УДК 519.999 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-18-23

А.В. Дюжева[1]

О ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ IV ПОРЯДКА

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка. Присутствующая в уравнении доминирующая смешанная производная позволила интерпретировать поставленную задачу как аналог задачи Гурса. Получены условия на коэффициенты уравнения и входные данные, гарантирующие существование единственного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, нелокальное условие, задача Гурса, принцип сжатых отображений.

Цитирование. Дюжева А.В. О задаче с нелокальными условиями для уравнений IV порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 18–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-18-23.

Введение

К настоящему времени краевые и нелокальные задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка достаточно хорошо изучены, многие постановки задач для них давно стали классическими и вошли в учебники по математической физике. Однако многие процессы современного естествознания при математическом моделировании приводят к уравнениям более высокого порядка. Например, математическая модель стержня Рэлея [16], описывающая продольные колебания толстого короткого стержня с учетом поперечного движения стержня, уравнение Кортевега - де Фриза [13], моделирующее процесс распространения длинных волн на поверхности воды, уравнения, описывающие нестационарные волны в стратифицированных и вращающихся жидкостях [5], уравнение Л. Бианки [1], используемое при описании явлений фильтрации и ионно-звуковых волн в плазме [4]. При этом часто оказывается, что одна и та же задача описывает одновременно несколько разных явлений. Примеры явлений, математические модели которых основаны на уравнениях высокого порядка, приведены также в монографии [10].

Особое место среди уравнений порядка выше второго занимают уравнения соболевского типа. Начало в исследовании таких уравнений положил С.Л. Соболев в своей работе [14]. Интересно отметить, что для некоторых уравнений соболевского типа естественно ставить как начально-краевые задачи [12], так и задачи типа Гурса [8]. Одним из первых, кого заинтересовали задачи типа задачи Гурса для уравнений высокого порядка, был В.И. Жегалов [6]. В дальнейшем исследования продолжили его ученики, отметим работу [7] и список литературы в ней. В этой связи отметим, что в литературе часто такие уравнения называются уравнениями с доминирующей смешанной производной. Так же задачами для таких уравнений активно занимается Замышляева А.А. с соавторами [9] и список литературы там.

В большинстве упомянутых работ рассмотрены задачи типа Гурса, в которых условия заданы на части границы области. В последнее время для уравнений с доминирующей производной стали активно изучаться также и нелокальные задачи. В работе [3] для доказательства разрешимости задачи для уравнения четвертого порядка вводится понятие обобщенного решения и доказывается его существование и единственность в выбранном пространстве.

В предлагаемой работе рассмотрена нелокальная задача с интегральным граничным условием для модифицированного уравнения Буссинеска-Лява, моделирующего продольные колебания упругого стержня с учетом поперечной инерции и при внешнем воздействии. Для такого уравнения можно поставить

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

как смешанную задачу, так и при условии что $b(x,t) \neq 0$ задачу Гурса, что и было сделано в предлагаемой работе. Заметим, что для уравнения второго порядка задача с нелокальными условиями типа Стеклова [15] была изучена в работе [2].

1. Постановка задачи

В ограниченной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - a(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1.1}$$

и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$

и условиям

$$u(0,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$u_x(0,t) = \int_0^l G(x)u(x,t)dx. \tag{1.4}$$

Заметим, что второе из условий (1.4) является нелокальным.

2. Разрешимость задачи

Будем считать, что выполняются следующие условия:
$H1$. $a(x,t) \in C(\bar{Q}_T),\ b(x,t) \in C(\bar{Q}_T),\ c(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$;
$H2$. $b(x,t) \neq 0,\ \forall (x,t) \in Q_T$;
$H3$. $f(x,t) \in C(\bar{Q}_T),\ G(x) \in C([0,l])$.
Из условий $H1$ и $H3$ следует, что $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ ограничены в $\bar{Q}_T$, а $G(x)$ на сегменте $[0,l]$. Условие $H2$ позволяет записать уравнение (1.1) в виде

$$u_{xxtt} = B(x,t)u_{tt} - A(x,t)u_{xx} + C(x,t)u - F(x,t), \tag{2.1}$$

где $B(x,t) = \frac{1}{b(x,t)},\ A(x,t) = \frac{a(x,t)}{b(x,t)},\ C(x,t) = \frac{a(x,t)}{b(x,t)},\ F(x,t) = \frac{f(x,t)}{b(x,t)}$.

Обозначим $\tilde{C}(Q_T) = \{u : u \in C^2(Q_T), u_{xxtt} \in C(Q_T)\}$.

