МАТЕМАТИКА

УДК 517.956 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-1-7-13

С.А. Алдашев[1]

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

Многомерные гиперболо-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерным волновым уравнением. Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа. Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления исследуемых краевых задач. Автором ранее изучена задача Дирихле для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой всей цилиндрической области. В данной работе исследована задача типа Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе и получен явный вид ее классического решения. При этом однозначная разрешимость зависит только от высоты гиперболических части цилиндрической области, а также приведен критерий единственности решения.

Ключевые слова: корректность, задачи типа Дирихле, цилиндрическая область, многомерное уравнение,критерия.

Гиперболо-эллиптические уравнения в частных производных описывают такие процессы как: 1) поведение световых волн с около каустической амплитудой [1; 2]. 2) Создание гидродинамических порогов [3]. Также приложения этих уравнений встречаются в геометрии (напр., гармонические поля в расширенном проективном пространстве [4]) и в астрономии (напр., в моделях раней Вселенной и космического ускорения [5]).

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x = (x_1, ..., x_m), m \geqslant 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находиться в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе [6].

Более полную библиографию по приложениям можно найти в [7].

При изучении этих приложений, возникает необходимость получения явного представления исследуемых краевых задач.

В [8; 9] найдены достаточные условия единственности решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в многомерной цилиндрической области.

Автором в [10; 11] изучена задача Дирихле для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты расматриваемой всей цилиндрической области.

Задачам типа Дирихле для уравнений смешанного типа на плоскости посвещены работы [12; 13].

В данный работе исследована задача типа Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе и получен явный вид ее классического решение. При этом, однозначная разрешимость зависит только от высоты гиперболической части цилиндрической области, а также приведен критерий единственности решения.

Алдашев Серик Аймурзаевич (aldash51@mail.ru), кафедра математики и математического моделирования, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина 125.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=\beta<0$, где $|x|-$ длина вектора $x==(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, $\Gamma_\beta-$части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$, $\sigma_\alpha-$ верхнее, а $\sigma_\beta-$ нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее $S-$ общая часть границ областей Ω_a и Ω_b представляющая множество $\{t=0,\,0<|x|<1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$(sgnt)\Delta_x u-u_{tt}=0, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m,\ m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t,\ r\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta_1<2\pi,\ 0\leqslant\theta_i\leqslant\pi,\ i=2,3,...,m-1,\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Рассмотрим следующую задачу типа Дирихле

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\bar\Omega_{\alpha\beta})\cap\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\alpha}=\varphi(r,\theta),u\big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta),$$
$$u\big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),u\big|_{\sigma_\beta}=\tau(r,\theta),u_t\big|_{\sigma_\beta}=\nu(r,\theta), \tag{2}$$

при этом $\varphi(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta),\ \psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta),\ \psi_2(\beta,\theta)=\tau(1,\theta),\ \psi_{2t}(\beta,\theta)=\nu(1,\theta)$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка $n,\ 1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2),\ W^l_2(S),\ l=0,1,...-$ пространства Соболева.

Имеет место [14]

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W^l_2(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W^l_2(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f^1_0(r)|\leqslant c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{2l}|f^k_n(r)|^2\leqslant c_2,\ \ c_1,\,c_2=const.$$

Через $\psi^k_{2n}(t),\ \bar\tau^k_n(r),\ \bar\nu^k_n(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $\psi_2(t,\theta),\ \tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)$.

Тогда справедливы следующие теоремы

Теорема 1. Если $\varphi(r,\theta)\in W^l_2(\sigma_\alpha),\psi_1(t,\theta)\in W^l_2(\Gamma_\alpha),\psi_2(t,\theta)\in W^l_2(\Gamma_\beta),\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\in W^l_2(S),l>\frac{3m}{2}$, и

$$sin\mu_{s,n}\alpha\neq 0,s=1,2,..., \tag{4}$$

задача 1 однозначна разрешима,где $\mu_{s,n}-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z),n=0,1,....$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Теорема 2. Решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

2. Доказательства теоремы

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид [10; 11]

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u+u_{tt}=0, \tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно [14], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m- -2)$, $n = 0, 1, ...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собствен- ных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [14], будем иметь

