УДК 517.987 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-33-39

Т.А. Срибная[1]

ТЕОРЕМА БРУКСА-ДЖЕВЕТТА О РАВНОМЕРНОЙ ИСЧЕРПЫВАЕМОСТИ НА НЕ-СИГМА-ПОЛНОМ КЛАССЕ МНОЖЕСТВ

Для последовательности исчерпывающих композиционно-треугольных функций множества, заданных на не-сигма-полном классе множеств, более общем, чем кольцо множеств, доказана теорема Брукса-Джеветта о равномерной исчерпываемости. В качестве следствия получен аналог теоремы Брукса-Джеветта для функций, заданных на сигма-суммируемом классе множеств. Показано, что если кроме свойства композиционной треугольности функции множества обладают свойством композиционной полуаддитивности и являются непрерывными сверху в нуле, то для них справедлив аналог теоремы Никодима о равностепенной слабой непрерывности. Получены соответствующие результаты для семейства квазилипшицевых функций множества.

Ключевые слова: композиционно-треугольные функции множества, композиционно-полуаддитивные функции множества, не-сигма-полный класс множеств, мультипликативный класс множеств, исчерпываемость, непрерывность сверху в нуле, равномерная исчерпываемость, равностепенная слабая непрерывность.

Введение

Теорема Брукса-Джеветта, являющаяся аддитивной версией теоремы Никодима о равностепенной слабой непрерывности ([1], теорема IV.10.6), утверждает, что, если $\{\varphi_n\}$ — последовательность аддитивных банаховозначных функций, определенных на σ- алгебре Σ, причем для каждого множества $E \in \Sigma$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E)$ и функции множества $\varphi_n,\ n = 0, 1, 2...$, исчерпывающие на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\},\ n = 0, 1, 2...$, равномерно исчерпывающие на Σ [2].

В работах [3; 4] теорема Брукса-Джеветта доказана для неаддитивных функций, заданных на σ-кольце множеств ([3],теорема 1) и на σ- суммируемом классе множеств ([4],теорема 5.1.1).

В работах [5–8] теоремы Брукса-Джеветта и Никодима распространены на случай аддитивных функций, заданных на не σ- полном классе множеств. При этом наиболее общим из не σ- полных классов множеств, рассматриваемых в [5–8], является кольцо с f_1- свойством.

В данной статье теорема Брукса-Джеветта доказана для семейства композиционно-треугольных функций, область определения которых является не σ- полным классом множеств, более общим, чем кольцо с f_1- свойством. В качестве следствия получено обобщение теоремы Никодима о равностепенной слабой непрерывности семейства неаддитивных функций множества, заданных на не σ- полном классе множеств.

1. Обозначения и основные определения. Примеры

Пусть T — некоторое множество, Σ- класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$. Пусть G — абелева группа, $|\cdot|$ — функция на G, обладающая свойствами полунормы: $0 \leqslant |x| < +\infty$, $|\theta| = 0$, $|-x| = |x|$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|,\ x, y \in G$.

Всюду в дальнейшем $\Phi = \{\varphi\}$ — некоторое семейство функций множества, $\varphi:\ \Sigma \to (G, |\cdot|),\ \varphi(\varnothing) = \theta$.

Для любой функции $\varphi \in \Phi$ положим

$$\overline{\varphi}(E) = \sup\{|\varphi(F)|, F \subset E, F \in \Sigma\},\ \ E \subset T.$$

Последовательность попарно непересекающихся множеств называют спектром, убывающую последовательность множеств с пустым пересечением называют локализатором.

Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnayata@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Говорят, что функция множества $\varphi \in \Phi$

— исчерпывающая на Σ, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \theta, \tag{1.1}$$

— непрерывна сверху в нуле на Σ, если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполнено соотношение (1.1).

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi_\alpha\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\alpha(E_n) = \theta \tag{1.2}$$

выполняется равномерно относительно $\varphi_\alpha \in \Phi$.