Лемма. Если выполняются условия

$$\int_0^l G^2(\xi)u(\xi,t)d\xi < \frac{3}{l^3} \quad \text{и} \quad l^3 > 1,$$

задача (1.1)–(1.4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u = x\int_0^l Gudx + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^x \int_0^\xi (Bu_{tt} - Au_{xx} + Cu - F)d\xi' d\xi d\tau' d\tau. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)-(1.4), $u \in \tilde{C}(Q_T)$. Тогда очевидно, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Действительно, интегрируя равенство (2.1) и учитывая (1.2) и (1.4), получим (2.2).

Пусть теперь $u \in \tilde{C}(Q_T)$ и удовлетворяет (2.2). Дифференцируя дважды по t и дважды по x, получим (2.1).

Покажем, что выполняются условия (1.2)–(1.4).

При $t = 0$ из (2.2) получаем однородное уравнение Фредгольма:

$$u(x,0) = \int_0^l xG(\xi)u(\xi,0)d\xi. \tag{2.3}$$

Ядро $K(x,\xi) = xG(\xi)$ уравнения (2.3) вырожденное. Поэтому для отыскания его решения, замечая, что

$$\int_0^l xG(\xi)u(\xi,0)d\xi = C,$$

приходим к представлению

$$u = Cx.$$

Очевидно, что постоянная C может быть найдена из равенства

$$C\int_0^l G(\xi)\xi d\xi = C,$$

что в силу условий леммы приводит к утверждению $C=0$, следовательно, $u(x,0)=0$.

Продифференцировав (2.2) по t, а затем положив $t=0$, имеем

$$u_t(x,0)=\int_0^l xG(\xi)u_t(\xi,0)d\xi. \tag{2.4}$$

Рассуждая аналогично, получаем, что (2.4) имеет только нулевое решение, откуда следует, что $u_t(x,0)=$ $=0$.

Покажем, что выполняется граничное условие (1.4). Из (2.2) имеем

$$u_x(x,t)=\int_0^l Gudx+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^x(Bu_{tt}-Au_{xx}+Cu-F)d\xi d\tau' d\tau,$$

при $x=0$ получаем соотношение (1.4). Условие (1.3) очевидно.

Таким образом, выполняются начальные и граничные условия поставленной задачи (1.2)–(1.4).

Лемма доказана.

Обозначим

$$M=\max\{\max_{\bar{Q}_T}|A(x,t)|,\quad \max_{\bar{Q}_T}|B(x,t)|,\quad \max_{\bar{Q}_T}|C(x,t)|\},$$
$$\gamma=\max_{[0,l]}|G(x)|,\quad R=\max_{\bar{Q}_T}|F(x,t)|.$$

$C_p^2(Q_T)$ — класс функций $u(x,t)$, таких что $u(x,t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка в $\overline{Q}_T$ и

$$\max|u|\leqslant p,\ \max|u_{tt}|\leqslant p,\ \max|u_{xx}|\leqslant p.$$

$C_p^{2,4}(Q_T)$ — класс функций из $C_p^2(Q_T)$, имеющих u_{xxtt} непрерывные в Q_T.

Теорема. Если выполняется

$$2l^2p\gamma+k(T^2l^2+l^2+T^2)<p;$$
$$l^2\gamma+l^2MT<\frac{1}{3};\quad l^2\gamma+l^2M<\frac{1}{3};\quad T^2M<\frac{1}{3}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1)-(1.4) в $C_p^2(Q_T)$.

Доказательство. Зададим расстояние в $C^2(Q_T)$ формулой

$$\rho(u,\overline{u})=\max_{\bar{Q}_T}|u-\overline{u}|+\max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}-\overline{u}_{tt}|+\max_{\bar{Q}_T}|u_{xx}-\overline{u}_{xx}|.$$

Введем оператор

$$U(u)=x\int_0^l Gudx+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^x\int_0^\xi(Bu_{tt}-Au_{xx}+Cu-F)d\xi' d\xi d\tau' d\tau. \tag{2.5}$$

Обозначим для удобства $v(x,y)=U(u)$.

Пусть $\max_{\bar{Q}_T}|u|\leqslant p$, $\max_{\bar{Q}_T}|u_{xx}|\leqslant p$, $\max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}|\leqslant p$.

Из (2.2) легко следует, что

$$|v|\leqslant l^2\gamma p+T^2l^2k, \tag{2.6}$$

где $k=pM+R$.

Замечая, что

$$v_{tt}=x\int_0^l Gu_{tt}dx+\int_0^x\int_0^\xi(Bu_{tt}-Au_{xx}+Cu-F)d\xi' d\xi,$$
$$v_{xx}=\int_0^t\int_0^\tau(Bu_{tt}-Au_{xx}+Cu-F)d\tau' d\tau,$$

получим

$$|v_{tt}|\leqslant l^2\gamma p+l^2k, \tag{2.7}$$
$$|v_{xx}|\leqslant T^2k. \tag{2.8}$$

Из условий теоремы следует, что оператор U переводит замкнутый шар $\overline{S}(0,p)$ в себя.

Рассмотрим теперь

$$\max_{\bar{Q}_T}|v-\overline{v}|=\max_{\bar{Q}_T}|x\int_0^l G(u-\overline{u})dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^x\int_0^\xi [B(u_{tt}-\overline{u}_{tt})-A(u_{xx}-\overline{u}_{xx})+C(u-\overline{u})]d\xi' d\xi d\tau' d\tau| \leqslant$$
$$\leqslant l^2\gamma \max_{\bar{Q}_T}|u-\overline{u}| + MT^2l^2[\max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}-\overline{u}_{tt}|+ \tag{2.9}$$
$$+\max_{\bar{Q}_T}|u_{xx}-\overline{u}_{xx}| + \max_{\bar{Q}_T}|u-\overline{u}|] \leqslant L_1\rho(u,\overline{u}),$$

где $L_1 = l^2\gamma + MT^2l^2$. Аналогично оценим следующую разность

$$\max_{\bar{Q}_T}|v_{tt}-\overline{v}_{tt}| \leqslant l^2\gamma \max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}-\overline{u}_{tt}| + Ml^2[\max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}-\overline{u}_{tt}|+ \tag{2.10}$$
$$+\max_{\bar{Q}_T}|u_{xx}-\overline{u}_{xx}| + \max_{\bar{Q}_T}|u-\overline{u}|] \leqslant L_2\rho(u,\overline{u}),$$

где $L_2 = l^2(\gamma + M)$. Таким же образом оценим следующую разность

$$\max_{\bar{Q}_T}|v_{xx}-\overline{v}_{xx}| \leqslant MT^2[\max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}-\overline{u}_{tt}|+ \tag{2.11}$$
$$+\max_{\bar{Q}_T}|u_{xx}-\overline{u}_{xx}| + \max_{\bar{Q}_T}|u-\overline{u}|] \leqslant L_3\rho(u,\overline{u}),$$

где $L_3 = T^2M$.

Тогда получим

$$\rho(u,\overline{u}) \leqslant q\max_{\bar{Q}_T}|u-\overline{u}| + \max_{\bar{Q}_T}|u_{tt}-\overline{u}_{tt}| + \max_{\bar{Q}_T}|u_{xx}-\overline{u}_{xx}|,$$

где $q = \max\{l^2(\gamma + MT^2), l^2(\gamma + M), T^2M\}$. Из условий теоремы следует, что $q < 1$. Это означает, что оператор U сжимающий. Таким образом, выполнены условия принципа сжимающего отображения [11, с. 44], из чего следует, что существует единственное решение интегрального уравнения (2.2). Как было доказано в лемме, задача (1.1)–(1.4) эквивалентна интегральному уравнению (2.2). Из чего следует, что существует единственное решение и задачи (1.1)–(1.4).

Литература

[1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur. 1895. V. 4. P. 89–99, 133–142.

[2] Byszewski L. Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation $u_{xt} = F(x,t,u,u_x)$. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1990. V. 3. № 3. P. 163–168. URL: https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/HOA/JAMSA/Volume3_3/168.pdf. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/S1048953390000156.

[3] Бейлин А.Б. Пулькина Л.С. Задачи о колебаниях стержня с нелинейным затуханием второго порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2015. № 3(125). С. 9–20. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=462&option_lang=rus.

[4] Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: ФИЗМАТЛИТ. 1998. С. 448.

[5] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука. 1990. С. 344.

[6] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. о-во, 2001. С. 226.

[7] Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 385.

[8] Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 1. С. 93–97. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=10533&option_lang=rus.

[9] Замышляева А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска — Лява // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. Челябинск. 2011. № 37(254). Вып. 10. С. 22–29. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vyuru&paperid=182&option_lang=rus.

[10] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010. С. 237.

[11] Люстерник Л.А., Соболев С.Л. Элементы функционального анализа. М.: ФизМатЛит, 1965. С. 44.

