УДК 519.999

DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-1-20-24

Ю.О. Яковлева[1]

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье рассмотрена характеристическая задача для уравнения гиперболического типа третьего порядка с некратными характеристиками, постановка которой является корректной по Адамару. В явном виде приведено регулярное решение поставленной характеристической задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками. Для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка исследуется корректность по Адамару постановки характеристической задачи. Получено регулярное решение характеристической задачи для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка. В результате исследований сформулирована теорема о корректности по Адамару постановки характеристической задачи для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение третьего порядка, некратные характеристики, характеристическая задача, система гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка, корректность по Адамару.

Введение

Исследование корректности постановки начально-краевых задач является одной из актуальных проблем в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Исследованию корректности постановки начально-краевых задач для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными порядка выше второго посвящены работы многих как отечественных так и зарубежных ученых [1–3].

С точки зрения постановки граничных задач наиболее хорошо изучены дифференциальные уравнения с частными производными классических типов и непосредственные их обобщения.

Известно [1], что классическая задача Гурса для уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными с граничными условиями на двух характеристиках из различных семейств всегда является корректной по Адамару.

В монографии Бицадзе А.В. [4] приводятся примеры, показывающие, что для системы второго порядка с некратными характеристиками, задача Гурса является некорректной по Адамару [5].

В статье [6] рассмотрен пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса в плоскости независимых переменных x, y для уравнений гиперболического типа третьего порядка.

В работах [6; 7] приведено исследование корректности по Адамару характеристических задач для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками.

В настоящей работе сформулированы и исследованы характеристические задачи для гиперболического уравнения третьего порядка и системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка в плоскости независимых переменных $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Яковлева Юлия Олеговна (julia.yakovleva@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Пусть $x \in I_c$, $I_c = [a, b]$, $c = \frac{a+b}{2}$. Отрезок I_c имеет центральную симметрию: $\forall x \in I_c$, $2c - x \in I_c$. Для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f_{c,\,od}(x) = \frac{f(x) - f(2c-x)}{2},\ f_{c,\,ev}(x) = \frac{f(x) + f(2c-x)}{2},\ f(x) = f_{c,\,od}(x) + f_{c,\,ev}(x).$$

При $c = 0$ будем обозначать $f_{od}(x)$, $f_{ev}(x)$ нечетную и четную части функции $f(x)$ соответственно.

В плоскости независимых переменных $D = \{(x,\,y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{1.1}$$

Известно [6], что прямые $x = C_1$, $y = C_2$, $x + y = C_3$, $C_i = const$,
$C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ являются характеристиками этого уравнения (1.1). Уравнение (1.1) является строго гиперболическим по Петровскому [8].

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$u(x, y) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x + y).$$

Рассмотрим следующую характеристическую задачу.

Задача G1. Найти регулярное решение $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ уравнения (1.1) в плоскости D, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &u\,(x,\,0) = \alpha(x),\\ &u\,(0,\,y) = \beta(y),\\ &u\,(x,\,-x) = \gamma(x), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

Регулярным в плоскости D решением [6, 7] задачи G1 (1.2) уравнения (1.1) будем называть функцию $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, имеющую в плоскости D все непрерывные частные производные, входящие в уравнение (1.1) и удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям задачи G1 (1.2) в обычном смысле.

Теорема 1. Если $\gamma_{od}(x) = \alpha_{od}(x) - \beta_{od}(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_{od}(x)$, $\beta_{od}(x)$, $\gamma_{od}(x)$ — нечетные части функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ соответственно, то задача G1 (1.2) для уравнения (1.1) корректна по Адамару.

Существование корректного по Адамару решения характеристической задачи G1 в плоскости D для уравнения (1.1) докажем конструктивно.

Функции f_1, f_2 и f_3 такие, что удовлетворяют граничным условиям задачи (1.2). Учитывая при этом условия согласования $f_1(0) + f_2(0) = \alpha(0) - f_3(0)$, получим

$$\begin{aligned} &f_1(x) = \alpha(x) - f_3(x) - f_2(0),\\ &f_2(y) = \beta(y) - f_3(y) - f_1(o),\\ &f_3(x) + f_3(-x) = \alpha(x) + \beta(-x) - \gamma(x) - \alpha(0) + 2f_3(0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда

$$f_3(-x) + f_3(x) = \alpha(-x) + \beta(x) - \gamma(-x) - \alpha(0) + 2f_3(0),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) получим, что

$$\begin{aligned} &\gamma_{od}(x) = \alpha_{od}(x) - \beta_{od}(x),\\ &f_3(x) = \tfrac{1}{2}\left[\alpha_{ev}(x) + \beta_{ev}(x) - \gamma_{ev}(x) - \alpha(0) + 2f_3(0)\right]. \end{aligned}$$

