

В.В. Нарожнов¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С СОУДАРЕНИЯМИ

В работе численно решается уравнение колебаний осциллятора с соударениями, которые описываются в рамках контактной теории Герца. Вычислительный эксперимент показал, что на общие колебания, задаваемые внешней силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют упругим соударениям осциллятора с поверхностью твердого тела. Проведено вейвлет-преобразование численного решения уравнения колебаний осциллятора с соударениями и натуральных экспериментальных результатов, полученных с помощью измерительного стенда. Вейвлет-анализ сложных акустических сигналов позволяет обнаружить мелкомасштабные особенности, которые важны для интерпретации эксперимента.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейный осциллятор, численное решение дифференциальных уравнений, вейвлет-анализ.

Введение

Нелинейный осциллятор представляет собой формальную математическую модель для изучения реальных колебательных процессов, протекающих в системах различной природы. Так, нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания осцилляторов, возникают в электротехнике при описании автоколебаний в цепях с активными и пассивными элементами; в трибологии при исследовании механизмов трения поверхностей; в микроэлектромеханических системах (МЭМС); в биологических и биохимических системах при изучении кинетики гомогенных процессов и др. [1–4]. Задачи об осцилляторе с соударениями возникают, в частности, при рассмотрении физических процессов в атомно-силовом микроскопе (АСМ), который используется для диагностики поверхностей твердых тел на атомном и наноразмерном уровне разрешения как в воздушной, так и в жидкой среде. Базовая конструкция АСМ содержит микрокантилевер с нано-наконечником, который в процессе колебаний наносит удары по поверхности образца (полуконтактный режим или *tapping mode*).

В настоящей работе проводится моделирование нелинейного осциллятора с соударениями с помощью программ Simulink и Wavelet Toolbox, входящих в состав пакета MATLAB. Результаты моделирования сравниваются с результатами натуральных экспериментов, проведенных на специально разработанном стенде.

1. Применение программы Simulink

Для моделирования физических процессов, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, широко используется программа MATLAB. В состав этой программы входит инструмент визуального и имитационного моделирования Simulink, позволяющий моделировать нелинейные динамические системы, следить за изменением их параметров и модифицировать проект с помощью графических блок-диаграмм [5].

Реализация алгоритма имитационного моделирования динамической системы в Simulink состоит из двух основных этапов. Сначала используя редактор моделей, создается графическая модель системы. Модель отображает зависящие от времени математические связи входов, состояний и выходов системы. Далее, производится численный расчет с целью описания поведения системы на заданном промежутке

¹© Нарожнов В.В., 2018

Нарожнов Виктор Валерьевич (narojnov.victor@gmail.com), лаборатория Автоматизации измерений, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

времени. При выполнении всех расчетов Simulink использует информацию, которая заложена в графической модели [6].

В работах [7; 8] предложена математическая модель нелинейного осциллятора, в которой удар описывается в рамках контактной теории Герца. Рассматривается твердый недеформируемый шар, закрепленный на невесомой пружине, который совершает вынужденные колебания под действием внешней силы. Амплитуда колебаний такова, что в нижней фазе своего движения, шар наносит удары по поверхности твердого тела, что вызывает ее упругую деформацию.

Для моделирования в Simulink рассматриваемую в [7; 8] задачу Коши, удобно представить в следующем виде:

$$u'' = c \cdot \cos(\Omega\xi) - 2a \cdot u' - u - b \cdot \theta(u - 1) \cdot (u - 1)^{3/2}, \quad (1.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$u = \frac{x}{h}, \quad \xi = \omega_0 t,$$

$$a = \frac{\gamma}{m\omega_0}, \quad b = \frac{4E\sqrt{Rh}}{3(1-\sigma^2)m\omega_0^2}, \quad c = \frac{F_0}{m\omega_0^2 h}, \quad \Omega = \frac{\omega_g}{\omega_0},$$

где a, b, c, Ω – безразмерные коэффициенты. Коэффициент a характеризует затухание колебаний осциллятора; b определяется упругими характеристиками соударяющихся тел; c задает амплитуду приложенной внешней силы; Ω определяет частоту внешнего возбуждения.

Построение графической модели нелинейного осциллятора начинается с сумматора Sum, имеющего четыре входа. Каждый вход сумматора соответствует слагаемому в правой части уравнения (1.1). На выходе сумматора получается значение второй производной по времени. Далее включаются последовательно два блока Integrator (du, u), на выходе которых получается значение первой производной и самой переменной. Устанавливаются связи между входами и выходами соответствующих блоков и применяются дополнительные линейные преобразователи и сумматоры. После установки всех связей определяются необходимые коэффициенты в используемых преобразователях и задаются начальные условия (1.2) для интеграторов. Для наблюдения за процессом колебаний в имитационной модели устанавливается программный блок Scope (осциллограф), который позволяет отображать изменения переменных во времени. Сохранение результатов моделирования производится с помощью блока To Workspace. Схема численного решения задачи (1.1), (1.2) представлена на рис. 1.