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi_\alpha\}$ обладают свойством равностепенной слабой непрерывности на Σ, если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ соотношение (1.2) выполняется равномерно относительно $\varphi_\alpha \in \Phi$.

Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$, — класс непрерывных, строго возрастающих функций, удовлетворяющих условию $f(x) \geqslant x$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Если $\varphi \in \Phi$, $f \in \mathcal{F}$, то всюду в дальнейшем будем писать $f\varphi(E)$ вместо $f(|\varphi(E)|)$, $E \in \Sigma$.

Определение 1. Функцию множества $\varphi \in \Phi$ называют квазилипшицевой, если существует такое число $N \geqslant 1$, что для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, выполняется неравенство $|\varphi(A \cup B) - \varphi(A)| \leqslant N|\varphi(B)|$.

Примеры квазилипшицевых функций множества приведены в работе [9].

Определение 2. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f- композиционно-треугольные (или, просто, композиционно-треугольные), если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, справедливо

$$|\varphi(A)| \leqslant f\varphi(A \cup B) + f\varphi(B).$$

Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f- композиционно-полуаддитивные (или, просто, композиционно-полуаддитивные), если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, справедливо

$$|\varphi(A \cup B)| \leqslant f\varphi(A) + f\varphi(B).$$

Пример 1. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ квазилипшицевые, то они f- композиционно-треугольные и f- композиционно-полуаддитивные.

Пример 2. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — семейство аддитивных функций множества. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\mu(E) = 2|\varphi(E)|^2 + 3|\varphi(E)|^3.$$

Тогда функции множества семейства $M = \{\mu\}$, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ и функция $f \in \mathcal{F}$, $f(x) = 4x$, удовлетворяют условиям определения 2.

2. Классы множеств с f_1- свойством

Говорят, что класс множеств Σ обладает f_1- свойством, если для любых спектров $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ, таких что $E_n \cap F_k = \varnothing$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$, существует такое бесконечное подмножество $P \subset \mathbb{N}$ и такое множество $F \in \Sigma$, что $F_k \subset F$ при всех $k \in P$, $F \cap E_n = F \cap F_k = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \setminus P$ [7].

Из этого определения следует, что σ- алгебра множеств обладает f_1- свойством. В работе [10] приведен пример алгебры, обладающей f_1- свойством, но не являющейся сигма-полной. В частности, там показано, что если $2^{\mathbb{N}}$ — класс всевозможных подмножеств множества $\mathbb{N}$; $\triangle$ — идеал, образованный всевозможными конечными подмножествами множества $\mathbb{N}$, то алгебра открыто-замкнутых множеств реализующего стоуновского компакта булевой алгебры $\hat{\mathcal{A}} = 2^{\mathbb{N}}/\triangle$ является не-сигма-полной алгеброй множеств, обладающей f_1- свойством.

Пусть Σ — непустой класс множеств, замкнутый относительно образования разности множеств. Тогда Σ будет замкнут относительно образования пересечения конечного числа множеств. В связи с этим такой класс множеств называют мультипликативным классом множеств, или, кратко, m- классом.

Пример 3. Пусть E — некоторое бесконечное множество, F — счетное подмножество множества E. Рассмотрим класс множеств $\mathcal{P}$, состоящий из пустого множества и всех конечных и счетных подмножеств множества F, за исключением самого множества F. Тогда класс множеств $\mathcal{P}$ замкнут относительно образования разности, обладает f_1- свойством, но не является кольцом множеств и, тем более, сигма-полным классом множеств.

В дальнейшем потребуется следующее предложение, доказанное в работе [11].

Предложение 1. Если Σ — m- класс с f_1- свойством, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность исчерпывающих функций множества на Σ, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют подспектр $\{E_{n_i}\}$ и множество $E \in \Sigma$, для которых

$$E_{n_i} \subset E,$$
$$\overline{\varphi}_{n_i}(E \setminus (E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_i})) < \varepsilon, \ \ i \in \mathbb{N}.$$

3. Теорема Брукса-Джеветта для композиционно-треугольных функций множества на m- классе с f_1- свойством

Теорема 1. Пусть Σ — m- класс с f_1- свойством. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность f- композиционно-треугольных исчерпывающих на Σ функций множества. Пусть для каждого множества $E \in \Sigma$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi_0(E), \tag{3.1}$$

и функция множества φ_0 — исчерпывающая на Σ. Тогда функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ. Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, такие что

$$|\varphi_n(E_n)| > \varepsilon, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Пусть $\delta_1 = f^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})$, $\delta_2 = f^{-1}(\frac{\delta_1}{2})$.

Так как функция $f \in \mathcal{F}$ строго возрастает и $f(x) \geqslant x$, $x \in \mathbb{R}^+$, то $\delta_2 < \delta_1$.

1^0. Покажем, что существует такое бесконечное множество $P \subset \mathbb{N}$ и такое множество $F \in \Sigma$, что

$$E_n \subset F, \ \ n \in P$$

и

$$\overline{\varphi}_0(F) < \delta_2. \tag{3.3}$$

Рассмотрим разбиение множества натуральных чисел на счетное множество бесконечных подмножеств $\{N_i, \ i = 1, 2, ...\}$. . Согласно определению f_1-свойства, для спектров $\{E'_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{E_n, \ n \in \mathbb{N} \backslash N_1\}$ и $\{F'_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{E_n, \ n \in N_1\}$ найдем такое бесконечное подмножество $P' \subset N_1$ и такое множество $F' \in \Sigma$, что $E_n \subset F'$ при всех $n \in P'$, $F' \cap E_n = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N} \setminus N_1$.

Положим $P_1 = P'$, $F_1 = F'$.

Аналогично, применив определение f_1- свойства к спектрам $\{E''_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{F_1, \ E_n, \ n \in \mathbb{N} \backslash (N_1 \cup N_2)\}$ и $\{F''_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{E_n, \ n \in N_2\}$, найдем такое бесконечное подмножество $P_2 \subset N_2$ и такое множество $F_2 \in \Sigma$, что $E_n \subset F_2$ при всех $n \in P_2$, $F_2 \cap F_1 = F_2 \cap E_n = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N} \setminus (N_1 \cup N_2)$.

Продолжив процесс по индукции, получим последовательность попарно непересекающихся подмножеств множества натуральных чисел $\{P_i\}$ и спектр $\{F_i\} \subset \Sigma$, для которых справедливо

$$E_n \subset F_i, \ \ n \in P_i, \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Для спектра $\{F_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_0(F_n) = 0. \tag{3.5}$$

Действительно, в противном случае существуют число $\delta > 0$ и подспектр $\{F_{n_k}\}$ спектра $\{F_n\}$, для которых

$$|\varphi_0(F_{n_k})| > \delta,$$

что противоречит исчерпываемости функции множества φ_0 на Σ.

Из соотношения (3.5) следует, что существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\overline{\varphi}_0(F_{n_0}) < \delta_2.$$

Из условия (3.4) следует, что $E_n \subset F_{n_0}$ при $n \in P_{n_0}$.

Множества $P = P_{n_0}$ и $F = F_{n_0}$ — искомые.

2^0. Покажем, что существует подпоследовательность номеров $\{n_k\} \subset P$ такая, что

$$\left| \varphi_{n_k} \left(\bigcup_{i \in I} E_{n_i} \right) \right| < \delta_1,$$
$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\}, \ \ k = 2, 3, ...$$

Пусть $n_1 = \min P$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E_{n_1}) = \varphi_0(E_{n_1}),$$

то, в силу (3.3) и неравенства $\delta_2 < \delta_1$, существует такой номер $n_2 \in P$, $n_2 > n_1$, что

$$|\varphi_{n_2}(E_{n_1})| < \delta_1.$$

Аналогично, учитывая (3.1) и (3.3), найдем такой номер $n_3 \in P$, $n_3 > n_2$, что

$$|\varphi_{n_3}(E_{n_1})| < \delta_1, |\varphi_{n_3}(E_{n_2})| < \delta_1,$$

$$|\varphi_{n_3}(E_{n_1} \cup E_{n_2})| < \delta_1.$$

Продолжив процесс по индукции, получим искомую подпоследовательность номеров $\{n_k\} \subset P$.

3^0. Без ограничения общности можно считать, что

$$\left|\varphi_k\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)\right| < \delta_1 \tag{3.6}$$

$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...,$$

$$E_n \subset F,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

4^0. Используя свойство композиционной треугольности функций множества последовательности $\{\varphi_n\}$ покажем, что

$$\left|\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cup E_k\right)\right| \geqslant \delta_1, \tag{3.7}$$

$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...$$

Предположим, что

$$\left|\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cup E_k\right)\right| < \delta_1,$$

$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...$$

Тогда, в силу неравенства

$$|\varphi_k(E_k)| < f\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cup E_k\right) + f\varphi_k\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right),$$

$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...,$$

и условия (3.6), имеем

$$|\varphi_k(E_k)| < \varepsilon,$$

что противоречит (3.2).

5^0. К спектру $\{E_n\} \subset \Sigma$ и числу $\delta_2 > 0$ применим предложение 1 пункта 2. Пусть $\{E_{n_i}\}$ — подспектр $\{E_n\}$ и множество $E \in \Sigma$, $E \subset F$ такие, что

$$\overline{\varphi}_{n_i}\left(E \setminus (E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_i})\right) < \delta_2,\ \ i \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

$$E_{n_i} \subset E,\ \ i \in \mathbb{N}.$$

Из (3.7) следует, что

$$|\varphi_{n_i}\left(E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_i}\right)| \geqslant \delta_1,\ \ i = 2, 3, ...$$

Отсюда и из (3.8), в силу выбора числа $\delta_2 > 0$, следует

$$|\varphi_{n_i}(E)| > \delta_2,\ \ i = 2, 3, ...$$

С другой стороны, в силу (3.1) и (3.3), существует номер i_0 такой, что для всех $i > i_0$

$$|\varphi_{n_i}(E)| < \delta_2.$$

Получили противоречие.

Покажем, что теорема 1 не верна для последовательности функций множества, заданной на m- классе, не обладающим f_1- свойством.

Пример 4. Пусть Σ — класс множеств, состоящий из пустого множества, всех конечных подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и всех тех подмножеств множества $\mathbb{N}$, которые имеют непустое конечное дополнение. Класс множеств Σ является m- классом, но не обладает f_1- свойством.

Пусть $x \in (G, |\cdot|)$ — некоторый ненулевой элемент группы G. Зададим функции множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, формулами

$$\varphi_n(E) = \begin{cases} x, & n \in E, \\ \theta, & n \notin E \end{cases},$$

для любого множества $E \in \Sigma$.

Функции множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, являются аддитивными и исчерпывающими на Σ. Для любого множества $E \in \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E) = \begin{cases} \theta, & \text{если } E - \text{конечно}, \\ x, & \text{если } \mathbb{N} \setminus E - \text{конечно}. \end{cases}$$

При этом функция множества φ_0 исчерпывающая на Σ.

В то же время для спектра одноэлементных множеств $E_n = \{n\}$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E_n) = x.$$

Следовательно, функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ не являются равномерно исчерпывающими на Σ.

Покажем, что теорема 1 остается справедливой в случае, когда Σ — сигма-суммируемый класс множеств.

Непустой класс множеств Σ, $\varnothing \in \Sigma$, замкнутый относительно образования счетных объединений попарно непересекающихся множеств, называют сигма-суммируемым классом множеств [4].

Следствие 1. Пусть Σ — сигма-суммируемый класс множеств. Пусть функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие на Σ.

Доказательство. Пусть $\{E_k\}$ — произвольный спектр из Σ. Тогда все множества вида

$$\bigcup_{k\in I} E_k, \ \ I \subset \mathbb{N},$$

принадлежат Σ.

Рассмотрим класс множеств $\mathcal{A}$, состоящий из пустого множества и всех множеств вида $\bigcup\limits_{k\in I} E_k$, $I \subset \mathbb{N}$. Такой класс множеств является σ- алгеброй.

Так как сужения функций множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, на σ- алгебру $\mathcal{A}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_n(E_k) = \theta$$

выполняется равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$.

4. Обобщение теоремы Никодима

Теорема 2. Пусть Σ — m- класс с f_1- свойством. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность f- композиционно-треугольных и f- композиционно-полуаддитивных функций множества. Пусть для каждого множества $E \in \Sigma$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E)$$

и функции множества φ_0, φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — исчерпывающие на Σ. Если каждая функция множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, непрерывна сверху в нуле на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают свойством равностепенной слабой непрерывности на Σ.

Доказательство. В силу теоремы 1, функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ.

Предположим, что функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ не являются равностепенно слабо непрерывными на Σ. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и локализатор $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что

$$|\varphi_n(E_n)| > \varepsilon, n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Пусть $\delta = f^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})$. По определению непрерывности сверху в нуле на Σ функции множества φ_1 найдем номер n_1 такой, что

$$|\varphi_1(E_{n_1})| < \delta. \tag{4.2}$$

Так как

$$E_1 = (E_1 \setminus E_{n_1}) \cup E_{n_1},$$

то из (4.1) и (4.2) следует, что

$$|\varphi_1(E_1 \setminus E_{n_1})| > \delta.$$

По определению непрерывности сверху в нуле Σ функции множества φ_{n_1} найдем номер $n_2 > n_1$ такой, что

$$|\varphi_{n_1}(E_{n_2})| < \delta.$$

Так как

$$E_{n_1} = (E_{n_1} \setminus E_{n_2}) \cup E_{n_2},$$

то

$$|\varphi_{n_1}(E_{n_1} \setminus E_{n_2})| > \delta.$$

Продолжив процесс неограниченно, построим подпоследовательность номеров $n_k < n_{k+1}$, и спектр $\{E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}}\}$ такие, что

$$|\varphi_{n_k}(E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}})| > \delta.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из примера 1и теорем 1, 2 вытекает справедливость следствия 2.

Следствие 2. Пусть Σ — m- класс с f_1- свойством. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность квазилипшицевых функций множества. Пусть для любого множества $E \in \Sigma$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E).$$

Если функции множества φ_0, φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — исчерпывающие на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие на Σ.

Если, кроме этого, функции множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — непрерывнны сверху в нуле на Σ, то функции множества последовательности φ_n равностепенно слабо непрерывные на Σ.

Литература

[1] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория // М.: ИИЛ, 1962. 896 с.

[2] Brooks J.K., Jewett R.S. On finitely additive vector measures // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1970. V. 67. № 3. P. 1294–1298.

[3] Гусельников Н.С. О теоремах Брукса-Джеветта и Никодима // Теория функций и функц. анализ. Л. 1975. С. 45–54.

[4] Климкин В.М. Введение в теорию функций множества. Издательство Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989. 210 с.

[5] Molto A. On the Vitali-Hahn-Saks theorem // Proc. Royal. Soc. Edinburgh. 1981. Sect. A90. P. 163–173.

[6] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras // Dissertationes Math.-Warszawa. 1982. V. 214. P. 1–33.

[7] Friniche F.I. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interprolation property // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 92. № 3. P. 362–366.

[8] Lucia P., Marales P. Some Consequences of the Brooks-Jewett theorem for Additive Uniform Semigroup-valued Functions // Conf. Semin. Mat. Univ. Bari. 1988. V. 227. P. 1–23.

[9] Гусельников Н.С. О продолжении квазилипшицевых функций множества //Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 21–31.

[10] Seever G.L. Measures on F-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133. P. 267–280.

[11] Срибная Т.А. Критерий равномерной исчерпываемости семейства векторных внешних мер // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2012. № 6 (97). С. 58–65.

References

[1] Dunford N., Schwartz J. *Lineinye operatory. Obshchaia teoriia* [Linear operators. Part 1: General theory]. M.: IIL, 1962, 896 p. [in Russian].

[2] Brooks J.K., Jewett R.S. On finitely additive vector measures. *Proc. Nat. Acad. Sci USA*, 1970, Vol. 67, no 3, pp. 1294–1298 [in English].

[3] Guselnikov N.S. *O teoremakh Bruksa-Dzhevetta i Nikodima* [On the theorems of Brooks-Jewett and Nicodemus]. In: *Sb. Teoriia funktsii i funkts. analiz* [Collection Theory of functions and functional analysis]. L., 1975, pp. 45–54 [in Russian].

[4] Klimkin V.M. *Vvedenie v teoriiu funktsii mnozhestva* [Introduction to the theory of set functions]. Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, Kuibyshevskii filial, 1989, 210 p. [in Russian].

[5] Molto A. On the Vitali-Hahn-Saks theorem. *Proc. Royal. Soc.*. Edinburgh, 1981, Sect. A90, pp. 163–173 [in English].

[6] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras. *Dissertationes Math.*. Warszawa, 1982, Vol. 214, pp. 1–33 [in English].

[7] Friniche F.I. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interprolation property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1984, Vol. 92, no 3, pp. 362–366 [in English].

[8] Lucia P., Marales P. Some Consequences of the Brooks-Jewett theorem for Additive Uniform Semigroup-valued Functions. *Conf. Semin. Mat. Univ.*. Bari, 1988, Vol. 227, pp. 1–23 [in English].

[9] Guselnikov N.S. *O prodolzhenii kvazilipshitsevykh funktsii mnozhestva* [On the extension of quasi-Lipschitz set functions]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1975, Vol. 17, no. 1, pp. 21–31 [in Russian].

[10] Seever G.L. Measures on F-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, Vol. 133, pp. 267–280 [in Russian].

[11] Sribnaya T.A. *Kriterii ravnomernoi ischerpyvaemosti semeistva vektornykh vneshnikh mer* [A criterion for the uniform exhaustibility of a family of vector external measures]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University], 2012, no 6 (97), pp. 58–65 [in Russian].

T.A. Sribnaya[2]

THE BROOKS-JEVETT THEOREM ON UNIFORM DIMENTRICULARITY ON A NON-SIGMA-FULL CLASS OF SETS

For a sequence of exhaustive composition-triangular set functions defined on a non-sigma-complete class of sets, more general than the ring of sets, the Brooks-Jewett theorem on uniform exhaustibility is proved. As a corollary, we have obtained analogue of the Brooks-Jewett theorem for functions defined on a sigma-summable class of sets. It is shown that if, in addition to the property compositional triangularity, the set functions have the composite semi-additivity property and are continuous from above at zero, then an analog of Nikodym's theorem on equicontinuous weak continuity is valid for them. The corresponding results are obtained for a family of quasi-Lipschitz set functions.

Key words: composition-triangular set functions, composition-semi-additive set functions, non-sigma-complete class of sets, multiplicative class of sets, exhaustibility, continuity from above at zero, uniform exhaustibility, equicontinuous weak continuity.

Статья поступила в редакцию $22/XI/2017$.
The article received $22/XI/2017$.

[2] *Sribnaya Tatyana Arkadievna* (sribnayata@mail.ru), Department of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.