Тогда функция $u(x,\,y)$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) - \tfrac{1}{2}\alpha(0) + \tfrac{1}{2}\left[\alpha_{ev}(x+y) - \alpha_{ev}(x) - \alpha_{ev}(y)\right] +&\\ +\tfrac{1}{2}\left[\beta_{ev}(x+y) - \beta_{ev}(x) - \beta_{ev}(y)\right] -&\\ -\tfrac{1}{2}\left[\gamma_{ev}(x+y) - \gamma_{ev}(x) - \gamma_{ev}(y)\right].& \end{aligned} \tag{1.5}$$

Формула (1.5) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся регулярным решением характеристической задачи G1.

2. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим одну систему гиперболических уравнений третьего порядка

$$U_{xxy} - LU_{xyy} = 0, \tag{2.1}$$

где $U(x, y) = (u^1(x, y), u^2(x, y))^\top$ — двумерная вектор-функция, L –постоянная матрица второго порядка с различными действительными собственными значениями λ_1, λ_2.

Существует квадратная матрица второго порядка [9]

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

такая, что $T^{-1}LT = \Lambda_L$, где

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Указанная система (2.1) имеет две кратные $x = 0$, $y = 0$ характеристики и две различные $y + \lambda_1 x = 0$, $y + \lambda_2 x = 0$.

Задача G2. Найти решение $U\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы уравнений (2.1), удовлетворяющее условиям:

$$U\,(x,\,0) = T\alpha(x),\, U\,(0,\,y) = T\beta(y),$$
$$U\,(x,\,-\lambda_i x) = T\gamma(x),$$

где $\alpha(x) = (\alpha^1(x), \alpha^2(x))^\top$, $\beta(y) = (\beta^1(y), \beta^2(y))^\top$, $\gamma(x) = (\gamma^1(x), \gamma^2(x))^\top$, $\alpha^i(x)$, $\beta^i(y)$, $\gamma^i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1,\,2$.

Теорема 1. Если $\gamma^1_{od}(x) = \alpha^1_{od}(x) - \beta^1_{od}(\lambda_1 x)$, $\gamma^2_{od}(x) = \alpha^2_{od}(x) - \beta^2_{od}(\lambda_2 x)$, то задача G2 корректна по Адамару.

Докажем существование корректного по Адамару решения характеристической задачи G2 в плоскости D для системы гиперболических уравнений (2.1) конструктивным путем.

Система (2.1) эквивалентна следующей системе:

$$V_{xxy} - \Lambda_L V_{xyy} = 0; \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} v^1_{xxy} - \lambda_1 v^1_{xyy} = 0, \\ v^2_{xxx} - \lambda_2 v^2_{xyy} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, исходная матричное уравнение (2.1) эквивалентно системе (2.2) двух дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет некратные характеристики. Применяя приведенные выше исследования, решение характеристической задачи G2 для каждого уравнения системы (2.2) может быть получено в регулярном виде.

Вектор-функция $V(x,y) = (v^1(x,y), v^2(x,y))^\top$ есть решение системы (2.2), где

$$\begin{aligned} v^1(x,y) &= \alpha^1(x) + \beta^1(y) - \tfrac{1}{2}\alpha^1(0) + \tfrac{1}{2}\left[\alpha^1_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_1}y + x) - \alpha^1_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_1}x) - \alpha^1_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_1}y)\right] + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[\beta^1_{ev}(y + \lambda_1 x) - \beta^1_{ev}(x) - \beta^1_{ev}(y)\right] - \tfrac{1}{2}\left[\gamma^1_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_1}y + x) - \gamma^1_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_1}x) - \gamma^1_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_1}y)\right], \\ v^2(x,y) &= \alpha^2(x) + \beta^2(y) - \tfrac{1}{2}\alpha^2(0) + \tfrac{1}{2}\left[\alpha^2_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_2}y + x) - \alpha^2_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_2}x) - \alpha^2_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_2}y)\right] + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[\beta^2_{ev}(y + \lambda_2 x) - \beta^2_{ev}(x) - \beta^2_{ev}(y)\right] - \tfrac{1}{2}\left[\gamma^2_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_2}y + x) - \gamma^2_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_2}x) - \gamma^2_{ev}(\tfrac{1}{\lambda_2}y)\right]. \end{aligned}$$

Решение характеристической задачи G2 для системы (2.2) ищем в виде решения матричного уравнения $U = TV$:

$$\begin{cases} u^1(x,y) = t_{11}v^1 + t_{12}v^2, \\ u^2(x,y) = t_{21}v^1 + t_{22}v^2. \end{cases}$$

Полученная вектор-функция $U(x,y) = (u^1(x,y), u^2(x,y))^\top$ является решением характеристической задачи G2.