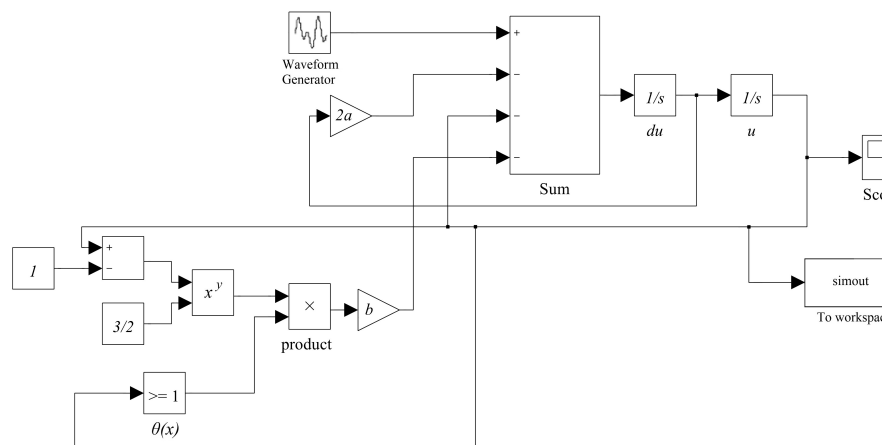


Рис. 1. Блок-схема математической модели нелинейного осциллятора

С помощью разработанной схемы проведен вычислительный эксперимент, результаты которого анализируются в следующем разделе статьи.

2. Применение Wavelet Toolbox

Для более детальной интерпретации результатов математического моделирования применительно к реальным колебательным системам представляет интерес провести спектральный анализ численных решений задачи (1.1), (1.2), которая описывает колебания нелинейного осциллятора с соударениями. Поэтому, в данной работе разработан и реализован алгоритм спектрального анализа, который основывается

на вейвлет-преобразовании и совместном применении программ Simulink и Wavelet Toolbox, входящих в состав пакета MATLAB.

Wavelet Toolbox представляет собой инструмент для непрерывного и дискретного спектрального анализа с использованием вейвлет-преобразований. Вейвлет-преобразование сигнала заключается в разложении его по некоторым базисным функциям — вейвлетам (от англ. "маленькая волна"). Для покрытия всего сигнала вейвлетами используются процедуры сдвига и масштабного преобразования [9–12]. Таким образом, сигнал представляется в виде совокупности параметрических "вейвлетных волн", которые зависят от координаты (сдвига) и частоты (масштаба). Математически это представляется в виде интеграла типа свертки:

$$u(\xi) = \frac{1}{a_0 C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b-b_0}{a_0}\right) \psi\left(\frac{\xi-b}{a}\right) \frac{da}{a^2}, \quad (2.1)$$

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \psi\left(\frac{\xi-b}{a}\right) d\xi, \quad C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|},$$

где $W(a, b)$ — функция, определяющая вейвлет-спектр, переменные a и b задают расширение и сдвиг для покрытия сигнала вейвлетом, a_0 и b_0 — управляющие параметры, позволяющие увеличивать, уменьшать и перемещать сигнал, C_ψ — нормализующий коэффициент, $\hat{\psi}(\omega)$ — Фурье-образ базового вейвлета. При $a_0 = 1$ и $b_0 = 1$ из (3) получается стандартное вейвлет-преобразование [9]. Выбор базового вейвлета обусловлен характером исследуемой функции и информации, которую необходимо извлечь из вейвлет-спектра. Wavelet Toolbox содержит большое количество базовых вейвлетов, отличающихся важными для анализа свойствами: локализация по времени и частоте; симметричность вейвлет-функций; число обращений в ноль моментов; регулярность вейвлета; существование масштабирующей функции.

На начальном этапе моделирования создается графическая (имитационная) модели в приложении Simulink (раздел 2 данной статьи). Далее, в среде этого приложения проводится моделирование процесса колебаний осциллятора с соударениями при выбранных значениях параметров модели. Полученные результаты моделирования сохраняются в рабочее пространство пакета MATLAB. На следующем этапе алгоритма запускается приложение Wavelet Toolbox. Для осуществления дальнейшего моделирования здесь, по существу, имеется две возможности — дискретное и непрерывное вейвлет-преобразования. Выбрав требуемый тип анализа, далее проводится моделирование спектральных свойств решения, полученного в приложении Simulink. Этот анализ предполагает возможность выбора того или иного дискретного или непрерывного базового вейвлета. При необходимости изменения параметров модели осциллятора с соударениями процесс моделирования проводится заново. Тем самым достигаются требуемые характеристики решения всей задачи.

На рис. 2 показаны результаты моделирования решения задачи о колебаниях нелинейного осциллятора с соударениями с применением дискретного вейвлет-преобразования с вейвлетами Добеши 4-го порядка.

Параметры модели (1.1), (1.2) имели следующие значения: $a = 0.2$; $b = 50$; $c = 10$; $\Omega = 0.25$. Исходный сигнал s , полученный с помощью программы Simulink и схемы на рис. 1, представляется в виде суммы двух компонент: аппроксимирующей a_1 и детализирующей d_1 . Таким образом, численный эксперимент здесь показывает, что путем выделения в спектре определенных составляющих сигнала можно получать различные их формы, которые могут регистрироваться на практике, например, с помощью оптических или электрических методов измерения.

Из рис. 2 (графики s и a_1) видно, что на колебания, задаваемые приложенной силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют упругим соударениям осциллятора о поверхность твердого тела. При увеличении параметра a время затухания этих колебаний резко уменьшается. Это обусловлено увеличением динамического трения. Вычислительный эксперимент позволил установить, что изменение частоты и амплитуды колебаний осциллятора обусловлено изменением коэффициента b . Увеличение этого параметра приводит к увеличению частоты и уменьшению амплитуды колебаний и, соответственно, несет информацию об упругих свойствах образца. Моделирование также показывает, что установившейся динамической картине предшествует начальный участок, на котором происходят квазипериодические колебания осциллятора с большей амплитудой. Характер этого переходного процесса определяется параметрами b и c . При увеличении значений этих параметров переходной процесс постепенно перестает быть заметным. Моделирование показывает, что при увеличении коэффициента c возрастает амплитуда колебаний нелинейного осциллятора. При одинаковых прочих условиях увеличение резонансной частоты свободных колебаний осциллятора приводит к уменьшению всех параметров в уравнении (1.1).

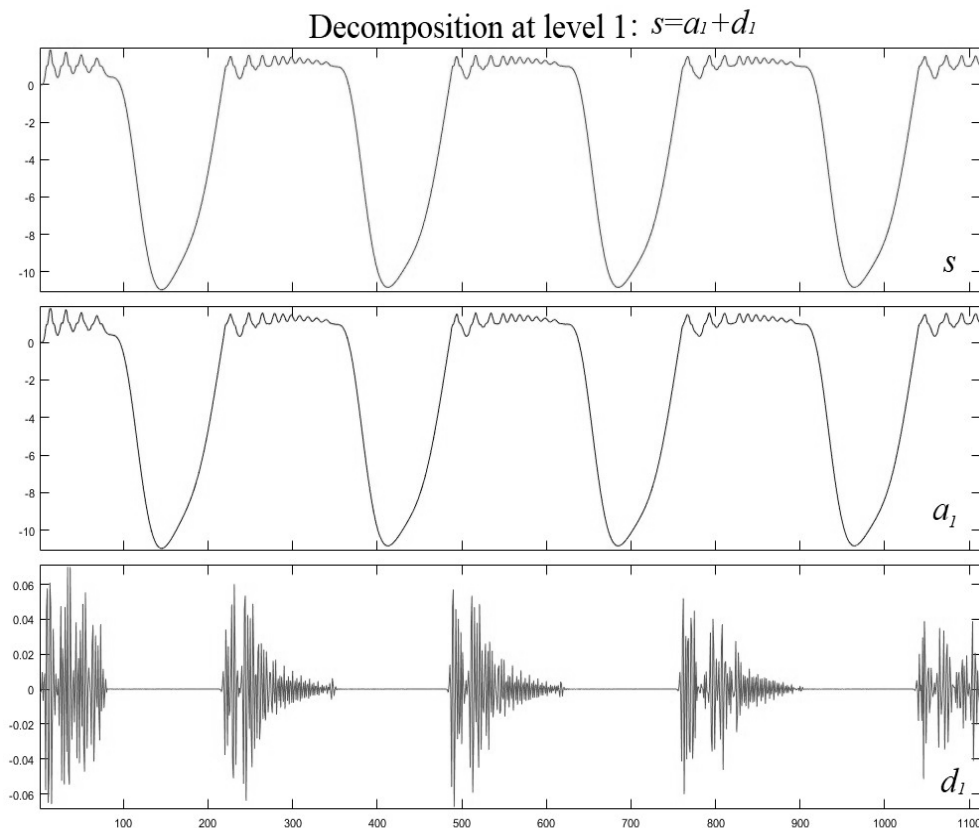


Рис. 2. Результаты моделирования колебаний осциллятора с соударениями с применением дискретного вейвлет-преобразования

На рис. 3 показаны результаты обработки решения задачи о колебаниях нелинейного осциллятора с соударениями с применением непрерывного вейвлет-преобразования с вейвлетом Добеши 4-го порядка. Для построения графиков использовалось выделение информативной части решения, которая соответствует ударам осциллятора. На вейвлет-спектре (рис.3,б) можно видеть светлые области, размер которых уменьшается соответственно уменьшению амплитуды затухающих колебаний моделируемого сигнала. Интенсивность окраски этих областей пропорциональна абсолютной величине коэффициентов $|W(a, b)|$: чем больше это значение в точке (a_0, b_0) , тем лучше вейвлет данного масштаба описывает поведение сигнала в окрестности $b = b_0$. На рис. 3,в изображена линия коэффициентов вейвлет-преобразования для масштаба $a = 11.5$, которая также имеет осциллирующий характер.

На рис. 3, г показана проекция линий локальных максимумов (скелетон [9]) на плоскость (a, b) , соединяющих максимумы коэффициентов вейвлет-преобразования на разных масштабах. Данный метод спектрального анализа называется методом максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования – в англ. терминологии Wavelet Transform Modulus Maxima, WTMM [13–15]. Данный метод позволяет определять фрактальную размерность сложных сигналов. Кроме того, в рамках данного метода имеется возможность разбивать временную область и область масштаба сигнала на необходимые для исследования участки. Поэтому метод иногда называют “математическим микроскопом” из-за его способности проверять многомасштабные размерные характеристики сигнала. В нашем случае функция “математического микроскопа” позволяет наглядно анализировать процесс соударений осциллятора.

3. Результаты экспериментов по исследованию нелинейного осциллятора с соударениями

Для экспериментального исследования особенностей физических процессов, возникающих при соударениях нелинейного осциллятора с плоской поверхностью, был использован измерительный стенд, разработанный в [8; 16]. Принцип его работы заключается в следующем. Переменный сигнал синусоидальной формы с генератора подается на индукционную катушку. Переменное магнитное поле, возникающее в катушке, приводит в колебательное движение упругий элемент (осциллятор), который выполнен в ви-

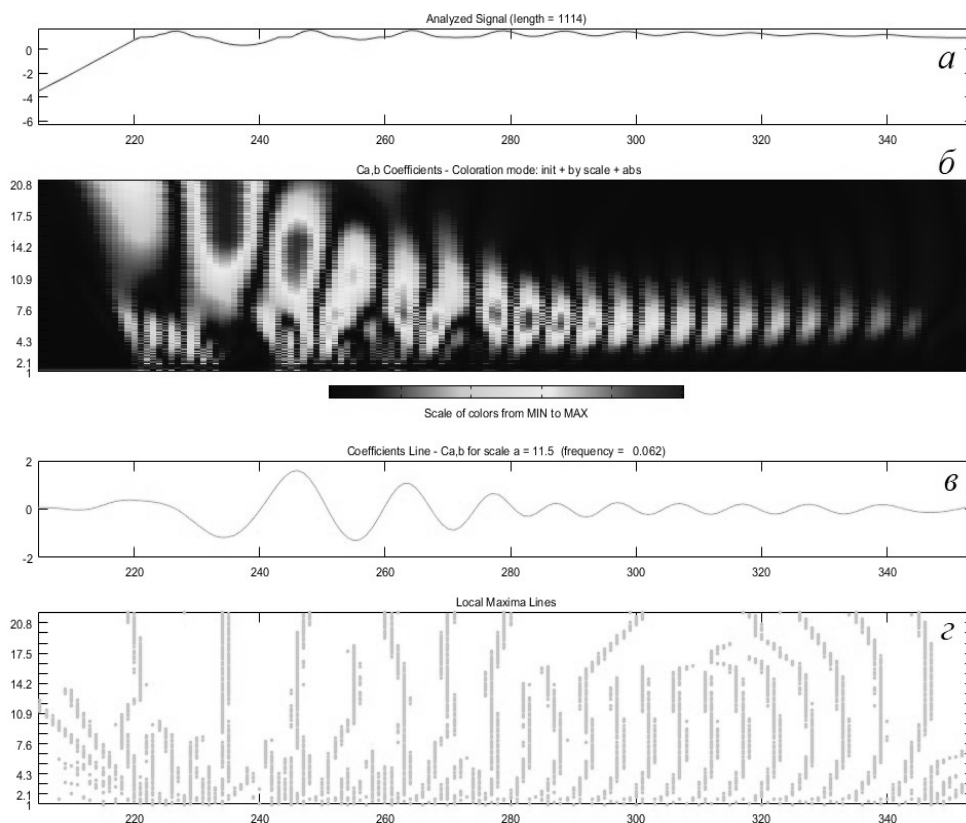


Рис. 3. Результаты моделирования колебаний осциллятора с соударениями с применением непрерывного вейвлет-преобразования

де тонкой металлической балки с закрепленным на конце корундовым зондом. В процессе колебаний зонд совершает удары по поверхности металлического образца. Амплитуда колебаний осциллятора и, соответственно, сила удара зависят от величины переменного напряжения на катушке. Для измерения интенсивности звуковых сигналов, возникающих при ударах зонда о поверхность образца, использовался пьезоэлектрический звукосниматель. Для формирования и измерения сигналов применялся компьютерный генератор-осциллограф PCSGU-250 фирмы Velleman. На рис. 4 показана осциллограмма звукового сигнала.

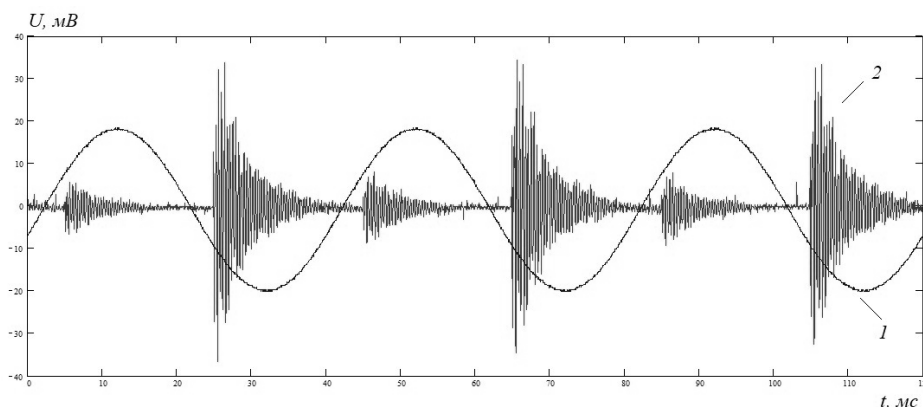


Рис. 4. Осциллограммы сигналов, полученные с помощью измерительного стенда для алюминиевого образца: 1–сигнал возбуждения, 2–звуковой сигнал

На рис. 4 хорошо заметно явление уменьшения амплитуды сигнала на возбуждающей катушке (центральная часть сигнала 2). Данное явление обусловлено тем, что при подаче на катушку переменного тока в нарастающей фазе напряжение возрастает и магнитное поле катушки увеличивается. ЭДС самоиндукции в этот момент препятствует протеканию тока от генератора. За спадающую фазу задающего

сигнала, когда напряжение на катушке уменьшается, магнитное поле создает ЭДС самоиндукции, которое совпадает по фазе с током. Ток самоиндукции в катушке старается теперь "поддержать" уменьшающийся переменный ток и сохранить большую величину магнитного потока.

Форма сигнала 2 хорошо воспроизводится математическим моделированием, проведенным с помощью вейвлет-преобразований (раздел 3, рис. 2). Таким образом приходим к выводу, что разработанный в [8; 16] стенд выделяет высокочастотную составляющую сигнала, которая соответствует ударам осциллятора. Тем самым осциллятор с соударениями функционирует как своеобразный электромеханический множитель частоты. В частности, из нашего эксперимента следует, что для алюминиевого образца при частоте задающего сигнала 25 Гц получается частота соударений осциллятора 2.5 кГц, т. е. происходит умножение частоты в 100 раз. Вычислительный эксперимент, выполненный с применением программы Wavelet Toolbox, показал, что наилучшей разрешающей способностью для анализа исследуемого акустического сигнала обладает вейвлет Мейера с высокой частотно-временной локализацией. Вейвлет Мейера и его фурье-образ имеют вид [17]:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \widehat{\varphi}(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega - 2\pi) \cos \omega(x + 1/2) d\omega,$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = \begin{cases} e^{i\omega/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ e^{i\omega/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right), & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & |\omega| \notin \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \end{cases}$$

$$\widehat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-2\pi/3, 2\pi/3], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right), & 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3, \\ 0, & \text{for other } \omega, \end{cases}$$

$$\nu(\omega) = \omega^4(35 - 84\omega + 70\omega^2 - 20\omega^3).$$

С помощью программы Wavelet Toolbox проведен спектральный анализ, основанный на дискретном и непрерывном вейвлет-преобразовании акустических сигналов, возникающих при ударах осциллятора по поверхности твердого тела. Результаты вейвлет-преобразований приведены на рис. 5, 6. На рис. 5 представлены исходный сигнал s и его разложение на составляющие: аппроксимирующую a_3 и детализирующие d_1, d_2, d_3 : Компонента a_3 имеет слабо выраженную синусоидальную форму (как и сигнал 1

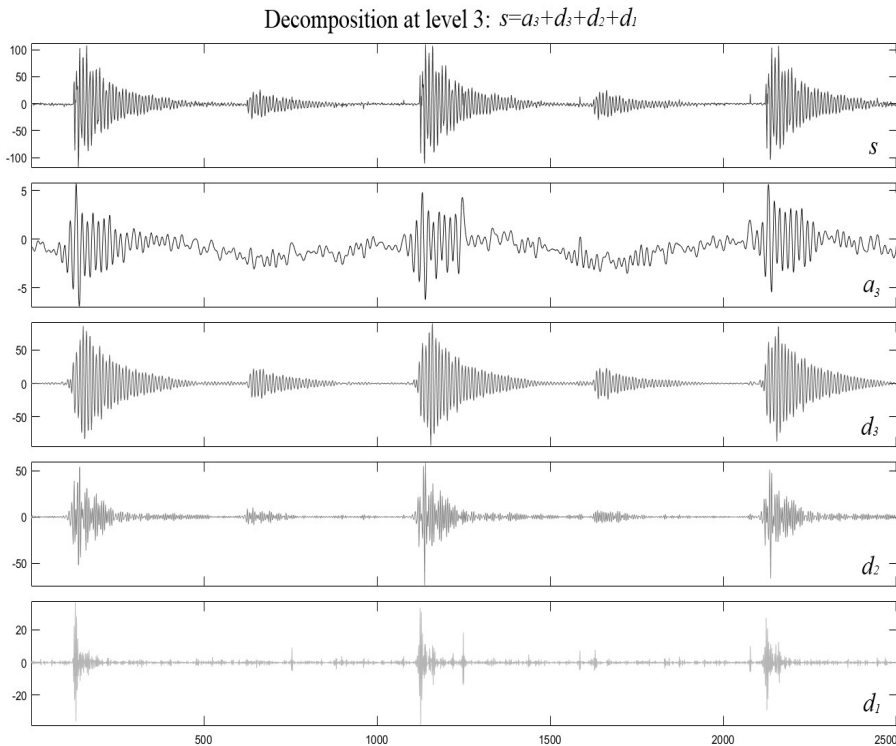


Рис. 5. Разложение акустического сигнала колебаний осциллятора с соударениями при помощи дискретного вейвлет-преобразования

на рис. 4), которая проявляется более отчетливо при увеличении уровня разложения исходного сигнала. График детализирующей компоненты d_3 обладает более правильной формой и позволяет исследовать коэффициент затухания начального сигнала. Если провести обратное вейвлет-преобразование, убрав при этом определенные элементы разложения, то можно получить, в зависимости от требуемых целей, отфильтрованный или сжатый сигнал.

На рис. 6 показаны проекции поверхностей и линии коэффициентов $W(a, b)$ непрерывного вейвлет-преобразования акустического сигнала на плоскость (a, b) , полученные с помощью вейвлета Мейера:

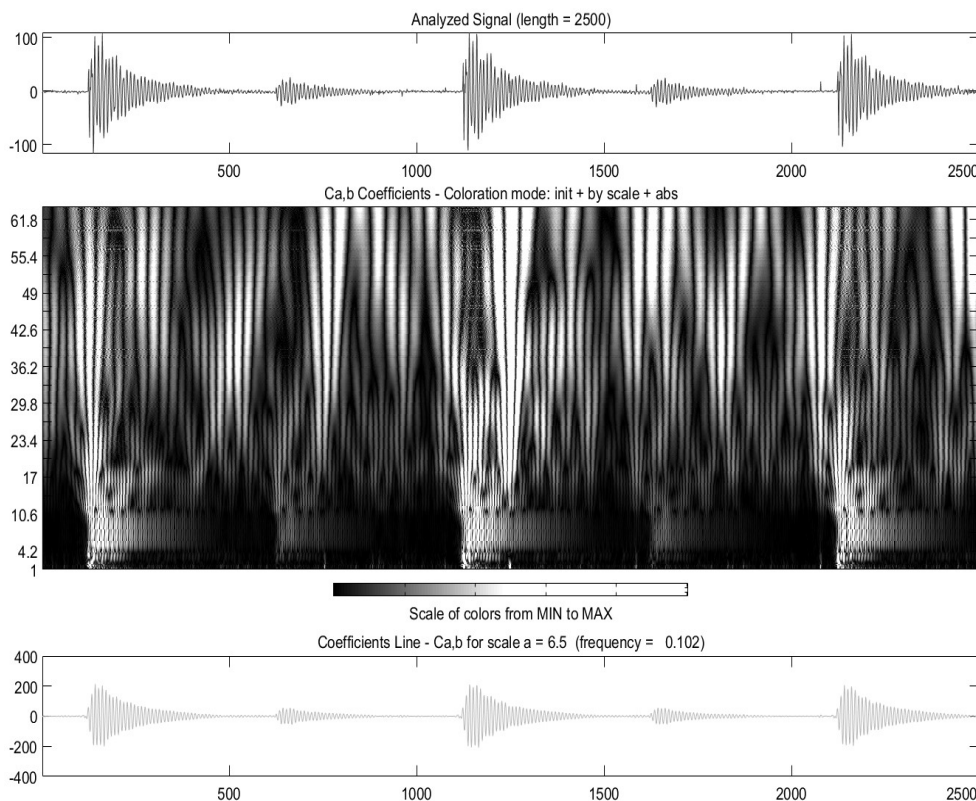


Рис. 6. Непрерывное вейвлет-преобразование акустического сигнала колебаний осциллятора с соударениями

Из рис. 6 видно, что в области малых значений масштабного коэффициента a локализованы составляющие вейвлет-спектра, соответствующие частоте исследуемого сигнала. Эта частота соответствует соударениям осциллятора с поверхностью образца. Светлые участки спектра имеют наибольшие значения коэффициентов $W(a, b)$, поэтому вид данного спектра в выбранном масштабе соответствует структуре исходного сигнала. Линия коэффициентов вейвлет-преобразования для масштаба $a = 6.5$ имеет близкую к исходному сигналу форму. Таким образом, в нашем случае вейвлет-преобразование акустических сигналов, возникающих при соударении зонда с твердой поверхностью, позволяет выявлять в частотной области мелкомасштабные детали, которые важны для интерпретации эксперимента. Если выделить эти детали и осуществить обратное преобразование, то можно получить полезную информацию об исследуемом сигнале.

4. Выводы

В настоящей работе можно сделать следующие выводы:

- 1) программа Simulink позволяет проводить имитационное моделирование осциллятора с соударениями, который описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка;
- 2) моделирование показывает, что на колебания, задаваемые внешней силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют упругим соударениям осциллятора с поверхностью твердого тела;
- 3) программа Wavelet Toolbox позволяет проводить спектральный анализ численного решения урав-

нения колебаний осциллятора с соударениями и натурных экспериментальных результатов, полученных на измерительном стенде;

4) проведенные исследования показывают, что разработанная теоретическая модель хорошо описывает экспериментальные результаты.

Литература

- [1] Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990. 312 с.
- [2] Сборник трудов Всесоюзного симпозиума "Колебательные процессы в биологических и химических системах" / под ред. Г.М. Франка. М.: Наука, 1967. 439 с.
- [3] Паршаков А.Н. Физика колебаний: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. 302 с.
- [4] Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
- [5] Bhushan B. Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology. Berlin: Springer, 2010. 956 p.
- [6] Дьяконов В.П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М.: ДМК-Пресс, 2008. 784 с.
- [7] Нарожнов В.В. Нелинейная динамика и акустические сигналы при упругих соударениях зонда с поверхностью твердого тела // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 6. С. 49–57.
- [8] Нарожнов В.В. Имитационное моделирование нелинейного осциллятора с учетом упругих соударений // Нелинейный мир. 2014. Т.12. № 11. С. 32–36.
- [9] Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т.166. № 11. С. 1145–1170. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199611a.1145>.
- [10] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 464 с.
- [11] Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 448 с.
- [12] Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 176 с.
- [13] Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // Physical Review E. 1993. Vol. 47, № 2. P. 875–884. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0068360>.
- [14] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way. MA: Academic Press, 2009. 805 p.
- [15] Ke L., Houjun W. A Novel Wavelet Transform Modulus Maxima Based Method of Measuring Lipschitz Exponent // International Conference on Communications, Circuits and Systems, Kokura. 2007. P. 628–632.
- [16] Стенд для исследования вязкоупругих свойств металлов и сплавов с помощью зондового акустического метода: пат. № 2552600 Рос. Федерация: G01N11/00 / Нарожнов В.В., Рехвиашвили С.Ш.; заявитель и патентообладатель Институт прикладной математики и автоматизации. № 2013124372/28; дата приоритета 27.05.2013; выдан 04.03.2015.
- [17] Лебедева Е.А., Постников Е.Б. Вейвлет Мейера улучшенной локализации // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 122–124.