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} + \bar{u}^k_{ntt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = 0, k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\bar{u}^k_n(1,t) = \psi^k_{2n}(t),\ \bar{u}^k_n(r,\beta) = \bar{\tau}^k_n(r),\ \bar{u}^k_{nt}(r,\beta) = \bar{\nu}^k_n(r),\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots. \tag{8}$$

В (7), (8) произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_{2n}(t)$, получим

$$\bar{\upsilon}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}^k_n + \bar{\upsilon}^k_{ntt} = \bar{f}^k_n(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{\upsilon}^k_n(1,t) = 0,\ \bar{\upsilon}^k_n(r,\beta) = \tau^k_n(r),\ \bar{\upsilon}^k_{nt}(r,\beta) = \nu^k_n(r),\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots, \tag{10}$$

$$\bar{f}^k_n(r,t) = \frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_n(t) - \psi^k_{2ntt}, \tau^k_n(r) = \bar{\tau}^k_n(r) - \psi^k_{2n}(\beta), \nu^k_n(r) = \bar{\nu}^k_n(r) - \psi^k_{2nt}(\beta).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}}\upsilon^k_n(r,t)$ задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon^k_n \equiv \upsilon^k_{nrr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon^k_n + \upsilon^k_{ntt} = \tilde{f}^k_n(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon^k_n(1,t) = 0, \upsilon^k_n(r,\beta) = \tilde{\tau}^k_n(r), \upsilon^k_{nt}(r,\beta) = \tilde{\nu}^k_n(r), \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4},\ \tilde{f}^k_n(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}^k_n(r,t), \tilde{\tau}^k_n(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\tau^k_n(r), \tilde{\nu}^k_n(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\nu^k_n(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $\upsilon^k_n(r,t) = \upsilon^k_{1n}(r,t) + \upsilon^k_{2n}(r,t)$, где $\upsilon^k_{1n}(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon^k_{1n} = \tilde{f}^k_n(r,t), \upsilon^k_{1n}(1,t) = 0, \upsilon^k_{1n}(r,\beta) = \upsilon^k_{1nt}(r,\beta) = 0, \tag{13}$$

а $\upsilon^k_{2n}(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon^k_{2n} = 0, \upsilon^k_{2n}(1,t) = 0, \upsilon^k_{2n}(r,\beta) = \tilde{\tau}^k_n(r), \upsilon^k_{2nt}(r,\beta) = \tilde{\nu}^k_n(r). \tag{14}$$

Решение выше указанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{15}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a^k_{s,n}(t)R_s(r),\ \tilde{\tau}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b^k_{s,n}R_s(r),\ \tilde{\nu}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e^k_{s,n}R_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), с учетом (16), получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} + \mu\right)R_s = 0,\ 0 < r < 1, R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{17}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a^k_{s,n}(t),\ \beta < t < 0,\ T_s(\beta) = 0,\ T_{st}(\beta) = 0,. \tag{18}$$

Ограниченным решением задачи (17) является [15]

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{19}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu^2_{s,n}$.

Задача (18) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [6]

$$T_{s,n}(t) - \mu^2_{s,n}\int_\beta^t (t-\xi)T_{s,n}(\xi)d\xi = \int_\beta^t (t-\xi)a_{s,n}(\xi)d\xi, \tag{20}$$

которое имеет, и притом единственное решение.

Подставляя (19) в (16) получим

$$
\begin{gathered}
r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\;\; r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\tau}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}^kJ_\nu(\mu_{s,n}r),\\
r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{s,n}^kJ_\nu(\mu_{s,n}r),\; 0<r<1.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Ряды (21) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [16], если

$$
a_{s,n}^k(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi. \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{s,n}^k&=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\\
e_{s,n}^k&=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\nu}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\mu_{s,n}, s=1,2,...-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (19), (20) получим решение задачи (13) в виде

$$
\upsilon_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{24}
$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (22).

Далее подставляя (19) в (14), с учетом (16), будем иметь

$$
V_{stt}-\mu_{s,n}^2V_s=0,\;\beta<t<0, V_s(\beta)=b_{s,n}^k, V_{st}(\beta)=e_{s,n}^k,
$$

которой произведя замену

$$
G_{s,n}(t)=V_{s,n}(t)-b_{s,n}^k-(t-\beta)b_{s,n}^k, \tag{25}
$$

приходим к следующей задаче

$$
G_{s,ntt}-\mu_{s,n}^2G_{s,n}=q_{s,n}^k(t), \beta<t<0, G_{s,n}(\beta)=0, G_{s,nt}(\beta)=0, \tag{26}
$$

$q_{s,n}^k(t)=\mu_{s,n}^2[b_{s,n}^k+(t-\beta)e_{s,n}^k]$.