Литература

[1] Бицадзе А.В. К вопросу о постановке характеристической задачи для гиперболических систем второго порядка // ДАН СССР. 1973. № 6(223). С. 7–14.

[2] Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Математические заметки. 2003. № 4(74). С. 517–528. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm282.

[3] Харибегашвили С.С. О разрешимости одной характеристической задачи для вырождающихся систем второго порядка //Дифференциальные уравнения и их приложения. 1989. №1(25). С. 154–162.

[4] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

[5] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover Publications, 1923. 338 с.

[6] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. № 1(13). С. 3–6.

[7] Яковлева Ю.О. Одна характеристическая задача для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестник СамГТУ. Серия физ-мат. науки. 2012. № 3. С. 180–183.

[8] Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. 500 с.

[9] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с.

References

[1] Bitsadze A.V. *K voprosu o postanovke kharakteristicheskoi zadachi dlia giperbolicheskikh sistem vtorogo poriadka* [On a question on the formulation of characteristic problem for second-order hyperbolic systems]. *DAN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1973, №6(223), pp. 7-14 [in Russian].

[2] Dzhokhadze O.M. *Vliianie mladshikh chlenov na korrektnost' postanovki kharakteristicheskikh zadach dlia giperbolicheskikh uravnenii tret'ego poriadka* [Influence of Lower Terms on the Well-Posedness of Characteristics Problems for Third-Order Hyperbolic Equations]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2003, № 4(74), pp. 491–501 [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm282.

[3] Kharibegashvili S.S. *O razreshimosti odnoi kharakteristicheskoi zadachi dlia vyrozhdaiushchikhsia sistem vtorogo poriadka* [On solvability of a characteristic problem for degenerate second-order hyperbolic systems]. *Differentsial'nye uravneniia i ikh prilozheniia* [Differential equations and their applications], 1989, №1(25), pp. 154–162 [in Russian].

[4] Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. M.: Nauka, 1981, 448 p. [in Russian].

[5] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover Publications, 1923, 338 p. [in English].

[6] Andreev A.A., Yakovleva Ju.O. *Kharakteristicheskaia zadacha dlia odnogo giperbolicheskogo differentsial'nogo uravneniia tret'ego poriadka s nekratnymi kharakteristikami* [The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differentional Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2013, № 1(13), pp. 3–6 [in Russian].

[7] Yakovleva Ju.O. *Odna kharakteristicheskaia zadacha dlia giperbolicheskogo differentsial'nogo uravneniia tret'ego poriadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami* [One characteristic problem for the general hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics]. *Vestnik SamGTU. Seriia fiz-mat. nauki* [Vestnik of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2012, № 3(28), pp. 180–183 [in Russian].

[8] Petrovskiy I.G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. M.: Nauka, 1986, 500 p. [in Russian].

[9] Gantmakher F.R. *Teoriia matrits* [Theory of matrices]. M.: Nauka, 1988, 549 p. [in Russian].

Ju.O. Yakovleva[2]

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR THE ONE SYSTEM OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

In the paper the well-posed characteristic problem is considered for the hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics. The regular solution of the characteristic problem for the hyperbolic differential equation of the third order with the nonmultiple characteristics is constructed in an explicit form. The well-posed characteristic problem is considered for one system of hyperbolic differential equations of the third order. The regular solution of the characteristic problem for the one system of hyperbolic differential equations of the third order is constructed. The theorem for the Hadamard's well-posedness characteristic problem for the one system of hyperbolic differential equations is considered as the result of the research.

Key words: hyperbolic equation of the third order, nonmultiple characteristics, characteristic problem, system of hyperbolic differential equations of the third order, Hadamard's well-posedness.

Статья поступила в редакцию 18/I/2018.
The article received 18/I/2018.

[2] *Yakovleva Julia Olegovna* (julia.yakovleva@mail.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.