УДК 517+531.01 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-40-67

М.В. Шамолин[1]

О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 2. НЕЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯ СИЛ ОТ ТЕНЗОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ[2]

В предлагаемом цикле работ исследуются уравнения движения динамически симметричного закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n-мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться либо постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В данной работе рассматривается случай независимости силового поля от тензора угловой скорости.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

1 Вводные замечания

Выберем функцию $\mathbf{r}_N$ в следующем виде (диск $\mathcal{D}^{n-1}$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right). \tag{1.2}$$

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Таким образом, выполнены равенства

$$\begin{gathered} x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \;\; x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2, \;\; \ldots, \\ x_{n-1,N} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}, \;\; x_{nN} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [1, 2], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \;\; s(\alpha) = B\cos\alpha, \;\; A, B > 0. \tag{1.5}$$

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

1.1. Приведенные системы

Теорема 1.1. *Совместные уравнения*

$$\begin{gathered}
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=\\
=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=\\
=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_2(\Omega)=\\
=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_1(\Omega)=\\
=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}\tag{1.6}$$

$r_{n-2}+1=r_{n-1}$, *функции* $W_t(\Omega)$, $t=1,\dots,n-1$, *— квадратичные формы по компонентам* $\omega_1,\dots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, *тензора* Ω, *причем* $(k_j\neq r_i)$

$$W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\ldots=\omega_{k_s}=0}=0, s=(n-1)(n-2)/2, j=1,\dots,s, i=1,\dots,n-1,\tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}
v_D\cos\alpha=-v_\infty\cos\xi,\\
v_D\sin\alpha\cos\beta_1=l\omega_{r_{n-1}}+v_\infty\sin\xi\cos\eta_1,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2=-l\omega_{r_{n-2}}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}=\\
=(-1)^{n+1}l\omega_{r_2}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-2},\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}=(-1)^n l\omega_{r_1}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-2},
\end{gathered}\tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \dots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix}=T_{1,2}(\eta_{n-2})\circ T_{2,3}(\eta_{n-3})\circ\ldots\circ\\
\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2)T_{n-2,n-1}(\eta_1)\begin{pmatrix}(-1)^n\dot\eta_{n-2}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}\\ (-1)^{n+1}\dot\eta_{n-3}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot\eta_2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\\ -\dot\eta_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\\ \dot\xi\end{pmatrix}
\end{gathered}\tag{1.9}$$

при выполнении условий

$$I_2=\ldots=I_n,\tag{1.10}$$

$$\omega_{k_1}\equiv\omega^0_{k_1}=const,\ \dots,\ \omega_{k_s}\equiv\omega^0_{k_s}=const,\ s=\frac{(n-1)(n-2)}{2},\tag{1.11}$$

$$\omega^0_{k_1}=\ldots=\omega^0_{k_s}=0,\tag{1.12}$$

редуцируются к динамической системе на касательном расслоении

$$\begin{gathered}
T_*\mathbf{S}^{n-1}\Big\{(\dot\xi,\dot\eta_1,\dots,\dot\eta_{n-2};\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\\
0\leqslant\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2}\ \ mod\ 2\pi\}
\end{gathered}\tag{1.13}$$

$(n-1)$*-мерной сферы*

$$\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2}\ \ mod\ 2\pi\}.\tag{1.14}$$

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_*=ln_0,\ \ n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\ \ <\cdot>=n_0v_\infty<'>,\tag{1.15}$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\
-\left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \right. \\
\left. + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \\
-\left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \right. \\
\left. + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2'' + b_*\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\
-\left[\eta_3'^2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_3 + \eta_5'^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \right. \\
\left. + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3'' + b_*\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\
-\left[\eta_4'^2 + \eta_5'^2\sin^2\eta_4 + \eta_6'^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \right. \\
\left. + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_{n-4}'' + b_*\eta_{n-4}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-4}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-5}'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - \\
-\left[\eta_{n-3}'^2 + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \\
\eta_{n-3}'' + b_*\eta_{n-3}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-3}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-4}'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \\
-\eta_{n-2}'^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \\
\eta_{n-2}'' + b_*\eta_{n-2}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-2}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-3}'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0.
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

В частности, при $n = 5$ имеем:

$$
\begin{gathered}
\xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2'' + b_*\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \eta_3'^2\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3'' + b_*\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0, \quad b_* > 0.
\end{gathered}
\tag{1.17}
$$

Вспомним для начала про группу переменных z:

$$
\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.18}
$$

где матрица $T_{k,k+1}(\eta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$
T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.19}
$$

$$
M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\eta.
$$

После же перехода от переменных z к промежуточным безразмерным переменным

$$
z_k = n_0 v_\infty Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-2, \quad z_{n-1} = n_0 v_\infty Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin\xi, \tag{1.20}
$$

система (1.16) будет эквивалентна системе

$$
\xi' = Z_{n-1} - b_*\sin\xi, \tag{1.21}
$$

$$
Z_{n-1}' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.22}
$$

$$
Z_{n-2}' = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.23}
$$

$$Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.24}$$

. . . .

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{1.25}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.26}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.27}$$

. . . .

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{1.28}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}, \tag{1.29}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:$$

$$0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\} \tag{1.30}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (1.21)–(1.28) порядка $2(n-1)-1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\xi' = Z_4 - b_*\sin\xi, \tag{1.31}$$

$$Z'_4 = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.32}$$

$$Z'_3 = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.33}$$

$$Z'_2 = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.34}$$

$$Z'_1 = -Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.35}$$

$$\eta'_1 = -Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.36}$$

$$\eta'_2 = Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.37}$$

$$\eta'_3 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \tag{1.38}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,)\in\mathbf{R}^8:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\} \tag{1.39}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.31)–(1.38) по причине цикличности переменной η_3 выделяется независимая подсистема седьмого порядка (1.31)–(1.37), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем семимерном многообразии.