Задача (26) сводится также к интегральному уравнению (20), где вместо $a_{s,n}^k(t)$ берется $q_{s,n}^k(t)$.

Из (19), (20), (25) найдем решение задачи (14) в виде

$$
\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}V_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{27}
$$

где $b_{s,n}^k, e_{s,n}^k$ находятся из (23).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$
u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}[\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)]]Y_{n,m}^k(\theta), \tag{28}
$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t), \upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (24) и (27).

Учитывая формулу [16] $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки [17; 14]

$$
J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+0(\frac{1}{z^{3/2}}),\;\nu\geqslant 0, \tag{29}
$$

$$
|k_n|\leqslant c_1n^{m-2},\;\left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leqslant c_2n^{\frac{m}{2}-1+l},\; j=\overline{1,m-1},\; l=0,1,...
$$

также леммы, ограничения на заданные функций $\psi_2(t,\theta), \tau(r,\theta), \nu(r,\theta)$, как в [10; 11] можно доказать, что полученное решение в виде (28) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (24), (27), (28) при $t\to -0$ имеем

$$
u(r,\theta,0)=\tau_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_{1n}^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),
$$

$\tau_{1n}^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum\limits_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[T_{s,n}(0)+V_{s,n}(0)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$

Из (21)–(23), (29), а также из леммы вытекает, что $\tau_1(r,\theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, задача 1 приводится в области Ω_α к следующей задаче Дирихле для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0. \tag{30}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (30) в области Ω_α из класса $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau_1(r,\theta),\ u\big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta),\ u\big|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta).$$

В [18; 19] доказаны теоремы 1 и 2 для задачи 2 при выполнение условия (4). Отсюда следует их справедливость и для задачи 1.

Так как в [18; 19] получен явный вид решения задачи 2, то можно записать явное представление решения и для задачи 1.

Литература

[1] Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic. Communications in Pure and Applied Mathematics. 1966. Vol. 19. P. 215–250. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160190207.

[2] Magnanini R., Talenti G. Approaching a partial differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type. In: Anikonov,Y., Bukhageim, A., Kabanikhin, S., Romanov,V. (eds.) Ill-posed and Inverse Problems. VSP. Utrecht. Holland. 2002. P. 263–276.

[3] Stoker J.J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. Wiley-Interscience. New York, 1992. 600 p.

[4] Otway T.H. Variational equations on mixed Riemannian-Lorentzian metrics // Journal of Geometric Physics. 2008. Vol. 58. P. 1043–1061. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.03.003.

[5] Hartle J.B., Hawking S.W. Wave function of the universe // Physical Review D. 1983. Vol. 28. P. 2960–2975. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960.

[6] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

[7] Otway T.H. Elliptic-Hyperbolic Partial Differential Equations. Springer: Berlin, 2015. 128 p.

[8] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[9] Нахушев А.М. О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. Адыг (Черкес) межд. акад. наук. 2006. Т. 8. № 2. С. 32–42.

[10] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Известия НАН РК. Сер. физико-математическая. Алматы. 2014. № 3. С. 136–143.

[11] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений // Нелинейные колебания. Киев. 2013. Т. 16. № 4. С. 435–451.

[12] Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 696–698. Т. 333. № 1. С. 16–18.

[13] Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 2001–2009.

[14] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

[15] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

[16] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. Т. 2. 1974. 295 с.

[17] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1966. 724 с.

[18] Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirihlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // Math. Probl. Eng. 2010. Vol. 2010. Article ID653215-7p.

[19] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилилндрической области для многомерных гиперболических уравнений волновым оператором // Докл. Адыг (Черкес.) Междунар. акад. наук. 2011. Т. 13. № 1. С. 21–29.

References

[1] Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 1966, Vol. 19, pp. 215–250 [in English]. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160190207.