[12] Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31. № 4. С. 592–604. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=zvmmf&option_lang=rus&paperid=2790&wshow=paper.

[13] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 313.

[14] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер.: Математика. 1954. № 18(86). С. 3–50. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid==3488&option_lang=rus.

[15] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.

[16] Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука // М.: ГИТТЛ. 1955. Т. 1. С. 273–274.

References

[1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore. *Rend Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur.*, 1895, Vol. 4, p. 89-99, 133–142 [in Italian].

[2] Byszewski L. Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation $u_{xt} = F(x,t,u,u_x)$. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 1990, Volume 3, Number 3, pp. 163–168. Available at: https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/HOA/JAMSA/Volume3_3/168.pdf. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/S1048953390000156 [in English].

[3] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadachi o kolebaniiakh sterzhnia s nelineinym zatukhaniem vtorogo poriadka* [Problem on vibration of a bar with nonlinear second-order boundary damping]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2015, no. 3(125), pp. 9–20. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=462&option_lang=rus [in Russian].

[4] Gabov S.A. *(*Novye zadachi matematicheskoi teorii voln) [New problems in the mathematical theory of waves]. M.: FizMatLit, 1998, pp. 448 [in Russian].

[5] Gabov S.A., Sveshnikov A.G. Lineinye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln [Linear problems in the theory of nonstationary internal waves]. M.: Nauka, 1990, p. 344.

[6] Zhegalov V.I., Mironov A.N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan: Kazanskoe matem. o-vo, 2001, p. 226 [in Russian].

[7] Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Dominant Partial Derivative]. Kazan: izd-vo Kazan. un-ta, 2014, p. 385 [in Russian].

[8] Zhegalov V.I., Utkina E.A. *Ob odnom uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka s tremia nezavisimymi peremennymi* [On a Fourth-Order Partial Differential Equation with Three Independent Variables]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2002, Vol. 38, no. 1, pp. 93–97. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=10533&option_lang=rusmbox [in Russian].

[9] Zamyshlyaeva A.A. *Nachal'no-konechnaia zadacha dlia neodnorodnogo uravneniia Bussineska — Liava* [The initial-finish value problem for nonhomogenious Boussinesque—Love equation]. Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie, 2011, Vol. 37 (254), Issue 10, pp. 22–29. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vyuru&paperid=182&option_lang=rus [in Russian].

[10] Korpusov P.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010, p. 237 [in Russian].

[11] Lyusternik L.A., Sobolev S.L. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. M.: FizMatLit, 1965, p. 44 [in Russian].

[12] Pletner U.D. *Fundamental'nye resheniia operatorov tipa Soboleva i nekotorye nachal'no-kraevye zadachi* [Fundamental solutions of operators of Sobolev type and some initial-boundary value problems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1991, Vol. 31, no. 4, pp. 592–604. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=zvmmf&option_lang=rus&paperid=2790&wshow=paper [in Russian].

[13] Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Lektsii po matematicheskoi fizike: ucheb. posobie* [Lectures on mathematical physics:textbook]. M.: Izd-vo MGU, 1993, p. 313 [in Russian].

[14] Sobolev S.L. *Ob odnoi novoi zadache matematicheskoi fiziki* [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiia AN SSSR. Ser.: Matematika* [Izvestiya: Mathematics], 1954, no. 18(86), pp. 3–50. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=3488&option_lang=rus [in Russian].

[15] Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1983 [in Russian].

[16] Rayleigh J.W.S. *Teoriia zvuka* [Theory of sound]. M.: GITTL, 1955, Vol. 1, pp. 273–274 [in Russian].

A.V. Dyuzheva[2]

ON A PROBLEM WITH NON-LOCAL CONDITIONS FOR THE EQUATIONS OF THE IV ORDER

The article deals with a non-local problem with an integral condition for pseudohyperbolic fourth order equation. The dominant mixed derivative which is presented in the equation allows to interpret the problem as an analogue of the Gurs problem. The conditions for the coefficients of the equation and the input data are obtained to ensure the existence of a single task's decision.

Key words: non-local problem, Sobolev type equation, Goursat problem, equation with dominant mixed derivative, integral conditions, Boussinesq-Love equations.

Citation. Dyuzheva A.V. *O zadache s nelokal'nymi usloviiami dlia uravnenii IV poriadka* [On a problem with non-local conditions for the equations of the IV order]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 18–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-18-23 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 4/*VI*/2018.
The article received 4/*VI*/2018.

[2]*Dyuzheva Alexandra Vladimirovna* (aduzheva@rambler.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.