1.2. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы восьмого порядка (1.31)–(1.38) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов). Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n (в частности, до пяти) для интегрирования систем.

1.2.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (1.31)–(1.38) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) =$$

$$= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \quad (1.40)$$

тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.32) отсутствует). Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$, $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_4, \quad (1.41)$$

$$Z_4' = (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \quad (1.42)$$

$$Z_3' = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \quad (1.43)$$

$$Z_2' = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \quad (1.44)$$

$$Z_1' = -Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \quad (1.45)$$

$$\eta_1' = -Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \quad (1.46)$$

$$\eta_2' = Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \quad (1.47)$$

$$\eta_3' = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}. \quad (1.48)$$

Система (1.41)–(1.48) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 1.2. *Система (1.41)–(1.48) обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2} = C_1 = const, \quad (1.49)$$

$$\Phi_2(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi = C_2 = const, \quad (1.50)$$

$$\Phi_3(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \quad (1.51)$$

$$\Phi_4(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2 = C_4 = const, \quad (1.52)$$

$$\Phi_5(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5 = const. \quad (1.53)$$

Четыре первых интеграла (1.49)–(1.52) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}, \;\; \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \text{const}, \;\; \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \text{const}, \;\; \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \text{const}. \quad (1.54)$$

В частности, наличие первого интеграла (1.49) объясняется равенством

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2}\left[\omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2\right] \equiv C_1^2 = \text{const}. \quad (1.55)$$

Пятый первый интеграл (1.53) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на η_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_3}{d\eta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\eta_2}, \quad (1.56)$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.51), (1.52) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\eta_2 - 1}, \tag{1.57}$$

то квадратура (1.56) примет вид

$$\eta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \quad u = \cos\eta_2. \tag{1.58}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_3 + C_5 = \pm\mathrm{arctg}\frac{\cos\eta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\eta_2 - 1}}, \quad C_5 = \mathrm{const}, \tag{1.59}$$

позволяющему получить первый интеграл (1.53). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\eta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\mathrm{tg}^2\eta_2 - C_4^2}. \tag{1.60}$$

Теперь перефразируем теорему 1.2.

Теорема 1.3. *Система (1.41)–(1.48) обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.61}$$

$$\Psi_2(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_2' = const, \tag{1.62}$$

$$\Psi_3(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_2} = C_3' = const, \tag{1.63}$$

$$\Psi_4(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\eta_1} = C_4' = const, \tag{1.64}$$

$$\Psi_5(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5' = const. \tag{1.65}$$

Первый интеграл (1.65) также имеет кинематический смысл и "привязывает" уравнение на η_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.3 (в отличие от теоремы 1.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.61)–(1.65) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.3 преобразованный набор первых интегралов (1.61)–(1.65) системы (1.41)–(1.48) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.41)–(1.48) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$w_4 = -Z_4, \;\; w_3 = \sqrt{Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2}, \;\; w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \;\; w_1 = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}}, \tag{1.66}$$

система (1.41)–(1.48) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_4, \;\; w_4' = -w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.67}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_2^2}{w_2}\tfrac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \\ \eta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.68}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_1^2}{w_1}\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.69}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{1.70}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} = \\ = \mp\tfrac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1} = \\ = \pm\tfrac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\ d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2} = \\ = \mp\tfrac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \end{gathered} \tag{1.71}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ \ k=1,2,3, \tag{1.72}$$

— функции в силу замены (1.66).

Система (1.67)–(1.70) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^8:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\} \tag{1.73}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.67)–(1.70) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.67), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.68), (1.69) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (1.70) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.67)–(1.70) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.67), по одному — для систем (1.68), (1.69) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.70) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.1. *Выпишем первые интегралы (1.61)–(1.65) в переменных w_1,w_2,w_3,w_4 в силу (1.66). Получим:*

$$\Theta_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{w_3^2+w_4^2}{w_3\sin\xi} = C_1'' = const, \tag{1.74}$$

$$\Theta_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = w_3\sin\xi = C_2'' = const, \tag{1.75}$$

$$\Theta_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3'' = const, \tag{1.76}$$

$$\Theta_4(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4'' = const, \tag{1.77}$$

$$\Theta_5(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = C_5'' = const. \tag{1.78}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.74), (1.75) достаточны для интегрирования системы (1.67), первые интегралы (1.76), (1.77) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ \ s=1,2, \tag{1.79}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.68), (1.69), и, наконец, первый интеграл (1.78) достаточен для "привязывания" уравнения (1.70). Доказана

Теорема 1.4. *Система (1.41)–(1.48) восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов.*

1.2.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (1.31)–(1.38) при условии $b_*=0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.32) (в отличие от системы (1.41)–(1.48)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_4, \tag{1.80}$$

$$Z_4' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.81}$$

$$Z_3' = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.82}$$

$$Z_2' = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.83}$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.84}$$

$$\eta_1' = -Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.85}$$

$$\eta_2' = Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.86}$$

$$\eta_3' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}. \tag{1.87}$$

Итак, система (1.80)–(1.87) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 1.5. *Система (1.80)–(1.87) обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\xi = C_1 = const, \tag{1.88}$$

$$\Phi_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.89}$$

$$\Phi_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.90}$$

$$\Phi_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2 = C_4 = const. \tag{1.91}$$

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5 = const. \tag{1.92}$$

Первый интеграл (1.88) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (1.92) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на η_3 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 1.5.

Теорема 1.6. *Система (1.80)–(1.87) обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) =$$
$$= \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\xi}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.93}$$

$$\Psi_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_2' = const, \tag{1.94}$$

$$\Psi_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_2} = C_3' = const, \tag{1.95}$$

$$\Psi_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_2^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\eta_1} = C_4' = const, \tag{1.96}$$

$$\Psi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5' = const. \tag{1.97}$$

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.6 (в отличие от теоремы 1.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.93)–(1.97) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.6 преобразованный набор первых интегралов (1.93)–(1.97) системы (1.80)–(1.87) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.80)–(1.87) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.66) система (1.80)–(1.87) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_4, \ \ w_4' = \sin\xi\cos\xi - w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \ \ w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.98}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_2^2}{w_2}\tfrac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \\ \eta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.99}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_1^2}{w_1}\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.100}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{1.101}$$

где выполнены условия (1.71).

Система (1.98)–(1.101) рассматривается на касательном расслоении (1.73) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.98)–(1.101) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.98), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.99), (1.100) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (1.101) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.98)–(1.101) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.98), по одному — для систем (1.99), (1.100) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.101) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.2. *Выпишем первые интегралы (1.93)–(1.97) в переменных w_1,w_2,w_3,w_4 в силу (1.66). Получим:*

$$\Theta_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{w_3^2+w_4^2+\sin^2\xi}{w_3\sin\xi}=C_1''=const, \tag{1.102}$$

$$\Theta_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=w_3\sin\xi=C_2''=const, \tag{1.103}$$

$$\Theta_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2}=C_3''=const, \tag{1.104}$$

$$\Theta_4(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1}=C_4''=const, \tag{1.105}$$

$$\Theta_5(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=C_5''=const. \tag{1.106}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.102), (1.103) достаточны для интегрирования системы (1.98), первые интегралы (1.104), (1.105) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s}=\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ \ s=1,2, \tag{1.107}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.99), (1.100), и, наконец, первый интеграл (1.106) достаточен для "привязывания" уравнения (1.101). Доказана

Теорема 1.7. *Система (1.80)–(1.87) восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов.*

1.3. Полный список первых интегралов

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (1.31)–(1.38) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.31)–(1.38) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.66) система (1.31)–(1.38) распадается следующим образом:

$$\xi'=-w_4-b_*\sin\xi,\ \ w_4'=\sin\xi\cos\xi-w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\ \ w_3'=w_3w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.108}$$

$$\left.\begin{array}{r}w_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\\ \eta_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3),\end{array}\right\} \tag{1.109}$$

$$\left.\begin{array}{r}w_1'=d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\ \eta_1'=d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3),\end{array}\right\} \tag{1.110}$$

$$\eta_3'=d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3), \tag{1.111}$$

где выполнены условия (1.71).

Система (1.108)–(1.110) рассматривается на касательном расслоении (1.73) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.108)–(1.111) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.108), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.109), (1.110) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (1.111) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.108)–(1.111) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.108), по одному — для систем (1.109), (1.110) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.111) (*т.е. всего пять*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (1.108) неавтономную систему второго порядка
$$\frac{dw_4}{d\xi}=\frac{\sin\xi\cos\xi-w_3^2\cos\xi/\sin\xi}{-w_4-b_*\sin\xi},\quad \frac{dw_3}{d\xi}=\frac{w_3w_4\cos\xi/\sin\xi}{-w_4-b_*\sin\xi}. \tag{1.112}$$
Используя замену $\tau=\sin\xi$, перепишем систему (1.112) в алгебраическом виде
$$\frac{dw_4}{d\tau}=\frac{\tau-w_3^2/\tau}{-w_4-b_*\tau},\quad \frac{dw_3}{d\tau}=\frac{w_3w_4/\tau}{-w_4-b_*\tau}. \tag{1.113}$$
Далее, вводя однородные переменные по формулам
$$w_4=u_2\tau,\quad w_3=u_1\tau, \tag{1.114}$$
приводим систему (1.113) к следующему виду:
$$\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2=\frac{1-u_1^2}{-u_2-b_*},\quad \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1=\frac{u_1u_2}{-u_2-b_*}, \tag{1.115}$$
что эквивалентно
$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2-b_*},\quad \tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2-b_*}. \tag{1.116}$$
Сопоставим системе второго порядка (1.116) неавтономное уравнение первого порядка
$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-u_1^2+u_2^2+b_*u_2}{2u_1u_2+b_*u_1}, \tag{1.117}$$
которое несложно приводится к полному дифференциалу:
$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2+b_*u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{1.118}$$
Итак, уравнение (1.117) имеет следующий первый интеграл:
$$\frac{u_2^2+u_1^2+b_*u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{1.119}$$
который в прежних переменных выглядит как
$$\Theta_1(w_4,w_3;\xi)=\frac{w_4^2+w_3^2+b_*w_4\sin\xi+\sin^2\xi}{w_3\sin\xi}=C_1=\mathrm{const}. \tag{1.120}$$

Замечание 1.3. *Рассмотрим систему (1.108) с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 3, 4], становящейся консервативной при $b_*=0$:*
$$\xi'=-w_4,\quad w_4'=\sin\xi\cos\xi-w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\quad w_3'=w_3w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{1.121}$$
Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида
$$w_4^2+w_3^2+\sin^2\xi=C_1^*=const, \tag{1.122}$$
$$w_3\sin\xi=C_2^*=const. \tag{1.123}$$
Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.122), (1.123) также является первым интегралом системы (1.121). Но при $b_*\neq0$ каждая из функций
$$w_4^2+w_3^2+b_*w_4\sin\xi+\sin^2\xi \tag{1.124}$$
и (1.123) по отдельности не является первым интегралом системы (1.108). Однако отношение функций (1.124), (1.123) является первым интегралом системы (1.108) при любом b_*.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.108). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.119) при $u_1\neq0$ следующим образом:
$$\left(u_2+\frac{b_*}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b_*^2+C_1^2}{4}-1. \tag{1.125}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию
$$b_*^2+C_1^2-4\geqslant0, \tag{1.126}$$
и фазовое пространство системы (1.108) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.125).

