МАТЕМАТИКА

УДК 517.946 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-7-17

А.И. Григорьева, А.И. Кожанов[1]

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ В СТАРШЕЙ ЧАСТИ И С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[2]

Изучается разрешимость краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений соболевского типа со знакопеременной функцией, которая имеет разрыв первого рода в точке ноль. Также данная функция меняет знак в зависимости от знака переменной x. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение. Устанавливается наличие необходимых априорных оценок для решений изучаемых задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, переменное направление эволюции, краевые задачи, дифференциальный оператор, регулярные решения, существование, единственность, априорные оценки.

Цитирование. Григорьева А.И., Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений составного типа с квазипараболическим оператором переменного направления эволюции в старшей части и с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 7–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-7-17.

1. Постановка задач

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач с внутренними условиями сопряжения (склейки) для дифференциальных уравнений соболевского (составного)типа

$$D_t\left((-1)^p D_t^{2p+1}u - Au\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

в которых $x \in (-1,1)$, $(t \in (0,T))$, $0 < T < +\infty$, p есть целое неотрицательное число, $D_t^{2p+1}u = \frac{\partial^{2p+1}}{\partial t^{2p+1}}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, A — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $u(x,t)$ определяется равенством

$$Au = \frac{\partial}{\partial x}(a_0(x)u_x) + a_1(x)u.$$

Особенностями изучаемых уравнений являются, во-первых, то, что функция $a_0(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, во-вторых же — то, что функция $a_0(x)$ имеет разные знаки при $x < 0$ и $x > 0$.

Наличие в уравнении (1) разрывного коэффициента влечет необходимость задания на линии разрыва условий сопряжения (склейки). Краевые задачи с условиями подобного рода достаточно хорошо изучены для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений второго порядка — см. работы [1–5], из работ последнего времени отметим статьи [6–13]. Отметим также следующее: условия сопряжения (склейки) естественным образом возникают при исследовании разрешимости краевых задач для уравнений смешанного и смешанно–составного типов, а также для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции — см. работы [14–24].

Григорьева Александра Ивановна (shadrina_ai@mail.ru), кафедра высшей математики, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, , 677000, Российская Федерация, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

Кожанов Александр Иванович (kozhanov@math.nsc.ru), Институт математики им. С.Л. Соболева, Сибирское отделение АН, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Академика Коптюга, 4.

[2]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18–51–41009.

Уравнение (1) при $p=0$ и в случае знакопостоянной функции $a_0(x)$ представляет собой уравнение соболевского типа называемое также псевдогиперболическим уравнением [25–27]; краевые задачи для таких уравнений достаточно хорошо изучены. Наоборот, если $a_0(x)$ есть разрывная знакопеременная функция, то как в случае $p=0$, так и в случае $p>0$ краевые задачи для уравнений (1) в такой ситуации ранее не изучались. Частично восполнить этот пробел и предполагают авторы в настоящей работе.

Уравнение (1) имеет модельный вид. Возможные обобщения представленных ниже результатов на более общие уравнения будут описаны в конце работы.

Пусть Q, Q^+, Q^- и Q_1 есть множества

$$Q=\{(x,t):\,-1<x<1,\ \ 0<t<T\},$$

$$Q^+=\{(x,t):\,0<x<1,\ \ 0<t<T\},\ \ Q^-=\{(x,t):\,-1<x<0,\ \ 0<t<T\},$$

$$Q_1=Q^+\cup Q^-.$$

Далее, пусть α и β есть заданные действительные числа, $a_0(x)$, $a_1(x)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x\in[-1,1]$ и $(x,t)\in\overline{Q}$ соответственно, причем для функции $a_0(x)$ выполняется условие

$$\begin{aligned}&a_0(x)\in C^1([0,1]),\ \ a_0(x)>0\ \ \textit{при}\ x\in[0,1],\ \ a_0(x)\in C^1([-1,0)),\\&a_0(x)<0\ \ \textit{при}\ x\in[-1,0),\ \ a_0(-0)=\lim_{x\to 0-0}a_0(x)<0.\end{aligned}\tag{A}$$

Всюду ниже будем рассматривать случай $p\geqslant 1$, о случае же $p=0$ скажем в конце работы.

Через D_t^k будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ (k — целое неотрицательное число, $D_t^1=D_t$).

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия*

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\quad t\in(0,T),\tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0,\,x\in(0,1)}=0,\quad k=0,\dots,p+1,\tag{3}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0,\,x\in(-1,0)}=0,\quad k=1,\dots,p,\tag{4}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T,\,x\in(0,1)}=0,\quad k=1,\dots,p,\tag{5}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T,\,x\in(-1,0)}=0,\quad k=0,\dots,p+1,\tag{6}$$

а также условия сопряжения

$$u(-0,t)=\alpha u(+0,t),\quad u_x(+0,t)=\beta u_x(-0,t),\quad t\in(0,T).\tag{7}$$

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3), (5) и (6), условия сопряжения (7), а также условия*

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0,\,x\in(-1,0)}=0,\quad k=p+2,\dots,2p+1.\tag{8}$$

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3), (4) и (6), условия сопряжения (7), а также условия*

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T,\,x\in(0,1)}=0,\quad k=p+2,\dots,2p+1.\tag{9}$$

Краевая задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3), (6), (8) и (9), а также условия сопряжения (7).*

Определим функциональное пространство, в котором будет установлено существование и единственность решений краевых задач I–IV.