References

- [1] Moon F. *Khaoticheskie kolebaniia: Vvodnyi kurs dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Chaotic oscillations: An introductory course for scientists and engineers]. M.: Mir, 1990, 312 p. [in Russian].
- [2] *Sbornik trudov Vsesoiuznogo simpoziuma "Kolebatel'nye protsessy v biologicheskikh i khimicheskikh sistemakh"* Pod red. G.M. Franka [Proceedings of the All-Union Symposium "Oscillatory processes in biological and chemical systems" / G.M. Frank (Ed.)]. M.: Nauka, 1967, 439 p. [in Russian].
- [3] Parshakov A.N. *Fizika kolebaniï: ucheb. posobie* [Physics of oscillations: study guide]. Perm: Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta, 2010, 302 p. [in Russian].
- [4] Popov V.L. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeistviia i fizika treniia. Ot nanotribologii do dinamiki zemletriaseniï* [Mechanics of contact interaction and physics of friction. From nanotribology to the dynamics of earthquakes]. M.: FIZMATLIT, 2013, 352 p. [in Russian].
- [5] Bhushan B. Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology. Berlin: Springer, 2010, 956 p. [in English].
- [6] Dyakonov V.P. *Simulink 5/6/7: Samouchitel'* [Simulink 5/6/7: self-teaching guide]. M.: DМК-Press, 2008, 784 p. [in Russian].

- [7] Narozhnov V.V. *Nelineinaia dinamika i akusticheskie signaly pri uprugikh soudareniiakh zonda s poverkhnost'iu tverdogo tela* [Nonlinear dynamics and acoustic signals in elastic collisions of a probe with a solid surface]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaia nelineinaia dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2013, Vol. 21, no 6, pp. 49–57 [in Russian].
- [8] Narozhnov V.V. *Imitatsionnoe modelirovanie nelineinogo ostsiillatora s uchetom uprugikh soudarenii* [Simulation modeling of a nonlinear oscillator considering elastic collisions]. *Nelineinyi mir* [Nonlinear World], 2014, Vol. 12, no. 11, pp. 32–36 [in Russian].
- [9] Astafieva N.M. *Veivlet-analiz: osnovy teorii i primery primeneniia* [Wavelet analysis: the foundations of the theory and examples of applications]. *UFN* [Uspekhi Fizicheskikh Nauk (Advances in Physical Sciences)], 1996, Vol. 166, no. 11, pp. 1145–1170 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199611a.1145>.
- [10] Dobesi I. *Desiat' lektsii po veivletam* [Ten lectures on wavelets]. Izhevsk: NITs "Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2001, 464 p. [in Russian].
- [11] Dyakonov V.P. *Veivlety. Ot teorii k praktike* [Wavelets. From theory to practice]. M.: SOLON-R, 2002, 448 p. [in Russian].
- [12] Koronovsky A.A., Hramov A.E. *Neprreryvnyi veivletnyi analiz i ego prilozheniia* [Continuous wavelet analysis and its applications]. M.: FIZMATLIT, 2003, 176 p. [in Russian].
- [13] Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical Review E.*, 1993, Vol. 47, no. 2, pp. 875–884 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0068360>.
- [14] Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way*. MA: Academic Press, 2009, 805 p. [in English].
- [15] Ke L., Houjun W. A Novel Wavelet Transform Modulus Maxima Based Method of Measuring Lipschitz Exponent. *International Conference on Communications, Circuits and Systems, Kokura, 2007*, pp. 628–632 [in English].
- [16] Narozhnov V.V., Rekhviashvili S.Sh. Stand for the study of viscoelastic properties of metals and alloys using the probe acoustic method: patent 2552600 Russian Federation: G01N11/00. ; Applicant and patent owner Institute of Applied Mathematics and Automation. №2013124372/28; Priority date: May 27, 2013; issued on 03/04/2015 [in Russian].
- [17] Lebedeva E.A., Postnikov E.B. *Veivlet Meiera uluchshennoi lokalizatsii* [Meyer's wavelet of improved localization]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniie* [Numerical Methods and Programming], 2006, Vol. 7, pp. 122–124 [in Russian].

V. V. Narozhnov²

MODELING OF A NONLINEAR OSCILLATOR WITH COLLISIONS

In present work the equation of the oscillator with collisions, which is described under the Hertz contact theory is solved numerically. The computational experiment showed that on the overall oscillations, excited by an external force, are imposed the damped oscillations at a higher frequency, which correspond to elastic collisions of the oscillator. Wavelet transform of the numerical solution of oscillator equation and the experimental results obtained with the measuring stand was performed. Wavelet analysis of complex acoustic signals allows to detect small-scale features that are important for the interpretation of the experiment.

Key words: mathematical modeling, nonlinear oscillator, numerical solution of differential equations, wavelet analysis.

Статья поступила в редакцию 21/II/2018.

The article received 21/II/2018.

²Narozhnov Viktor Valerievich (narozhnov.victor@gmail.com), Laboratory of the Automation of Measurements, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.