Таким образом, в силу соотношения (1.119) первое уравнение системы (1.116) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+b_*u_2+u_2^2) - C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2-b_*}, \tag{1.127}$$

где

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}, \tag{1.128}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.126).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1.108) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} = \int\frac{(-b_*-u_2)du_2}{2(1+b_*u_2+u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}/2}. \tag{1.129}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{1.130}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1,\ \ b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4, \tag{1.131}$$

то правая часть равенства (1.129) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}} + b_*\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b_*}{2}I_1, \tag{1.132}$$

где

$$I_1 = \int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3 \pm C_1)},\ \ r_3 = \sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{1.133}$$

При вычислении интеграла (1.133) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1.134}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.135}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.136}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\sin\xi} + \frac{b_*}{2}, \tag{1.137}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1.138}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.139}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.140}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1.108) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.4. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.119).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \xi) = G\left(\sin\xi, \frac{w_4}{\sin\xi}, \frac{w_3}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{1.141}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.120), (1.141) независимой системы третьего порядка (1.108). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.109), (1.110) и дополнительный первый интеграл, ”привязывающий” уравнение (1.111).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.104)–(1.106), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \eta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3 = \text{const}, \tag{1.142}$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4 = \text{const}, \tag{1.143}$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta_3 \pm \operatorname{arctg}\frac{C_4\cos\eta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\eta_2 - C_4^2}} = C_5 = \text{const}, \tag{1.144}$$

при этом в левую часть равенства (1.144) вместо C_3, C_4 необходимо подставить интегралы (1.142), (1.143).

Теорема 1.8. *Система (1.108)–(1.110) восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов (1.120), (1.141), (1.142), (1.143), (1.144).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.31)–(1.38) имеет пять первых интегралов, выражающихся соотношениями (1.120), (1.141), (1.142), (1.143), (1.144) (при этом используются выражения (1.129)–(1.140)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 1.9. *Три группы соотношений*

$$\begin{gathered}
(I_1+2I_2)\dot\omega_1 = 0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_2 = 0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_3 = 0,\\
3I_2\dot\omega_4 + (I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7) = -x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_5 = 0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_6 = 0,\\
3I_2\dot\omega_7 + (I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9) = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_8 = 0,\\
3I_2\dot\omega_9 + (I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4) = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10} + (I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4) = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered} \tag{1.145}$$

$$\begin{gathered}
v_D\cos\alpha = -v_\infty\cos\xi,\\
v_D\sin\alpha\cos\beta_1 = l\omega_{10} + v_\infty\sin\xi\cos\eta_1,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 = -l\omega_9 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 = l\omega_7 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 = -l\omega_4 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,
\end{gathered} \tag{1.146}$$

$$\begin{gathered}
\omega_4 = -\dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 -\\
-\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\sin\eta_3 - \dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
\omega_7 = \dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 + \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 +\\
+\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\cos\eta_3 - \dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,\\
\omega_9 = -\dot\xi\sin\eta_1\cos\eta_2 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\cos\eta_2 + \dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2,\\
\omega_{10} = \dot\xi\cos\eta_1 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1,
\end{gathered} \tag{1.147}$$

при условиях

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0,\ \ \omega_2 \equiv \omega_2^0,\ \ \omega_3 \equiv \omega_3^0,\ \ \omega_5 \equiv \omega_5^0,\ \ \omega_6 \equiv \omega_6^0,\ \ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{1.148}$$

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0, \tag{1.149}$$

(1.1), (1.5) обладают пятью первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.

1.4. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n

Как уже было указано, для полного интегрирования системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

1.4.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (1.21)–(1.29) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$ и получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.40) тождественно равна нулю (в частности, $b_*=0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.22) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_{n-1}, \tag{1.150}$$

$$Z'_{n-1} = (Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.151}$$

$$Z'_{n-2} = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.152}$$

$$Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+$$

$$+(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.153}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{1.154}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.155}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.156}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{1.157}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}. \tag{1.158}$$

Система (1.150)–(1.158) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 1.10. *Система (1.150)–(1.158) обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2} = C_1 = const, \tag{1.159}$$

$$\Phi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.160}$$

$$\Phi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.161}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.162}$$

$$\Phi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const, \tag{1.163}$$

$$\Phi_{n-1}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= Z_1\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const, \tag{1.164}$$

$$\Phi_n(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_n = const. \tag{1.165}$$

Первые $n-1$ первых интеграла (1.159)–(1.164) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega^0_{r_1} = \text{const}, \ \ldots, \ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega^0_{r_{n-1}} = \text{const}. \tag{1.166}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.159) объясняется равенством

$$Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2}[\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2] \equiv C_1^2 = \text{const}. \tag{1.167}$$

Последний первый интеграл (1.165) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_{n-2}}{d\eta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\eta_{n-3}}, \tag{1.168}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.163), (1.164) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\eta_{n-3} - 1}, \tag{1.169}$$

то квадратура (1.168) примет вид

$$\eta_{n-2} = \pm\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2}}, \ \ u = \cos\eta_{n-3}. \tag{1.170}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_{n-2} + C_n = \pm\text{arctg}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\eta_{n-3} - 1}}, \ \ C_n = \text{const}, \tag{1.171}$$

позволяющему получить первый интеграл (1.165). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\text{tg}^2(\eta_{n-2} + C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2)\text{tg}^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \tag{1.172}$$

Теперь перефразируем теорему 1.10.

Теорема 1.11. *Система (1.150)–(1.158) обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.173}$$

$$\Psi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_2' = const, \tag{1.174}$$

$$\Psi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_{n-3}} = C_3' = const, \tag{1.175}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.176}$$

$$\Psi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}\sin\eta_2} = C_{n-2}' = const, \tag{1.177}$$

$$\Psi_{n-1}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\eta_1} = C_{n-1}' = const, \tag{1.178}$$

$$\Psi_n(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_n' = const. \tag{1.179}$$

Первый интеграл (1.179) также имеет кинематический смысл и "привязывает" уравнение на η_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 1.11 (в отличие от теоремы 1.10) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.173)–(1.179) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.11 преобразованный набор первых интегралов (1.173)–(1.179) системы (1.150)–(1.158) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.150)–(1.158) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \dots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \dots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1} = -Z_{n-1}, \ \ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \ \ w_{n-4} = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ \ \ldots, \\ w_2 = -\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \ \ w_1 = -\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}, \end{gathered} \tag{1.180}$$

система (1.150)–(1.158) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_{n-1}, \ \ w'_{n-1} = -w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \ \ w'_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.181}$$

$$\left.\begin{aligned} w'_s &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \tfrac{1+w_s^2}{w_s} \tfrac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ \eta'_s &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \ \ s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{1.182}$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{1.183}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = -Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \\ = (-1)^n Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{1.184}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \ \ k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.185}$$

— функции в силу замены (1.180).

Система (1.181)–(1.183) рассматривается на касательном расслоении

$$\begin{gathered} T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\} \end{gathered} \tag{1.186}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.181)–(1.183) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.181), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (1.182) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (1.183) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.181)–(1.183) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.181), по одному — для систем (1.182) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.183) (*т.е. всего* n).

Замечание 1.5. *Выпишем первые интегралы (1.173)–(1.179) в переменных* $w_1, \ldots, w_{n-1}$ *в силу (1.180). Получим:*

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2}{w_{n-2}\sin\xi} = C''_1 = const, \tag{1.187}$$

$$\Theta_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\xi = C''_2 = const, \tag{1.188}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = const,\ \ s=1,\ldots,n-3, \tag{1.189}$$

$$\Theta_n(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C''_n = const. \tag{1.190}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.187), (1.188) достаточны для интегрирования системы (1.181), первые интегралы (1.189) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ \ s=1,\ldots,n-3, \tag{1.191}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.182), и, наконец, первый интеграл (1.190) достаточен для "привязывания" уравнения (1.183). Доказана

Теорема 1.12. *Система (1.150)–(1.158) порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

1.4.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (1.21)–(1.29) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.22) (в отличие от системы (1.150)–(1.158)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_{n-1}, \tag{1.192}$$

$$Z'_{n-1} = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.193}$$

$$Z'_{n-2} = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.194}$$

$$Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$
$$+(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.195}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{1.196}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.197}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.198}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{1.199}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}. \tag{1.200}$$

Итак, система (1.192)–(1.200) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 1.13. *Система (1.192)–(1.200) обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\xi = C_1 = const, \tag{1.201}$$

$$\Phi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\,\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.202}$$

$$\Phi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\,\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.203}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.204}$$

$$\Phi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const, \tag{1.205}$$

$$\Phi_{n-1}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= Z_1 \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const, \tag{1.206}$$

$$\Phi_n(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n = const. \tag{1.207}$$

Первый интеграл (1.201) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (1.207) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 1.13.

Теорема 1.14. *Система (1.192)–(1.200) обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 + \sin^2\xi}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.208}$$

$$\Psi_2(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_2' = const, \tag{1.209}$$

$$\Psi_3(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\eta_{n-3}} = C_3' = const, \tag{1.210}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.211}$$

$$\Psi_{n-2}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}\sin\eta_2} = C_{n-2}' = const, \tag{1.212}$$

$$\Psi_{n-1}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\eta_1} = C_{n-1}' = const, \tag{1.213}$$

$$\Psi_n(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n' = const. \tag{1.214}$$

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 1.14 (в отличие от теоремы 1.13) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.208)–(1.214) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.14 преобразованный набор первых интегралов (1.208)–(1.214) системы (1.192)–(1.200) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.192)–(1.200) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.180) система (1.192)–(1.200) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_{n-1}, \;\; w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.215}$$

$$\left.\begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \tfrac{1+w_s^2}{w_s} \tfrac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ \eta_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \;\; s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{1.216}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{1.217}$$

где выполнены условия (1.184).

Система (1.215)–(1.217) рассматривается на касательном расслоении (1.186) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}: \;\; 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.215)–(1.217) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.215), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (1.216) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (1.217) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.215)–(1.217) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.215), по одному — для систем (1.216) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.217) (*т.е. всего* n).

Замечание 1.6. *Выпишем первые интегралы (1.208)–(1.214) в переменных $w_1, \ldots, w_{n-1}$ в силу (1.180). Получим:*

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1'' = const, \tag{1.218}$$

$$\Theta_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\xi = C_2'' = const, \tag{1.219}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\eta_s} = C_{s+2}'' = const, \;\; s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.220}$$

$$\Theta_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n'' = const. \tag{1.221}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.218), (1.219) достаточны для интегрирования системы (1.215), первые интегралы (1.220) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \;\; s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.222}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.216), и, наконец, первый интеграл (1.221) достаточен для "привязывания" уравнения (1.217). Доказана

Теорема 1.15. *Система (1.192)–(1.200) порядка $2(n-1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов.*

1.5. Полный список первых интегралов при любом конечном n

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.180) система (1.21)–(1.29) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_{n-1} - b_*\sin\xi, \;\; w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.223}$$

$$\left.\begin{array}{l} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ \eta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \;\; s = 1, \ldots, n-3, \end{array}\right\} \tag{1.224}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{1.225}$$

где выполнены условия (1.184).

Система (1.223)–(1.225) рассматривается на касательном расслоении (1.186) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}: \;\; 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.223)–(1.225) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.223), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (1.224) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (1.225) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.223)–(1.225) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.223), по одному — для систем (1.224) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.225) (*т.е. всего* n).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (1.223) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_{n-1}}{d\xi} = \frac{\sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\cos\xi/\sin\xi}{-w_{n-1} - b_*\sin\xi}, \;\; \frac{dw_{n-2}}{d\xi} = \frac{w_{n-2}w_{n-1}\cos\xi/\sin\xi}{-w_{n-1} - b_*\sin\xi}. \tag{1.226}$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем систему (1.226) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau - w_{n-2}^2/\tau}{-w_{n-1} - b_*\tau}, \;\; \frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \frac{w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} - b_*\tau}. \tag{1.227}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_2\tau, \;\; w_{n-2} = u_1\tau, \tag{1.228}$$

приводим систему (1.227) к следующему виду:

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*}, \;\; \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1u_2}{-u_2 - b_*}, \tag{1.229}$$

что эквивалентно

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2-b_*},\ \ \tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2-b_*}. \tag{1.230}$$

Сопоставим системе второго порядка (1.230) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-u_1^2+u_2^2+b_*u_2}{2u_1u_2+b_*u_1}, \tag{1.231}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2+b_*u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{1.232}$$

Итак, уравнение (1.231) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2+u_1^2+b_*u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{1.233}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\xi)=\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2+b_*w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi}=C_1=\mathrm{const}. \tag{1.234}$$

Замечание 1.7. *Рассмотрим систему (1.223) с переменной диссипацией с нулевым средним [5, 6, 7], становящейся консервативной при $b_*=0$:*

$$\xi'=-w_{n-1},\ \ w_{n-1}'=\sin\xi\cos\xi-w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\ \ w_{n-2}'=w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{1.235}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_{n-1}^2+w_{n-2}^2+\sin^2\xi=C_1^*=const, \tag{1.236}$$

$$w_{n-2}\sin\xi=C_2^*=const. \tag{1.237}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.236), (1.237) также является первым интегралом системы (1.235). Но при $b_*\neq 0$ каждая из функций

$$w_{n-1}^2+w_{n-2}^2+b_*w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi \tag{1.238}$$

и (1.237) по отдельности не является первым интегралом системы (1.223). Однако отношение функций (1.238), (1.237) является первым интегралом системы (1.223) при любом b_*.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.223). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.233) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2+\frac{b_*}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b_*^2+C_1^2}{4}-1. \tag{1.239}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{1.240}$$

и фазовое пространство системы (1.223) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1,u_2 равенством (1.239).

Таким образом, в силу соотношения (1.233) первое уравнение системы (1.230) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2-b_*}, \tag{1.241}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}, \tag{1.242}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.240).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1.223) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{(-b_*-u_2)du_2}{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}/2}. \tag{1.243}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{1.244}$$

Если
$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1,\ \ b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4, \tag{1.245}$$
то правая часть равенства (1.243) примет вид
$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right| \pm \frac{b}{2}I_1, \tag{1.246}$$
где
$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\ \ r_3 = \sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{1.247}$$

При вычислении интеграла (1.247) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.
$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1.248}$$

II. $b_* < 2$.
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.249}$$

III. $b_* = 2$.
$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.250}$$

Возвращаясь к переменной
$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin\xi} + \frac{b_*}{2}, \tag{1.251}$$
имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_* > 2$.
$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1.252}$$

II. $b_* < 2$.
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.253}$$

III. $b_* = 2$.
$$I_1 = \mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.254}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1.223) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.8. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.233).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:
$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{1.255}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.234), (1.255) независимой системы третьего порядка (1.223). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.224) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.225).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.220), (1.221), а именно:
$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const},\ \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.256}$$

$$\Theta_n(w_{n-3},w_{n-4};\eta_{n-4},\eta_{n-3},\eta_{n-2})=\eta_{n-2}\pm\mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}-C_{n-1}^2}}=C_n''=\mathrm{const},\tag{1.257}$$

при этом в левую часть равенства (1.257) вместо C_{n-2},C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.256) при $s=n-4,n-3$.

Теорема 1.16. *Система (1.223)–(1.225) порядка $2(n-1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов (1.234), (1.255), (1.256), (1.257).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.21)–(1.29) имеет n первых интегралов, выражающийся соотношениями (1.234), (1.255), (1.256), (1.257) (при этом используются выражения (1.243)–(1.254)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 1.17. *Три группы соотношений (1.6), (1.8), (1.9) при условиях (1.10)–(1.12), (1.1), (1.5) обладают n первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

1.6. Топологические аналогии

Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой, описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи

$$v\equiv\mathrm{const}.\tag{1.258}$$

При выполнении условий (1.1), (1.5) рассматриваемая система примет вид

$$\alpha'=-Z_{n-1}+b\sin\alpha,\tag{1.259}$$

$$Z_{n-1}'=\sin\alpha\cos\alpha-(Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{1.260}$$

$$Z_{n-2}'=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\tag{1.261}$$

$$\begin{gathered}Z_{n-3}'=Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\-(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\end{gathered}\tag{1.262}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_1'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\},\tag{1.263}$$

$$\beta_1'=Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{1.264}$$

$$\beta_2'=-Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\tag{1.265}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-3}'=(-1)^nZ_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}},\tag{1.266}$$

$$\beta_{n-2}'=(-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}},\tag{1.267}$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (1.15):

$$b=\sigma n_0,\ \ n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\ \ z_k=n_0vZ_k,\ \ k=1,\ldots,n-1,\ \ <\cdot>=n_0v<'>.\tag{1.268}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha'=-Z_4+b\sin\alpha,\tag{1.269}$$

$$Z_4'=\sin\alpha\cos\alpha-(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{1.270}$$

$$Z_3'=Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\tag{1.271}$$

$$Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\tag{1.272}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.273}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.274}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.275}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{1.276}$$

Теорема 1.18. *Система (1.259)–(1.267) (для свободного тела) эквивалентна системе (1.21)–(1.29) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \ \ \eta_1 = \beta_1, \ \ \ldots, \ \ \eta_{n-2} = \beta_{n-2}, \ \ b_* = -b, \tag{1.277}$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k, \ k = 1, \ldots, n-1$.

Для полного интегрирования системы (1.259)–(1.267) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы (1.269)–(1.276) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов). Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1} = Z_{n-1}, \ \ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \ \ w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ \ \ldots, \\ w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \ \ w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}, \end{gathered} \tag{1.278}$$

система (1.259)–(1.267) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -w_{n-1} + b\sin\alpha, \\ w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{array}\right\} \tag{1.279}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \frac{1+w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \ \ s = 1, \ldots, n-3, \end{array}\right\} \tag{1.280}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.281}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1} Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{1.282}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \ \ k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.283}$$

— функции в силу замены (1.278).

В частности, при $n = 5$ система (1.269)–(1.276) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b\sin\alpha, \ \ w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \ w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.284}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1+w_2^2}{w_2} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{array}\right\} \tag{1.285}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1+w_1^2}{w_1} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{array}\right\} \tag{1.286}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.287}$$

где

$$
\begin{array}{c}
d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\\
=\pm\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=-Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}=\\
=\mp\frac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}=\\
=\pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2},
\end{array}
\tag{1.288}
$$

при этом

$$Z_k=Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ \ k=1,2,3, \tag{1.289}$$

— функции в силу замены (1.278).

Система (1.279)–(1.281) рассматривается на касательном расслоении

$$
\begin{array}{c}
T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\\
0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \beta_{n-2}\mod 2\pi\}
\end{array}
\tag{1.290}
$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \beta_{n-2}\mod 2\pi\}$.

В частности, система (1.284)–(1.287) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbf{R}^8:\ \ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \ \beta_3\mod 2\pi\} \tag{1.291}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbf{R}^4:\ \ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \ \beta_3\mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.279)–(1.281) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.279), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (1.280) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (1.281) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (1.284)–(1.287) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.284), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.285), (1.286) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (1.287) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.279)–(1.281) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.279), по одному — для систем (1.280) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, ”привязывающий” уравнение (1.281) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (1.284)–(1.287) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.284), по одному — для систем (1.285), (1.286) и дополнительный первый интеграл, ”привязывающий” уравнение (1.287) (*т.е. всего пять*).

Следствие 1.1.

1. *Угол атаки α и углы $\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$ для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и $\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}$ закрепленного маятника.*

2. *Расстояние $\sigma=CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l=OD$ закрепленного маятника.*

3. *Первые интегралы системы (1.279)–(1.281) могут быть автоматически получены через равенства (1.234), (1.255), (1.256), (1.257) после подстановок (1.277) (см. также [8, 9]):*

$$\Theta_1'(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=const. \tag{1.292}$$

$$\Theta_2'(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=G\left(\sin\alpha,\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha},\frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right)=C_2=const. \tag{1.293}$$

$$\Theta_{s+2}'(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s}=C_{s+2}=const,\ \ s=1,\ldots,n-3, \tag{1.294}$$

$$
\begin{array}{c}
\Theta_n'(w_{n-3},w_{n-4};\beta_{n-4},\beta_{n-3},\beta_{n-2})=\\
=\beta_{n-2}\pm arctg\dfrac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}}=C_n=const,
\end{array}
\tag{1.295}
$$

при этом в левую часть равенства (1.295) вместо C_{n-2},C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.294) при $s=n-4,n-3$.

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}. \tag{1.296}$$

Тогда, в силу условий (1.296), (1.1), (1.5), (1.268) преобразованная динамическая часть уравнений движения примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.297}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.298}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$

$$+bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.299}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$

$$-\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$

$$+bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.300}$$

....

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} +$$

$$+bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.301}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.302}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.303}$$

....

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.304}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1.305}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \tag{1.306}$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.307}$$

$$Z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.308}$$

$$Z'_3 = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$

$$+bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.309}$$

$$Z'_2 = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$

$$+bZ_2\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.310}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+bZ_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.311}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.312}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.313}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{1.314}$$

Для полного интегрирования системы (1.297)–(1.305) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.278) система (1.297)–(1.305) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \\ w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{1.315}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\quad s=1,\ldots,n-3, \end{array}\right\} \tag{1.316}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{1.317}$$

где выполнены условия (1.282).

В частности, при $n=5$ система (1.307)–(1.314) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \\ w_3' = w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ +bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{1.318}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \end{array}\right\} \tag{1.319}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_1' = d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \end{array}\right\} \tag{1.320}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \tag{1.321}$$

где выполнены условия (1.288).

Система (1.315)–(1.317) рассматривается на касательном расслоении (1.290) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\mod 2\pi\}$.

В частности, система (1.318)–(1.321) рассматривается на касательном расслоении (1.291) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.315)–(1.317) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.315), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (1.316) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (1.317) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (1.318)–(1.321) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.318), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.319), (1.320) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (1.321) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.315)–(1.317) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.315), по одному — для систем (1.316) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающи" уравнение (1.317) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (1.318)–(1.321) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.318), по одному — для систем (1.319), (1.320) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.321) (*т.е. всего пять*).

Если вопрос о первых интегралах системы (1.259)–(1.267) (или (1.279)–(1.281)) решается с помощью следствия 1.1, то аналогичный вопрос для системы (1.297)–(1.305) (или (1.315)–(1.317)) решает следующая теорема 1.19.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (1.315) имеет следующий вид [10, 11, 12]:

$$\Theta_1''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{1.322}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.315), используя при этом первый интеграл (1.322). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha,\ \ w_{n-1} = u_2\tau,\ \ w_{n-2} = u_1\tau,\ \ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{1.323}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \tag{1.324}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0. \tag{1.325}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (1.324) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.324), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}}\right],\ \ C = \mathrm{const}. \tag{1.326}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.327}$$

используя при этом обозначения и замены (1.323).

Итак, найдены два первых интеграла (1.322), (1.327) независимой системы третьего порядка (1.315). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.316) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.317).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.294), (1.295), а именно:

$$\Theta_{s+2}''(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \mathrm{const},\ \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.328}$$

$$\Theta_n''(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) =$$
$$= \beta_{n-2} \pm \mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const}, \tag{1.329}$$

при этом в левую часть равенства (1.329) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.328) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 1.19. *n первых интегралов (1.322), (1.327), (1.328), (1.329) системы (1.315)–(1.317) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 1.20. *n первых интегралов (1.322), (1.327), (1.328), (1.329) системы (1.315)–(1.317) эквивалентны n первым интегралам (1.292), (1.293), (1.294), (1.295) системы (1.279)–(1.281).*

Действительно, пары первых интегралов (1.322), (1.292), (1.328), (1.294) и (1.329), (1.295) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k, $k = 1, \ldots, n-1$, для системы (1.315)–(1.317) с фазовыми переменными w_k, $k = 1, \ldots, n-1$, для системы (1.279)–(1.281). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (1.327), (1.293), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

2) Движение многомерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [13, 14].

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.

[2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.

[3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры", Т. 125, "Динамические системы". 2013. С. 5–254.

[4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[5] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.

[6] Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 533–536.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[10] Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // Доклады РАН, 2015. Т. 460. № 2. С. 165–169.

[11] Шамолин М.В. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН, 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

[12] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.

[13] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН, 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.

[14] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.

References

[1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113 [in Russian].

[2] Shamolin M.V. /[Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: "Sovremennaia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory". T. 125. "Dinamicheskie sistemy".* [Journal of Mathematical Sciences. Vol 125. Dynamical Systems], 2013, pp. 5–254 [in Russina]

[4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Some cases of integrability of dynamic systems in transcedent functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2013, no. 9/1(110), pp. 35–41 [in Russian].

[5] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii trekhmernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Three-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 477, no. 2, pp. 168–172 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. *Polnyi spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravnenii dvizheniia mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Complete List of First Integrals of Dynamic Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2015, Vol. 461, no. 5, pp. 533–536 [in Russian].

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspects in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian]

[8] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetruc spaces automorphysm groups]. *Vestn. Mosk. un–ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].

[10] Shamolin M.V. *Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela* [Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. M.: Izd-vo "Ekzamen ", 2007, 352 p. [in Russian].

[11] Shamolin M.V. *Nekotorye model'nye zadachi dinamiki tverdogo tela pri vzaimodeistvii ego so sredoi* [Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium]. *Prikl. mekhanika* [International Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].

[12] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemosti sistem s dissipatsiei na kasatel'nykh rassloeniiakh k dvumernoi i trekhmernoi sferam* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Two- and Three-Dimensional Spheres]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2016, Vol. 471, no. 5, pp. 547–551 [in Russian].

[13] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoi sfere* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, no. 2, pp. 177–181 [in Russian].

[14] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 475, no. 5, pp. 519–523 [in Russian].

M.V. Shamolin[3]

ON A PENDULUM MOTION IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE. PART 2. INDEPENDENCE OF FORCE FIELDS ON THE TENSOR OF ANGULAR VELOCITY[4]

In the proposed cycle of work, we study the equations of the motion of dynamically symmetric fixed n-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of the motion of a free n-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. In this work, we study the case of independence of force fields on the tensor of angular velocity.

Key words: multi-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Статья поступила в редакцию $7/XI/2017$.
The article received $7/XI/2017$.

[3] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (`shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.

[4] The work is carried out at the financial support of the grant of the Russian Foundation for Basic Research 15-01-00848-a.