[2] Magnanini R., Talenti G. Approaching a partial differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type. In: Anikonov Y., Bukhageim A., Kabanikhin S., Romanov V. (Eds.) *Ill-posed and Inverse Problems*, pp. 263–276. VSP, Utrecht, Holland, 2002 [in English].

[3] Stoker J.J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. Wiley-Interscience, New York, 1992, 600 p. [in Englsih].

[4] Otway T.H. Variational equations on mixed Riemannian-Lorentzian metrics. *Journal of Geometric Physics*, 2008, Vol. 58, pp. 1043–1061 [in English]. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.03.003.

[5] Hartle J.B., Hawking S.W. Wave function of the universe. *Physical Review D*, 1983, Vol. 28, pp. 2960–2975 [in English]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960.

[6] Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. M.: Nauka, 1981, 448 p. [in Russian].

[7] Otway T.H. Elliptic-Hyperbolic Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 2015, 128 p. [in English].

[8] Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Problems with displacement for a partial differential equation]. M.: Nauka, 2006, 287 p. [in Russian].

[9] Nakhushev A.M. *O zadache Dirikhle dlia uravneniia smeshannogo tipa* [On the Dirichlet problem for a mixed-type equation]. *Dokl. Adyg (Cherkes) mezhd. akad. nauk* [Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2006, Vol. 8, no. 2, pp. 32–42 [in Russian].

[10] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia mnogomernogo uravneniia Lavrent'eva — Bitsadze* [Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Izvestiia NAN RK. Ser. fiziko-matematicheskaia* [Izvestiya of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 3, pp. 136–143 [in Russian].

[11] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia odnogo klassa mnogomernykh giperbolo-ellipticheskikh uravnenii* [Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for one class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations]. *Nelineinye kolebaniia* [Nonlinear oscillations], 2013, Vol. 16, no. 4, p. 435–451 [in Russian].

[12] Soldatov A.P. *Zadachi tipa Dirikhle dlia uravneniia Lavrent'eva — Bitsadze* [Problems of Dirichlet type for the Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Dokl. RAN* [Doklady Mathematics], 1993, Vol. 332, no. 6, pp. 696–69: Vol. 333, no. 1, pp. 16–18 [in Russian].

[13] Soldatov A.P. *Zadachi tipa Dirikhle dlia uravneniia Lavrent'eva — Bitsadze* [Problems of Dirichlet type for the Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 1994, Vol. 30, no. 11, pp. 2001–2009 [in Russian].

[14] Mikhlin S.G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Multidimensional singular integrals and integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1962, 254 p. [in Russian].

[15] Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].

[16] Bateman G., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions]. M.: Nauka, Vol. 2, 1974, 295 p. [in Russian].

[17] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].

[18] Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirihlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation. *Math. Probl. Eng.*, 2010, Vol. 2010, Article ID653215-7 p. [in English].

[19] Aldashev S.A. [Correctness of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations by the wave operator]. *Dokl. Adyg (Cherkes) mezhd. akad. nauk* [Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2011, Vol. 13, no. 1, pp. 21–29 [in Russian].

S.A. Aldashev[2]

THE CORRECTNESS OF A DIRICHLET TYPE PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR THE MULTIDIMENSIONAL LAVRENTIEV — BITSADZE EQUATION

Multidimensional hyperbolic-elliptic equations describe important physical, astronomical and geometric processes. It is known that vibrations of elastic membranes in space according to the Hamiltonian principle can be modeled by a multidimensional wave equation. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, the Hamiltonian principle also yields the multidimensional Laplace equation. Consequently, the vibrations of elastic membranes in space can be modeled as the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the boundary value problems being studied. The author has previously studied the Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic-elliptic equations, where a unique solvability of this problem is shown, which essentially depends on the height of the entire cylindrical region under consideration. In this paper we investigate a Dirichlet type problem in the cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation and obtain an explicit form of its classical solution. In this case, the unique solvability depends only on the height of the hyperbolic part of the cylindrical domain, and a criterion for the uniqueness of the solution is given.

Key words: well-posedness, Dirichlet type problem, cylindrical domain, multidimensional equation, criterion.

Статья поступила в редакцию $16/I/2018$.
The article received $16/I/2018$.

[2]*Aldashev Serik Aimurzaevich* (aldash51@mail.ru), Department of Mathematics and Mathematical Modeling, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125, Pushkin street, Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan.