{array}{c}\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau-(1+b_*H_{1*})w_{n-2}^2/\tau+H_{1*}w_{n-1}}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1}-b_*\tau},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \frac{(1+b_*H_{1*})w_{n-2}w_{n-1}/\tau+H_{1*}w_{n-2}}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1}-b_*\tau}.\end{array} \tag{3.16}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1}=u_2\tau,\ \ w_{n-2}=u_1\tau, \tag{3.17}$$

приводим систему (3.16) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau\tfrac{du_2}{d\tau}+u_2 &= \tfrac{1-(1+b_*H_{1*})u_1^2+H_{1*}u_2}{-(1+b_*H_{1*})u_2-b_*},\\ \tau\tfrac{du_1}{d\tau}+u_1 &= \tfrac{(1+b_*H_{1*})u_1u_2+H_{1*}u_1}{-(1+b_*H_{1*})u_2-b_*}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau\tfrac{du_2}{d\tau} &= \tfrac{(1+b_*H_{1*})(u_2^2-u_1^2)+(b_*+H_{1*})u_2+1}{-(1+b_*H_{1*})u_2-b_*},\\ \tau\tfrac{du_1}{d\tau} &= \tfrac{2(1+b_*H_{1*})u_1u_2+(b_*+H_{1*})u_1}{-(1+b_*H_{1*})u_2-b_*}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Сопоставим системе второго порядка (3.19) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-(1+b_*H_{1*})(u_1^2-u_2^2)+(b_*+H_{1*})u_2}{2(1+b_*H_{1*})u_1u_2+(b_*+H_{1*})u_1}, \tag{3.20}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+b_*H_{1*})(u_2^2+u_1^2)+(b_*+H_{1*})u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{3.21}$$

Итак, уравнение (3.20) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+b_*H_{1*})(u_2^2+u_1^2)+(b_*+H_{1*})u_2+1}{u_1}=C_1=\text{const}, \tag{3.22}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\xi)= \\ =\frac{(1+b_*H_{1*})(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)+(b_*+H_{1*})w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi}=C_1=\text{const}. \tag{3.23}$$

Замечание 3.1. *Рассмотрим систему (3.2) с переменной диссипацией с нулевым средним [6, 7, 8], становящейся консервативной при $b_*=H_{1*}$:*

$$\begin{aligned} \xi' &= -(1+b_*^2)w_{n-1}-b_*\sin\xi,\\ w_{n-1}' &= \sin\xi\cos\xi-(1+b_*^2)w_{n-2}^2\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}+b_*w_{n-1}\cos\xi,\\ w_{n-2}' &= (1+b_*^2)w_{n-2}w_{n-1}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}+b_*w_{n-2}\cos\xi. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b_*^2)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)+2b_*w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi=C_1^*=\text{const}, \tag{3.25}$$

$$w_{n-2}\sin\xi=C_2^*=\text{const}. \tag{3.26}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.25), (3.26) также является первым интегралом системы (3.24). Но при $b_*\neq H_{1*}$ каждая из функций

$$(1+b_*H_{1*})(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)+(b_*+H_{1*})w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi \tag{3.27}$$

и (3.26) по отдельности не является первым интегралом системы (3.2). Однако отношение функций (3.27), (3.26) является первым интегралом системы (3.2) при любых b_*, H_{1*}.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.2). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.22) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2+\frac{b_*+H_{1*}}{2(1+b_*H_{1*})}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+b_*H_{1*})}\right)^2=\frac{(b_*-H_{1*})^2+C_1^2-4}{4(1+b_*H_{1*})^2}. \tag{3.28}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_*-H_{1*})^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{3.29}$$

и фазовое пространство системы (3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.28).

Таким образом, в силу соотношения (3.22) первое уравнение системы (3.19) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+b_*H_{1*})u_2^2+2(b_*+H_{1*})u_2+2-C_1U_1(C_1,u_2)}{-b_*-(1+b_*H_{1*})u_2}, \tag{3.30}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2(1+b_*H_{1*})}\{C_1\pm U_2(C_1,u_2)\}, \tag{3.31}$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_* H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.29).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.2) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - (1 + b_* H_{1*})u_2)du_2}{A}, \tag{3.32}$$

$$A = 2(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_* H_{1*})u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1 + b_* H_{1*})).$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{3.33}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})} = r_1, \;\; b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4, \tag{3.34}$$

то правая часть равенства (3.32) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}} +$$

$$+(b_* - H_{1*})(1 + b_* H_{1*})\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{-b_* + H_{1*}}{2} I_1, \tag{3.35}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \;\; r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}. \tag{3.36}$$

При вычислении интеграла (3.36) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\times$$

$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{3.37}$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{3.38}$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{3.39}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin\xi} + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}, \tag{3.40}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\times$$

$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \pm 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\times$$

$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \mp 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{3.41}$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2.$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-(b_*-H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.42}$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2.$

$$I_1 = \mp\frac{2(1+b_*H_{1*})r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.43}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.2) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.2. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.22).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.44}$$

Итак, найдены два первых интеграла (3.23), (3.44) независимой системы третьего порядка (3.2). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (3.3) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (3.4).

Действительно, искомые первые интегралы имеют вид

$$\Theta''_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{3.45}$$

$$\Theta''_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) =$$
$$= \eta_{n-2} \pm \mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const}, \tag{3.46}$$

при этом в левую часть равенства (3.46) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (3.45) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 3.1. *Система (3.2)–(3.4) порядка $2(n-1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов (3.23), (3.44), (3.45), (3.46).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.2)–(3.4) имеет n первых интегралов, выражающихся соотношениями (3.23), (3.44), (3.45), (3.46) (при этом используются выражения (3.32)–(3.43)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 3.2. *Три группы соотношений (2.2), (2.4), (2.5) при условиях (2.6)–(2.8), (1.4), (1.8) обладают n первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

4. Топологические аналогии

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи

$$v \equiv \mathrm{const}. \tag{4.1}$$

В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right\},$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) +\right.$$

$$
+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\Bigg\}-
$$

$$
-\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),
$$

$$
\dot z_{n-3}=z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+
$$

$$
+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left[-z_{n-1}+z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+
$$

$$
+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^{s}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+
$$

$$
+\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{4.2}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\dot z_1=\dot\beta_{n-2}(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2}+\omega_{r_2}\cos\beta_{n-2})+
$$

$$
+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=
$$

$$
=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+
$$

$$
+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\times
$$

$$
\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+
$$

$$
+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),
$$

$$
\dot\beta_1=z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),
$$

$$
\dot\beta_2=-z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\dot\beta_{n-2}=(-1)^{n+1}z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+
$$

$$
+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),
$$

где

$$
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)),
$$

$$
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)),
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{4.3}
$$

$$
\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)),
$$

$$
\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)),
$$

а функция $\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right)$ представляется в виде

$$
\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=|\mathbf{r}_N|=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}))=
$$

$$
=0\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\sum_{s=2}^{n}x_{sN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}). \tag{4.4}
$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$, $s=1,\ldots,n$, $(i_{1N}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},\ldots,x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha=\pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (4.1)).

При выполнении условий (1.4), (1.8) система (4.2) примет вид

$$\alpha' = -(1+bH_1)\,Z_{n-1}+b\sin\alpha, \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-\\ -(1+bH_1)\,(Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-H_1Z_{n-1}\cos\alpha,\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2}=(1+bH_1)\,Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +(1+bH_1)\,(Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-H_1Z_{n-2}\cos\alpha,\end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3}=(1+bH_1)\,Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(1+bH_1)\,Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\ -(1+bH_1)\,(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}-H_1Z_{n-3}\cos\alpha,\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered}Z'_1=(1+bH_1)\,Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}-\\ -H_1Z_1\cos\alpha,\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\beta'_1=(1+bH_1)\,Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4.10}$$

$$\beta'_2=-(1+bH_1)\,Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{4.11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_{n-3}=(-1)^n\,(1+bH_1)\,Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{4.12}$$

$$\beta'_{n-2}=(-1)^{n+1}\,(1+bH_1)\,Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{4.13}$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (2.11):

$$\begin{gathered}b=\sigma n_0,\;\; n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\;\; H_1=\frac{h_1B}{(n-2)I_2n_0},\;\; z_k=n_0vZ_k,\;\; k=1,\ldots,n-1,\\ <\cdot>=n_0v<'>.\end{gathered} \tag{4.14}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha'=-(1+bH_1)\,Z_4+b\sin\alpha, \tag{4.15}$$

$$Z'_4=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)\,(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-H_1Z_4\cos\alpha, \tag{4.16}$$

$$Z'_3=(1+bH_1)\,Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(1+bH_1)\,(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-H_1Z_3\cos\alpha, \tag{4.17}$$

$$\begin{gathered}Z'_2=(1+bH_1)\,Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(1+bH_1)\,Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\ -(1+bH_1)\,Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}-H_1Z_2\cos\alpha,\end{gathered} \tag{4.18}$$

$$\begin{gathered}Z'_1=(1+bH_1)\,Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(1+bH_1)\,Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\\ +(1+bH_1)\,Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}-H_1Z_1\cos\alpha,\end{gathered} \tag{4.19}$$

$$\beta'_1=(1+bH_1)\,Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4.20}$$

$$\beta'_2=-(1+bH_1)\,Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{4.21}$$

$$\beta'_3=(1+bH_1)\,Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{4.22}$$

Теорема 4.1. *Система (4.5)–(4.13) (для свободного тела) эквивалентна системе (2.17)–(2.25) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha,\ \ \eta_1 = \beta_1,\ \ \ldots,\ \ \eta_{n-2} = \beta_{n-2},\ \ b_* = -b,\ \ H_{1*} = -H_1, \tag{4.23}$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k,\ \ k = 1, \ldots, n-1$.

Для полного интегрирования системы (4.5)–(4.13) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы (4.15)–(4.22) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов). Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} w_{n-1} = Z_{n-1},\ \ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2},\ \ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \\ w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}},\ \ \ldots,\ \ w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}},\ \ w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}}, \end{array} \tag{4.24}$$

система (4.5)–(4.13) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -(1+bH_1)w_{n-1} + b\sin\alpha, \\ w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \\ w'_{n-2} = (1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{4.25}$$

$$\left.\begin{array}{c} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),\ \ s = 1, \ldots, n-3, \end{array}\right\} \tag{4.26}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{4.27}$$

где

$$\begin{array}{c} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (1+bH_1)Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = -(1+bH_1)Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{array} \tag{4.28}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1),\ \ k = 1, \ldots, n-2, \tag{4.29}$$

— функции в силу замены (4.24).

В частности, при $n = 5$ система (4.15)–(4.22) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -(1+bH_1)w_4 + b\sin\alpha, \\ w'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_4\cos\alpha, \\ w'_3 = (1+bH_1)w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_3\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{4.30}$$

$$\left.\begin{array}{c} w'_2 = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta'_2 = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{array}\right\} \tag{4.31}$$

$$\left.\begin{array}{c} w'_1 = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta'_1 = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{array}\right\} \tag{4.32}$$

$$\beta'_3 = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{4.33}$$

где

$$\begin{array}{c} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1+bH_1)Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \\ = \pm(1+bH_1)\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = -(1+bH_1)Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} = \\ = \mp(1+bH_1)\frac{w_2 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = (1+bH_1)Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} = \\ = \pm(1+bH_1)\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{array} \tag{4.34}$$

при этом
$$Z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \;\; k = 1, 2, 3, \tag{4.35}$$
— функции в силу замены (4.24).

Система (4.25)–(4.27) рассматривается на касательном расслоении
$$\begin{gathered}T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \beta_{n-2} \mod 2\pi\}\end{gathered} \tag{4.36}$$
$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \; 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \beta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

В частности, система (4.30)–(4.33) рассматривается на касательном расслоении
$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^8 : \; 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \beta_2 \leqslant \pi, \;\; \beta_3 \mod 2\pi\} \tag{4.37}$$
четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^4 : \; 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \beta_2 \leqslant \pi, \;\; \beta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (4.25)–(4.27) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.25), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (4.26) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (4.27) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (4.30)–(4.33) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.30), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (4.31), (4.32) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (4.33) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.25)–(4.27) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.25), по одному — для систем (4.26) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.27) (*т. е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (4.30)–(4.33) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.30), по одному — для систем (4.31), (4.32) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.33) (*т. е. всего пять*).

Следствие 4.1.

1. *Угол атаки α и углы $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ закрепленного маятника.*

2. *Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.*

3. *Первые интегралы системы (4.25)–(4.27) могут быть автоматически получены через равенства (3.23), (3.44), (3.45), (3.46) после подстановок (4.23) (см. также [9]):*

$$\begin{gathered}\Theta_1'(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \\ = \frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{4.38}$$

$$\Theta_2'(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{4.39}$$

$$\Theta_{s+2}''(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \;\; s = 1, \ldots, n-3, \tag{4.40}$$

$$\begin{gathered}\Theta_n''(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \\ = \beta_{n-2} \pm \mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{4.41}$$

при этом в левую часть равенства (4.41) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (4.40) при $s = n-4, n-3$.

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т. е. когда выполнено свойство
$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \tag{4.42}$$
($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс), поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:
$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{4.43}$$

В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{4.44}$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -Z_{n-1} + \sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right) \sin\alpha + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \cos\alpha \cdot \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - \\ - \frac{T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha,\end{gathered} \tag{4.45}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1} = \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \left\{\sum_{s=1}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right)\right\} - \\ - Z_{n-1} \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{4.46}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2} = Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \times \\ \times \left\{Z_{n-1} \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) + \right. \\ \left. + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} - \\ - \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - Z_{n-2} \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{4.47}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3} = Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \{\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \left[-Z_{n-1} + Z_{n-2} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right] + \\ + \sum_{s=3}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\} + \\ + \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - Z_{n-3} \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{4.48}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered}Z'_1 = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{\sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \\ \left\{\sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + (-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - Z_1 \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{4.49}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right), \tag{4.50}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1} \Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right), \tag{4.51}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} +$$

$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right), \tag{4.52}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z)=-\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)+$$
$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{4.53}$$

Тогда, в силу условий (4.42), (1.4), (1.8), (4.14) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.45)–(4.52)) примет вид аналитической системы

$$\alpha'=-Z_{n-1}+b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{4.54}$$

$$Z'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-1}\cos\alpha, \tag{4.55}$$

$$Z'_{n-2}=(1+bH_1)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-2}\cos\alpha, \tag{4.56}$$

$$Z'_{n-3}=(1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-$$
$$-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-3}\cos\alpha, \tag{4.57}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z'_1=(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_1Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_1\cos\alpha, \tag{4.58}$$

$$\beta'_1=(1+bH_1)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4.59}$$

$$\beta'_2=-(1+bH_1)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{4.60}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta'_{n-3}=(-1)^n(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{4.61}$$

$$\beta'_{n-2}=(-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{4.62}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1=n_0. \tag{4.63}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - \\ -bH_1Z_4\cos^2\alpha, \tag{4.64}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bZ_4(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1Z_4^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_4\cos\alpha, \tag{4.65}$$

$$Z_3' = (1+bH_1)Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ +bZ_3(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1Z_3Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_3\cos\alpha, \tag{4.66}$$

$$Z_2' = (1+bH_1)Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -(1+bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ +bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1Z_2Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \tag{4.67}$$

$$Z_1' = (1+bH_1)Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ +(1+bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ +bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1Z_1Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{4.68}$$

$$\beta_1' = (1+bH_1)Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4.69}$$

$$\beta_2' = -(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{4.70}$$

$$\beta_3' = (1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{4.71}$$

Для полного интегрирования системы (4.54)–(4.62) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (4.24) система (4.54)–(4.62) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - \\ -bH_1w_{n-1}\cos^2\alpha, \\ w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_{n-1}\cos\alpha, \\ w_{n-2}' = (1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_{n-2}\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{4.72}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_s' = d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_1^s}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\ \ s=1,\ldots,n-3, \end{array}\right\} \tag{4.73}$$

$$\beta_{n-2}' = d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_2), \tag{4.74}$$

где выполнены условия (4.28).

В частности, при $n=5$ система (4.64)–(4.71) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - \\ -bH_1w_4\cos^2\alpha, \\ w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1w_4^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_4\cos\alpha, \\ w_3' = (1+bH_1)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +bH_1w_3w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_3\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{4.75}$$

$$\left.\begin{array}{r} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{array}\right\} \tag{4.76}$$

$$\left.\begin{array}{r} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{array}\right\} \tag{4.77}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{4.78}$$

где выполнены условия (4.34).

Система (4.72)–(4.74) рассматривается на касательном расслоении (4.36) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}: \ 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3} \leqslant \pi, \ \beta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

В частности, система (4.75)–(4.78) рассматривается на касательном расслоении (4.37) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^4: \ 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \beta_2 \leqslant \pi, \ \beta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (4.72)–(4.74) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.72), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (4.73) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (4.74) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (4.75)–(4.78) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.75), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (4.76), (4.77) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (4.78) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.72)–(4.74) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.72), по одному — для систем (4.73) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.74) (*т. е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (4.75)–(4.78) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.75), по одному — для систем (4.76), (4.77) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.78) (*т. е. всего пять*).

Если вопрос о первых интегралах системы (4.5)–(4.13) (или (4.25)–(4.27)) решается с помощью следствия 4.1, то аналогичный вопрос для системы (4.54)–(4.62) (или (4.72)–(4.74)) решает следующая теорема 4.2.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (4.72) имеет следующий вид:

$$\Theta_1''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) =$$

$$= \frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{4.79}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.72), используя при этом первый интеграл (4.79). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha, \ \ w_{n-1} = u_2\tau, \ \ w_{n-2} = u_1\tau, \ \ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{4.80}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \tag{4.81}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0. \tag{4.82}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (4.81) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (4.81), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \ \ C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \ \ A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$

$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1u_2 - 1)}, \quad C = \text{const}. \tag{4.83}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{4.84}$$

используя при этом обозначения и замены (4.80).

Итак, найдены два первых интеграла (4.79), (4.84) независимой системы третьего порядка (4.72). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (4.73) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.74).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (4.40), (4.41), а именно:

$$\Theta_{s+2}'(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \tag{4.85}$$

$$\Theta_n'(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) =$$

$$= \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}, \tag{4.86}$$

при этом в левую часть равенства (4.86) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (4.85) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 4.2. *n первых интегралов (4.79), (4.84), (4.85), (4.86) системы (4.72)–(4.74) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 4.3. *n первых интегралов (4.79), (4.84), (4.85), (4.86) системы (4.72)–(4.74) эквивалентны n первым интегралам (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) системы (4.25)–(4.27).*

Действительно, пары первых интегралов (4.79), (4.38), (4.85), (4.40) и (4.86), (4.41) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k, $k = 1, \dots, n-1$, для системы (4.72)–(4.74) с фазовыми переменными w_k, $k = 1, \dots, n-1$, для системы (4.25)–(4.27). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (4.84), (4.39), не приводим ввиду громоздкости изложения (см. также [10, 11, 12]).

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

2) Движение многомерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [13; 14].

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=vsgu&option_lang=rus&paperid=486&wshow=paper.

[2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.

[3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. Динамические системы. 2013. С. 5–254.

[4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41. URL: http://docme.ru/doc/1679357/nekotorye-usloviya-integriruemosti-dinamicheskih-sistem-v-t...

[5] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172. URL: http://shamolin2.imec.msu.ru/art-233-2.pdf. DOI: 10.7868/S0869565217320081.

[6] Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 533–536. DOI: 10.1134/S1028335815040060.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=1332&option_lang=rus.

[10] Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // Доклады РАН. 2015. Т. 460. № 2. С. 165–169. DOI: 10.7868/S0869565215020127.

[11] Шамолин М.В. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49. DOI: 10.7868/S0869565213230126.

[12] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551. DOI: 10.7868/S0869565216350115.

[13] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181. URL: http://www.mathnet.ru/links/571bc112f52d6d616bb2966029543696/into208.pdf.

[14] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523. DOI: 10.7868/S0869565217230098.

References

[1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=vsgu&option_lang=rus&paperid=486&wshow=paper [in Russian].

[2] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika v trekhmernom prostranstve* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=512&option_lang=rus [in Russian].

[3] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovremennaia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory* [Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.]. **V**ol. 125. Dynamical Systems, 2013, pp. 5–254. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=into&paperid=147&option_lang=rus [in Russian].

[4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Certain conditions of integrability of dynamical systems in transcedental functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2012, no. 9/1(110), pp. 35–41. Available at: http://docme.ru/doc/1679357/nekotorye-usloviya-integriruemosti-dinamicheskih-sistem-v-t... [in Russian].

[5] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii trekhmernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Three-Dimensional Manifold] *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2017, **V**ol. 477, no. 2, pp. 168–172. Available at: http://shamolin2.imec.msu.ru/art-233-2.pdf. DOI: 10.7868/S0869565217320081 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. *Polnyi spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravnenii dvizheniia mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Complete List of First Integrals of Dynamic Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2015, **V**ol. 461, no. 5, pp. 533–536. DOI: 10.1134/S1028335815040060 [in Russian].

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspect in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].

[8] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetric spaces automorphysm groups]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2010, **V**ol. 16, issue 4, pp. 3–229. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=1332&option_lang=rus [in Russian].

[10] Shamolin M.V. *Mnogomernyi maiatnik v nekonservativnom silovom pole* [A Multidimensional Pendulum in a Nonconservative Force Field]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2015, **V**ol. 460, no. 2, pp. 165–169. DOI: 10.7868/S0869565215020127 [in Russian].

[11] Shamolin M.V. *Novyi sluchai integriruemosti v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2013, **V**ol. 453, no. 1, pp. 46–49. DOI: 10.7868/S0869565213230126 [in Russian].

[12] Shamolin M.V. Novye sluchai integriruemosti sistem s dissipatsiei na kasatel'nykh rassloeniiakh k dvumernoi i trekhmernoi sferam [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Two- and Three-Dimensional Spheres]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2016, **V**ol. 471, no. 5, pp. 547–551. DOI: 10.7868/S0869565216350115 [in Russian].

[13] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoi sfere* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2017, **V**ol. 474, no. 2, pp. 177–181. Available at: http://www.mathnet.ru/links/571bc112f52d6d616bb2966029543696/into208.pdf [in Russian].

[14] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2017, **V**ol. 475, no. 5, pp. 519–523. DOI: 10.7868/S0869565217230098 [in Russian].

M.V. Shamolin[2]

ON A PENDULUM MOTION IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE. PART 3. DEPENDENCE OF FORCE FIELDS ON THE TENSOR OF ANGULAR VELOCITY

In the proposed cycle of work, we study the equations of motion of dynamically symmetric fixed n-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of motion of a free n-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. In this work, we study that case when the force fields linearly depend on the tensor of angular velocity.

Key words: multi-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Citation. Shamolin M.V. *O dvizhenii maiatnika v mnogomernom prostranstve. Chast' 3. Zavisimost' polia sil ot tenzora uglovoi skorosti* [On a pendulum motion in multi-dimensional space. Part 3. Dependence of force fields on the tensor of angular velocity]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 33–54. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-33-54 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 27/V/2018.
The article received 27/V/2018.

[2] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.