Определим вначале пространства $V(Q^+)$ и $V(Q^-)$:

$$\begin{gathered}V(Q^+)=\{v(x,t):\,v(x,t)\in W_2^2(Q^+),\ \ D_tv_{xx}(x,t)\in L_2(Q^+),\\ D_t^{2p+2}v(x,t)\in L_2(Q^+)\},\\ V(Q^-)=\{v(x,t):\,v(x,t)\in W_2^2(Q^-),\ \ D_tv_{xx}(x,t)\in L_2(Q^-),\\ D_t^{2p+2}v(x,t)\in L_2(Q^-)\}.\end{gathered}$$

Введем в пространствах $V(Q^+)$ и $V(Q^-)$ нормы:

$$\|v\|_{V(Q^+)}=\left(\|v\|^2_{W_2^2(Q^+)}+\|D_tv_{xx}\|^2_{L_2(Q^+)}+\|D_t^{2p+2}v\|^2_{L_2(Q^+)}\right)^{\frac12},$$

$$\|v\|_{V(Q^-)} = \left(\|v\|^2_{W_2^2(Q^-)} + \|D_t v_{xx}\|^2_{L_2(Q^-)} + \|D_t^{2p+2} v\|^2_{L_2(Q^-)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, определим пространство V_0:

$$V_0 = \{v(x,t) : \ v(x,t) \in V(Q^+), \ \ v(x,t) \in V(Q^-)\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_0} = \left(\|v\|^2_{V(Q^+)} + \|v\|^2_{V(Q^-)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Именно пространство V_0 с этой нормой и будет основным пространством в настоящей работе; очевидно, что данное пространство будет банаховым.

2. Единственность решений краевых задач I–IV

Прежде чем доказывать теорему единственности, заметим, что для функций $v(x,t)$, принадлежащих пространству $V(Q^+)$ и таких, что $v(x,0) = 0$ при $x \in (0,1)$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{Q^+} v_x^2 \, dx \, dt \leqslant \frac{T^2}{2} \int\limits_{Q^+} v_{xt}^2 \, dx \, dt; \tag{10}$$

Аналогично, для функций $v(x,t)$, принадлежащих пространству $V(Q^-)$ и таких, что $v(x,T) = 0$ при $x \in (-1,0)$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{Q^-} v_x^2 \, dx \, dt \leqslant \frac{T^2}{2} \int\limits_{Q^-} v_{xt}^2 \, dx \, dt. \tag{11}$$

Определим числа ${a^+}_0$ и ${a^-}_0$:

$${a^+}_0 = \min_{[0,1]} a_0(x), \quad {a^-}_0 = \sup_{[-1,0)} a_0(x).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$\alpha\beta > 0; \tag{11}$$

$$\begin{gathered} a_1(x) \in C([-1,0)), \quad a_1(x) \geqslant 0 \ \textit{ при } \ x \in [-1,0), \\ a_1(x) \in C([0,1]), \quad a_1(x) \leqslant 0 \ \textit{ при } \ x \in [0,1]; \end{gathered} \tag{12}$$

$$c(x,t) = c_1(x,t) + c_2(x,t), \quad c_i(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad i = 1,2; \tag{13}$$

$$\begin{gathered} xc_{1t}(x,t) \leqslant 0 \ \textit{ при } \ (x,t) \in \overline{Q}, \ \ x \neq 0, \quad c_1(x,0) \geqslant 0 \ \textit{ при } \ x \in [-1,0), \\ c_1(x,T) \geqslant 0 \ \textit{ при } \ x \in [0,1], \quad \sqrt{2}|{a^-}_0| - T \max_{-1\leqslant x\leqslant 0,\, 0\leqslant t\leqslant T} |c_2(x,t)| > 0, \\ \sqrt{2}{a^+}_0 - T \max_{0\leqslant x\leqslant 1,\, 0\leqslant t\leqslant T} |c_2(x,t)| > 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Тогда каждая из задач I, II, III или IV не может иметь в пространстве V_0 более одного решения.

Доказательство. Положим

$$\gamma = -\frac{\beta a_0(+0)}{\alpha a_0(-0)}.$$

Пусть в уравнении (1) выполняется $f(x,t) \equiv 0$, и пусть $u(x,t)$ есть решение одной из задач I, II, III или IV с такой правой частью. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q^+} \left[D_t\left((-1)^p D_t^{2p+1} u - Au\right) + cu\right] u_t \, dx \, dt -$$

$$-\gamma \int\limits_{Q^-} \left[D_t\left((-1)^p D_t^{2p+1} u - Au\right) + cu\right] u_t \, dx \, dt = 0.$$

После интегрирования по частям с использованием соответствующих краевых условий одной из задач I, II, III или IV, а также с использованием условий (12) и (13) это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[D_t^{p+1} u(x,T)\right]^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{-1}^0 \left[D_t^{p+1} u(x,0)\right]^2 dx + \int\limits_{Q^+} a_0(x)(D_t u_x)^2 \, dx \, dt -$$

$$-\gamma\int\limits_{Q^-} a_0(x)(D_t u_x)^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q^+} c_{1t}u^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 c_1(x,T)u^2(x,T)\,dx +$$

$$+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q^-} c_{1t}u^2\,dx\,dt + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{-1}^0 c_1(x,0)u^2(x,0)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{Q^+} c_2 u D_t u\,dx\,dt + \gamma\int\limits_{Q^-} c_2 u D_t u\,dx\,dt. \tag{15}$$

Заметим, что вследствие условия (A) и условия (11) число γ будет положительным. Далее, применяя для оценки правой части (15) неравенство Юнга, неравенства (9) и (10) и учитывая условие (14), нетрудно из равенства (15) вывести неравенство

$$\int\limits_{Q^+}(D_t u_x)^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q^-}(D_t u_x)^2\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Из этого неравенства и краевых условий задач I, II, III или IV следует $u(x,t)\equiv 0$ в Q_1. Это тождество и означает, что каждая из задач I, II, III или IV не может иметь в пространстве V_0 более одного решения.

Теорема доказана.

3. Существование решений краевых задач I–IV

Как и единственность, существование решений краевых задач I–IV будет доказано единым образом для всех четырех задач.

Примененный ниже метод доказательства разрешимости краевых задач I–IV можно охарактеризовать как метод, основанный на сведении задачи сопряжения к краевым задачам для "нагруженных" [28, 29] дифференциальных уравнений. Ранее подобный метод успешно применялся в работах [30–32].

Теорема 2. *Пусть выполняется условие (A), а также условия (11)–(14). Тогда для любой функции такой, что* $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_x(x,t)\in L_2(Q^+)$, $f_x(x,t)\in L_2(Q^-)$, $f(-0,t)=\alpha f(+0,t)$ *при* $t\in(0,T)$, *каждая из краевых задач I–IV имеет решение, принадлежащее пространству* V_0.

Доказательство. Для определенности рассмотрим краевую задачу I. Будем обозначать через $f_1(x,t)$ сужение функции $f(x,t)$ на прямоугольник Q^-, через $f_2(x,t)$ — сужение функции $f(x,t)$ на прямоугольник Q^+. Далее, через $\varphi_1(x)$ обозначим определенную при $x\in[-1,0)$ функцию $a_0'(x)+a_1(x)(1+x)$, через $\varphi_2(x)$ — определенную при $x\in[0,1]$ функцию $-a_0'(x)+a_1(x)(1-x)$. Наконец, пусть $w(x,t)$ и $z(x,t)$ есть функции из пространств $V(Q^-)$ и $V(Q^+)$ соответственно, λ есть число из отрезка $[0,1]$. Положим

$$\Phi(\lambda,w,z)(t) = z(+0,t) - \lambda\beta w_x(-0,t),$$

$$\Psi(\lambda,w,z)(t) = w_x(-0,t) + \lambda\alpha z(+0,t).$$

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функции $w(x,t)$ и $z(x,t)$ такие, что при $(x,t)\in Q^-$ выполняется уравнение*

$$(-1)^p D_t^{2p+2}(w+\varepsilon Aw) - D_tAw + cw + \frac{(-1)^p\varepsilon\lambda\alpha\varphi_1(x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}D_t^{2p+2}\Phi(\lambda,w,z)+$$

$$+\frac{(-1)^p\lambda\alpha(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}D_t^{2p+2}\Phi(\lambda,w,z) - \frac{\lambda\alpha\varphi_1(x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}D_t\Phi(\lambda,w,z)+$$

$$+\frac{\lambda\alpha(1+x)c}{1+\lambda^2\alpha\beta}\Phi(\lambda,w,z) = f_1(x,t), \tag{$16_{\varepsilon,\lambda}$}$$

при $(x,t)\in Q^+$ выполняется уравнение

$$(-1)^p D_t^{2p+2}(z-\varepsilon Az) - D_tAz + cz + \frac{(-1)^p\varepsilon\lambda\beta\varphi_2(x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}D_t^{2p+2}\Psi(\lambda,w,z)-$$

$$-\frac{(-1)^p\lambda\beta(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}D_t^{2p+2}\Psi(\lambda,w,z) + \frac{\lambda\beta\varphi_2(x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}D_t\Psi(\lambda,w,z)-$$

$$-\frac{\lambda\beta(1-x)c}{1+\lambda^2\alpha\beta}\Psi(\lambda,w,z) = f_2(x,t), \tag{$17_{\varepsilon,\lambda}$}$$

и при этом выполняются условия

$$w(-1,t)=w(-0,t)=0, \quad t\in(0,T), \tag{18}$$

$$D_t^k w(x,t)|_{t=0,\,x\in(-1,0)}=0, \quad k=1,\dots,p, \tag{19}$$

$$D_t^k w(x,t)|_{t=T,\,x\in(-1,0)}=0, \quad k=0,\dots,p+1, \tag{20}$$

$$z_x(+0,t)=z(1,t)=0, \quad t\in(0,T), \tag{21}$$

$$D_t^k z(x,t)|_{t=0,\,x\in(0,1)}=0, \quad k=0,\dots,p+1, \tag{22}$$

$$D_t^k z(x,t)|_{t=T,\,x\in(0,1)}=0, \quad k=1,\dots,p. \tag{23}$$

Покажем, что при фиксированных ε и λ, при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ и при выполнении условий теоремы краевая задача ($16_{\varepsilon,\lambda}$), ($17_{\varepsilon,\lambda}$), (18)–(23) имеет решение $\{w(x,t),z(x,t)\}$ такое, что $w(x,t)\in V(Q^-)$, $D_t^{2p+2}w_{xx}(x,t)\in L_2(Q^-)$, $z(x,t)\in V(Q^+)$, $D_t^{2p+2}z_{xx}(x,t)\in L_2(Q^+)$.

Прежде всего заметим, что при $\lambda=0$ существование функций $w(x,t)$ и $z(x,t)$ из требуемых классов действительно имеет место — это следует из того, что краевая задача ($16_{\varepsilon,0}$), ($17_{\varepsilon,0}$), (18)–(23) распадается на две независимые задачи в прямоугольниках Q^- и Q^+ (для функций $w(x,t)$ и $z(x,t)$ соответственно), разрешимость каждой из которых известна — см. [33].

Пусть теперь λ есть произвольное число из отрезка $[0,1]$, функции $w(x,t)$ и $z(x,t)$ представляют собой произвольное решение задачи ($16_{\varepsilon,\lambda}$), ($17_{\varepsilon,\lambda}$), (18)–(23) из требуемого класса. Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\begin{cases} w(x,t)+\frac{\lambda\alpha(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}\Phi(\lambda,w,z) \quad \textit{при} \quad (x,t)\in Q^-,\\[2mm] z(x,t)-\frac{\lambda\beta(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}\Psi(\lambda,w,z) \quad \textit{при} \quad (x,t)\in Q^+.\end{cases}$$

Для этой функции выполняются равенства

$$(-1)^pD_t^{2p+2}(u+\varepsilon Au)-D_tAu+cu=f_1(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t)\in Q^-, \tag{24}$$

$$(-1)^pD_t^{2p+2}(u-\varepsilon Au)-D_tAu+cu=f_2(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t)\in Q^+, \tag{25}$$

$$u(-0,t)=\lambda\alpha u(+0,t), \quad u_x(+0,t)=\lambda\beta u_x(-0,t) \quad \textit{при} \quad t\in(0,T), \tag{26_λ}$$

и выполняются также условия (19), (20), (22) и (23). Умножим равенство (25) на функцию D_tu, равенство (24) — на функцию $-\gamma D_tu$. Интегрируя полученные равенства по прямоугольникам Q^+ и Q^- соответственно, складывая, используя формулу интегрирования по частям, применяя условия теоремы и неравенство Юнга, получим первую априорную оценку для функции $u(x,t)$:

$$\int\limits_{Q^+}(D_tu_x)^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^-}(D_tu_x)^2\,dx\,dt\leqslant N_1\int\limits_Q f^2\,dx\,dt, \tag{27}$$

постоянная N_1 в которой определяется лишь функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x,t)$, также числами α, β и T.

Умножим равенство (25) на функцию $(-1)^{p+1}D_t^{2p+2}Au$, равенство (24) — на функцию $(-1)^p\gamma D_t^{2p+2}Au$. Интегрируя полученные равенства по прямоугольникам Q^+ и Q^- соответственно, складывая и используя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{gathered}\varepsilon\int\limits_{Q^+}(D_t^{2p+2}Au)^2\,dx\,dt+\gamma\varepsilon\int\limits_{Q^-}(D_t^{2p+2}Au)^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^+}a_0(D_t^{2p+2}u_x)^2\,dx\,dt-\\ -\int\limits_{Q^+}a_1(D_t^{2p+2}u)^2\,dx\,dt-\gamma\int\limits_{Q^-}a_0(D_t^{2p+2}u_x)^2\,dx\,dt+\gamma\int\limits_{Q^-}a_1(D_t^{2p+2}u)^2\,dx\,dt+\\ +\frac12\int\limits_0^1[D_t^{p+1}Au(x,T)]^2\,dx+\frac12\int\limits_{-1}^0[D_t^{p+1}Au(x,0)]^2\,dx=\\ =(-1)^{p+1}\int\limits_{Q^+}f_2D_t^{2p+2}Au\,dx\,dt+(-1)^p\gamma\int\limits_{Q^-}f_1D_t^{2p+2}Au\,dx\,dt-\\ -(-1)^p\int\limits_{Q^+}a_0(cu)_xD_t^{2p+2}u_x\,dx\,dt-(-1)^{p+1}\gamma\int\limits_{Q^-}a_0(cu)_xD_t^{2p+2}u_x\,dx\,dt-\\ -(-1)^{p+1}\int\limits_{Q^+}a_1cuD_t^{2p+2}u\,dx\,dt-(-1)^p\int\limits_{Q^-}a_1cuD_t^{2p+2}u\,dx\,dt.\end{gathered} \tag{28}$$

Условия теоремы, неравенство Юнга и оценка (27) дают следствие из равенства (28) — вторую априорную оценку для решения $u(x,t)$ краевой задачи $(16_{\varepsilon,\lambda})$, $(17_{\varepsilon,\lambda})$, (18)–(23)

$$\varepsilon\int\limits_{Q^+}\left(D_t^{2p+2}Au\right)^2\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_{Q^-}\left(D_t^{2p+2}Au\right)^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^+}\left(D_t^{2p+2}u_x\right)^2\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left(D_t^{2p+2}u_x\right)^2\,dx\,dt\leqslant N_2\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt, \tag{29}$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x,t)$, а также числами α, β, T и ε.

Из оценок (27) и (29) вытекает очевидная результирующая оценка

$$\varepsilon\int\limits_{Q^+}\left(D_t^{2p+2}u_{xx}\right)^2\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_{Q^-}\left(D_t^{2p+2}u_{xx}\right)^2\,dx\,dt+\|u\|^2_{V_0}\leqslant N_3\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt \tag{30}$$

с постоянной N_3, определяющейся функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x,t)$, а также числами α, β, T и ε.

Имеют место равенства

$$w(x,t)=u(x,t)-\lambda\alpha(1+x)u(+0,t)\quad \textit{при}\quad (x,t)\in Q^-,$$
$$z(x,t)=u(x,t)+\lambda\beta(1-x)u_x(-0,t)\quad \textit{при}\quad (x,t)\in Q^+.$$

Из этих равенств и из оценки (30) вытекают оценки для функций $w(x,t)$ и $z(x,t)$:

$$\varepsilon\int\limits_{Q^+}\left(D_t^{2p+2}z_{xx}\right)^2\,dx\,dt+\|z\|^2_{V(Q^+)}\leqslant N_4\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt, \tag{31}$$

$$\varepsilon\int\limits_{Q^-}\left(D_t^{2p+2}w_{xx}\right)^2\,dx\,dt+\|w\|^2_{V(Q^-)}\leqslant N_4\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt \tag{32}$$

постоянная N_4 в которых вновь определяется функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x,t)$, числами α, β, T и ε.

Оценки (31) и (32), разрешимость краевой задачи $(16_{\varepsilon,0})$, $(17_{\varepsilon,0})$, (18)–(23) и теорема о методе продолжения по параметру [34, гл. III, § 14] дают разрешимость в требуемом классе задачи $(16_{\varepsilon,\lambda})$, $(17_{\varepsilon,\lambda})$, (18)–(23) при любом λ из отрезка $[0,1]$ — в частности, и при $\lambda=1$. Другими словами, краевые задачи $(16_{\varepsilon,1})$, $(17_{\varepsilon,1})$, (18)–(23) и (24), (25), (26_1), (19), (20), (22), (23) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеют решения $\{w(x,t),z(x,t)\}$ и $u(x,t)$ такие, что $w(x,t)\in V(Q^-)$, $D_t^{2p+2}w_{xx}(x,t)\in L_2(Q^-)$, $z(x,t)\in V(Q^+)$, $D_t^{2p+2}z_{xx}(x,t)\in L_2(Q^+)$ и $u(x,t)\in V_0$, $D_t^{2p+2}u_{xx}(x,t)\in L_2(Q^-)$, $D_t^{2p+2}u_{xx}(x,t)\in L_2(Q^+)$. Покажем, что для этих решений при выполнении дополнительных условий на функцию $f(x,t)$ имеют место оценки, равномерные по ε.

Итак, пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (24), (25), (26_1), (19), (20), (22), (23). Рассмотрим для этого решения равенство (28). Интегрируя по частям в интегралах от функций $f_1\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0D_t^{2p+2}u_x\right)$ и $f_2\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0D_t^{2p+2}u_x\right)$ (по областям Q^- и Q^+ соответственно), используя условия на функцию $f(x,t)$, применяя неравенство Юнга и учитывая оценку (29), нетрудно показать, что для функции $u(x,t)$ выполняется априорная оценка

$$\varepsilon\int\limits_{Q^+}\left(D_t^{2p+2}Au\right)^2\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_{Q^-}\left(D_t^{2p+2}Au\right)^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^+}\left(D_t^{2p+2}u_x\right)^2\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left(D_t^{2p+2}u_x\right)^2\,dx\,dt\leqslant N_2'\left(\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^+}f_x^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^-}f_x^2\,dx\,dt\right), \tag{33}$$

постоянная N_2' в которой определяется функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$, $c(x,t)$, а также числами α, β и T.

Следующая оценка

$$\int\limits_{Q^+}\left(D_tAu\right)^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^-}\left(D_tAu\right)^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant N_5\left(\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^+}f_x^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q^-}f_x^2\,dx\,dt\right) \tag{34}$$

с постоянной N_5, определяющейся функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$, $c(x,t)$, числами α, β и T, очевидным образом вытекает из уравнений (24) и (25), оценок (27) и (33).

Оценки (27),(33) и (34), а также свойство рефлексивности гильбертова пространства позволяют стандартным образом (см., например, [37]) выбрать последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел и семейство функций $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, являющихся решениями краевых задач (24), (25), (26_1), (19), (20), (22), (23) при $\varepsilon = \varepsilon_m$ и таких, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $u_m(x,t) \to u(x,t)$ слабо в пространстве V_0, $\varepsilon_m D_t^{2p+2} A u_m \to 0$ слабо в пространствах $L_2(Q^+)$ и $L_2(Q^-)$. Предельная функция $u(x,t)$ и будет представлять собой искомое решение из пространства V_0 краевой задачи I.

Для краевых задач II, III и IV все рассуждения и тем самым доказательство разрешимости в пространстве V_0 проводятся полностью аналогично вышеприведенным.

Теорема полностью доказана.

4. Дополнение

1. Условие (11) теорем 1 и 2 вполне можно заменить на условие

$$\alpha\beta \geqslant 0.$$

В случаях $\alpha = 0$, или $\beta = 0$, или $\alpha = \beta = 0$ каждая из задач I–IV распадается на две независимые задачи, разрешимость в пространстве V_0 которых известна [33].

2. Коэффициенты a_0 и a_1 вполне могут зависеть и от переменной t, все условия и выкладки при этом лишь незначительно усложняются. Самосопряженный вид оператора A также не является существенным — оператор A может иметь вид

$$Au = a_0(x,t)u_{xx} + a_1(x,t)u_x + a_2(x,t)u.$$

3. В случае $p = 0$ все задачи I–IV совпадают между собой и представляют собой краевую задачу для псевдогиперболического уравнения с переменным направлением эволюции.

Литература

[1] Ладыженская О.А. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. № 3. С. 433–436.

[2] Олейник О.А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1961. Т. 25. С. 3-20. URL: http://www.mathnet.ru/links/dbe9363eab8ae54514782f9e8a566522/im3365.pdf.

[3] Ильин В.А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 1. С. 28–30. URL: http://mi.mathnet.ru/dan24692.

[4] Ильин В.А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 1. С. 21-24. URL: http://mi.mathnet.ru/dan25958.

[5] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

[6] Ильин В.А., Луференко П.В. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 12–15. URL: http://naukarus.com/smeshannye-zadachi-opisyvayuschie-prodolnye-kolebaniya-sterzhnya-sostoyaschego-iz-dvuh-uchastkov-imeyuschih-raznye-plotno.

[7] Ильин В.А., Луференко П.В. Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 3. С. 317–321. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=12989568.

[8] Андропова О.А. Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии // Труды ИПММ НАН Украины. 2009. № 19. С. 10–22. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/123893.

[9] Никольский Д.Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-однородной пористой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 5. С. 913–919. URL: http://mi.mathnet.ru/zvmmf9340.

[10] Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. РАН. 2012. Т. 441. № 4. С. 449–451. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924.

[11] Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 451–454. URL: http://naukarus.com/smeshannye-zadachi-dlya-uravneniya-prodolnyh-kolebaniy-neodnorodnogo-sterzhnya-so-svobodnym-libo-zakreplennym-pravym-kont.

[12] Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 488–491. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924.

[13] Смирнов И.Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравн. 2013. Т. 49. № 5. С. 643–648. DOI: 10.1134/S0374064113050117.

[14] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: СССР. 1959.

[15] Ладыженская О.А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. 1967. № 18. С. 38–46. URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01008452040.

[16] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.

[17] Ладыженская О.А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1971. Т 116. № 16. С. 101–136. URL: http://mi.mathnet.ru/tm3080.

[18] Ступялис Л. Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений // Труды МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229. URL: http://mi.mathnet.ru/tm3136.

[19] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР. Ин-т математики, 1982.

[20] Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.

[21] Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988.

[22] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

[23] Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарский государственный экономический университет, 2008.

[24] Моисеев Е.И., Лихоманенко Т.Н. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 3. С. 256–258. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17928447.

[25] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[26] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

[27] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях М.: Либроком, 2010.

[28] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.

[29] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.

[30] Kozhanov A.I., Sharin E.F. The conjugation problem for some nonclassical high-order differential equations // J. of Mathematical Sciences. 2015. V. 204. № 3. P. 298–314.

[31] Кожанов А.И., Потапова С.В. Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечетного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции // Доклады АН. 2017. Т. 474. № 6. С. 661–664. DOI: 10.7868/S0869565217180013.

[32] Григорьева А.И. Начально-краевая задача с условиями сопряжения для уравнений составного типа с двумя разрывными коэффициентами // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25. № 2. С. 12–26. DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14227.

[33] Кожанов А.И, Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Математические заметки. 2017. Т. 101. № 3. С. 403–412. DOI: 10.4213/mzm11172.

[34] Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. *O reshenii obshchei zadachi difraktsii* [On the solution of a general problem of diffraction]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1954, Vol. 96, pp. 433–436 [in Russian].

[2] Oleinik O.A. *Kraevye zadachi dlia lineinykh uravnenii ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary-value problems for linear equations of the elliptic and parabolic types with discontinuous coefficients]. *Izvestiia AN SSSR. Seriia matematicheskaia* [Izvestiya: Mathematics], 1961, Vol. 25, pp. 3–20. Available at: http://www.mathnet.ru/links/dbe9363eab8ae54514782f9e8a566522/im3365.pdf [in Russian].

[3] Il'in V.A. *O razreshimosti zadach Dirikhle i Neimana dlia lineinogo ellipticheskogo operatora s razryvnymi koeffitsientami* [On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1961, Vol. 137, no. 1, pp. 28–30. Available at: http://mi.mathnet.ru/dan24692 [in Russian].

[4] Il'in V.A. *Metod Fur'e dlia giperbolicheskogo uravneniia s razryvnymi koeffitsientami* [The Fourier method for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1962, Vol. 142, no. 1, pp. 21–24. Available at: http://mi.mathnet.ru/dan25958 [in Russian].

[5] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. M.: Nauka, 1967 [in Russian].

[6] Il'in V.A., Luferenko P.V. *Smeshannye zadachi, opisyvaiushchie prodol'nye kolebaniia sterzhnia, sostoiashchego iz dvukh uchastkov, imeiushchikh raznye plotnosti, raznye uprugosti, no odinakovye impedansy* [Mixed problems describing longitudinal vibrations of a rod consisting of two sections with different densities and elasticity moduli, but with the same impedance]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 2009, Vol. 428, no. 1, pp. 12–15. Available at: http://naukarus.com/smeshannye-zadachi-opisyvayuschie-prodolnye-kolebaniya-sterzhnya-sostoyaschego-iz-dvuh-uchastkov-imeyuschih-raznye-plotno [in Russian].

[7] Il'in V.A., Luferenko P.V. *Obobshchennye resheniia smeshannykh zadach dlia razryvnogo volnovogo uravneniia pri uslovii ravenstva impedansov* [Generalized solutions of mixed problems for the discontinuous wave equation under the condition of equality of impedances]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 2009, Vol. 429, no. 3, pp. 317–321. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=12989568 [in Russian].

[8] Andropova O.A. *Spektral'nye zadachi sopriazheniia s poverkhnostnoi dissipatsiei energii* [Spectral problems of conjugation with surface dissipation of the energy]. *Trudy IPMM NAN Ukrainy* [Transactions of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine], 2009, Vol. 19, pp. 10–22. Available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/123893 [in Russian].

[9] Nikolsky D.N. *Trekhmernaia evoliutsiia granitsy zagriazneniia v ogranichennoi kusochno-odnorodnoi poristoi srede* [Three-dimensional evolution of the pollution boundary in a limited piecewise-homogeneous porous medium]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2011, Vol. 51, no. 5, pp. 913–919. Available at: http://mi.mathnet.ru/zvmmf9340 [in Russian].

[10] Rogozhnikov A.M. *Issledovanie smeshannoi zadachi, opisyvaiushchei protsess kolebanii sterzhnia, sostoiashchego iz neskol'kikh uchastkov, pri uslovii sovpadeniia vremeni prokhozhdeniia voln po kazhdomu iz etikh uchastkov* [Study of mixed problems describing the process of vibrations of a rod consisting of several sections under the condition of coincidence of times of passage of waves on each of these sections]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012, Vol. 441, no. 4, pp. 449–451. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924 [in Russian].

[11] Kuleshov A.A. *Smeshannye zadachi dlia uravneniia prodol'nykh kolebanii neodnorodnogo sterzhnia so svobodnym libo zakreplennym pravym kontsom, sostoiashchego iz dvukh uchastkov raznoi plotnosti i uprugosti* [Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a inhomogeneous rod with free or fixed right end consisting of two sections with different densities and elasticity moduli]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012, Vol. 442, no. 4, pp. 451–454. Available at: http://naukarus.com/smeshannye-zadachi-dlya-uravneniya-prodolnyh-kolebaniy-neodnorodnogo-sterzhnya-so-svobodnym-libo-zakreplennym-pravym-kont [in Russian].

[12] Rogozhnikov A.M. *Issledovanie smeshannoi zadachi, opisyvaiushchei protsess kolebanii sterzhnia, sostoiashchego iz neskol'kikh uchastkov s proizvol'nymi dlinami* [Study of a mixed problem describing the process of vibrations of a rod consisting of several sections with arbitrary lengths]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012, Vol. 444, no. 5, pp. 488–491. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924 [in Russian].

[13] Smirnov I.N. *O kolebaniiakh, opisyvaemykh telegrafnym uravneniem v sluchae sistemy, sostoiashchei iz neskol'kikh uchastkov raznoi plotnosti i uprugosti* [On vibrations described by the telegraph equation in the case of a system consisting of several sections with different densities and elasticity moduli]. *Differents. Uravn.* [Differential Equations], 2013, Vol. 49, no. 5, pp. 643–648. DOI: 10.1134/S0374064113050117 [in Russian].

[14] Bitsadze A.V. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Equations of a mixed type]. M: Iz-vo AN SSSR, 1959 [in Russian].

[15] Ladyzhenskaya O.A., Stupyalis L. *Ob uravneniiakh smeshannogo tipa* [On equations of a mixed type]. *Vestnik LGU* [Vestnik of Pushkin Leningrad State University], no. 18, pp. 38–46. Available at: https://search.rsl.ru/ru/record/01008452040 [in Russian].

[16] Smirnov M.M. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Equations of a mixed type]. M.: Nauka, 1970 [in Russian].

[17] Ladyzhenskaya O.A., Stupyalis L. *Kraevye zadachi dlia uravnenii smeshannogo tipa* [Boundary-value problems for equations of the mixed type]. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1971, Vol. 116, no. 16, pp. 101–136. Available at: http://mi.mathnet.ru/tm3080 [in Russian].

[18] Stupyalis L. *Kraevye zadachi dlia elliptiko-giperbolicheskikh uravnenii* [Boundary-value problems for elliptic-hyperbolic equations]. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1973, Vol. 125, pp. 211–229. Available at: http://mi.mathnet.ru/tm3136 [in Russian].

[19] Tersenov S.A. *Vvedenie v teoriiu uravnenii parabolicheskogo tipa s meniaiushchimsia napravleniem vremeni* [Introduction to the theory of equation of the parabolic type with varying time direction]. Novosibirsk: Sib. otd-nie AN SSSR. In-t matematiki, 1982 [in Russian].

[20] Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlia uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary-value problems for equations of the mixed and mixed-composite types]. Tashkent: Fan, 1986 [in Russian].

[21] Moiseev E.I. *Uravneniia smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Equations of the Mixed Type with Spectral Parameter]. M.: MGU, 1988 [in Russian].

[22] Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with displacement for partial differential equations]. M.: Nauka, 2006 [in Russian].

[23] Marichev O.I., Kilbas A.A., Repin O.A. *Kraevye zadachi dlia uravnenii s chastnymi proizvodnymi s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary-Value Problems for Equations with Partial Derivatives with Discontinuous Coefficients]. Samara: Samarskii gosudarstvennyi ekonomicheskii universitet, 2008 [in Russian].

[24] Moiseev E.I., Likhomanenko T.N. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlia uravneniia Lavrent'eva-Bitsadze* [On a nonlocal problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012. Vol. 446, no. 3, pp. 256–258. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17928447 [in Russian].

[25] Demidenko G.V., Uspensky S.V. *Uravneniia i sistemy, nerazreshennye otnositel'no starshei proizvodnoi* [Equations and systems that are unresolved relative to the highest derivative]. Novosibirsk: Nauchnaia kniga, 1998 [in Russian].

[26] Gaevsky Kh., Greger K., Zacharias K. *Nelineinye operatornye uravneniia i operatornye differentsial'nye uravneniia* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations]. M.: Mir, 1978 [in Russian].

[27] Corpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: Librokom, 2010 [in Russian].

[28] Dzhenaliev M.T. *K teorii lineinykh kraevykh zadach dlia nagruzhennykh differentsial'nykh uravnenii* [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]. Almaty: In-t teoreticheskoi i prikladnoi matematiki, 1995 [in Russian].

[29] Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primeneniia* [Loaded equations and their applications]. M.: Nauka, 2012 [in Russian].

[30] Kozhanov A.I., Sharin E.F. The conjugation problem for some nonclassical high-order differential equations. *J. of Mathematical Sciences*, 2015, Vol. 204, no. 3, pp. 298–314 [in English].

[31] Kozhanov A.I., Potapova S.V. *Zadacha sopriazheniia dlia differentsial'nykh uravnenii nechetnogo poriadka s dvumia vremennymi peremennymi i s meniaiushchimsia napravleniem evoliutsii* [Conjugation problem for odd-order differential equations with two time variables and with the changing direction of evolution]. *Doklady AN* [Doklady Physics], 2017, Vol. 474, no. 6, pp. 661–664. DOI: 10.7868/S0869565217180013 [in Russian].

[32] Grigorieva A.I. *Nachal'no-kraevaia zadacha s usloviiami sopriazheniia dlia uravnenii sostavnogo tipa s dvumia razryvnymi koeffitsientami* [Initial-boundary problem with conjugation conditions for composite-type equations with two breakdown coefficients]. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical Notes of NEFU], 2018, Vol. 25, no. 2, pp. 12–26. DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14227 [in Russian].

[33] Kozhanov A.I., Pinigina N.R. *Kraevye zadachi dlia nekotorykh neklassicheskikh differentsial'nykh uravnenii vysokogo poriadka* [Boundary value problems for certain nonclassical differential equations of a high order]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes], 2017, Vol. 101, no. 3, pp. 403–412. DOI: 10.4213/mzm11172 [in Russian].

[34] Trenogin V.A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. M.: Nauka, 1980 [in Russian].

A.I. Grigorieva, A.I. Kozhanov[3]

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR COMPOSITE TYPE EQUATIONS WITH A QUASIPARABOLIC OPERATOR IN THE LEADING PART HAVING THE VARIABLE DIRECTION OF EVOLUTION AND DISCONTINUOUS COEFFICIENTS[4]

The solvability of boundary value problems for non-classical Sobolev type differential equations with an alternating function is studied. This function has a discontinuity of the first kind at the point zero and changes its sign depending on the sign of the variable x. The existence and uniqueness of regular solutions having generalized derivatives are proved. To this end we derived a priori estimates.

Key words: Sobolev–type equation, variable direction of evolution, boundary value problem, differential operator, regular solution, existence, uniqueness, a priory estimate.

Citation. Grigorieva A.I., Kozhanov A.I. *Kraevye zadachi dlia uravnenii sostavnogo tipa s kvaziparabolicheskim operatorom peremennogo napravleniia evoliutsii v starshei chasti i s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary value problems for composite type equations with a quasiparabolic operator in the leading part having the variable direction of evolution and discontinuous coefficients]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 7–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-7-17 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 28/*VI*/2018.
The article received 28/*VI*/2018.

[3]*Grigorieva Aleksandra Ivanovna* (shadrina_ai@mail.ru), Department of Higher Mathematics, North-Eastern Federal University in Yakutsk, 48, Kulakovskogo street, Yakutsk, 677000, Russian Federation.

Kozhanov Aleksander Ivanovich (kozhanov@math.nsc.ru), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

[4]The work is carried out with the support from the Russian Fond of Fundamental Researches, project 18–51–41009.