УДК 517.98 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-25-32

Д.А. Рогач[1]

ФРЕЙМ ДЛЯ АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВЕКТОРА-СИГНАЛА

Рассмотрен фрейм конечномерного евклидова пространства, составленный из ортов и их сумм. Представлено операторное доказательство фреймовых свойств построенной системы, для матрицы фреймового оператора найдены собственные значения, которые являются и фреймовыми границами. Доказано свойство альтернативной полноты построенной системы. Именно это свойство является причиной интереса к построенному фрейму, так как в вещественном евклидовом пространстве оно эквивалентно инъективности оператора измерений, который отображает вектор-сигнал в последовательность модулей измерений. Исследуемый фрейм лежит в основе быстрого алгоритма восстановления сигнала, предложенного М. Штрауссом. Найден оператор, который переводит построенный фрейм в ближайший к нему фрейм Парсеваля — Стеклова.

Ключевые слова: фрейм, фрейм Парсеваля — Стеклова, оператор анализа, оператор синтеза, фреймовый оператор, собственное значение, собственный вектор, альтернативная полнота.

1. Фреймы конечномерных пространств

1.1. Определение фрейма

Пусть $\mathbb{H}^N$ — конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^N$. Каждый вектор-сигнал x единственным образом представим суммой

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

где $\langle x, e_n \rangle$ — координаты вектора в выбранном базисе. Физические приборы, которые применяются в процессе обработки сигналов, настроены на регистрацию положительных чисел, хотя точными значениями координат могут быть как отрицательные числа, так и комплексные. Для решения задачи о восстановлении сигнала по модулям измерений важно подобрать такую систему "измерительных векторов" $F = \{f_1, ..., f_M\}, N < M$, чтобы максимально точно восстановить сигнал x по "измерениям"$|\langle x, f_m \rangle|,\ m = 1, ..., M$.

Для решения этой задачи полезными оказываются фреймы конечномерных пространств.

Определение 1.1. Набор элементов $F = \{f_m,\ m = 1, ..., M\} \subset \mathbb{H}^N$ называется фреймом для пространства $\mathbb{H}^N$, если существуют положительные числа A и B такие, что для любого $x \in \mathbb{H}^N$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m \rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2 \tag{1.1}$$

Числа A, B называются нижней и верхней границами фрейма соответственно. Они определены неоднозначно [2], поэтому естественно возникает понятие оптимальных нижней и верхней границы фрейма.

Правое неравенство в (1.1) выполняется в силу неравенства Буняковского-Коши-Шварца:

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m \rangle|^2 \leqslant \left(\sum_{m=1}^{M} \|f_m\|^2 \right) \|x\|^2 \tag{1.2}$$

для всех x из $\mathbb{H}^N$, верхняя граница при этом (обычно далекая от оптимальной) равна $\sum\limits_{m=1}^{M} \|f_m\|^2$.

Рогач Дарья Александровна (ida@ssau.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Для выполнения нижнего неравенства в (1.1) необходима полнота системы $\{f_m\}_{m=1}^M$. Докажем, что $\operatorname{span}\left(\{f_m\}_{m=1}^M\right)^\perp = \{0\}$. Пусть x — произвольный элемент из $\operatorname{span}\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right)^\perp$. Тогда $< x, f_m >= 0$ для всех $m = 1, \ldots, M$. Из (1.1) получаем, что $x = 0$. Таким образом, доказана полнота системы $\{f_m\}_{m=1}^M$.

Если оптимальная верхняя и нижняя границы совпадают, т. е. $A = B$, то фрейм называется *жестким.* Для жесткого фрейма соотношение (1.1) переходит в равенство

$$\sum_{m=1}^M |\langle x, f_m\rangle|^2 = A\|x\|^2, \tag{1.3}$$

которое при $A = 1$ принимает форму равенства Парсеваля — Стеклова:

$$\sum_{m=1}^M |\langle x, f_m\rangle|^2 = \|x\|^2. \tag{1.4}$$

Фреймы, для которых выполнено (1.4), называют фреймами Парсеваля -Стеклова. Эти фреймы оказываются наиболее подходящими для восстановления сигнала, так как для них, и только для них, справедливо равенство $x = \sum\limits_{m=1}^M \langle x, f_m\rangle f_m$, что показано в работе [2].

1.2. Фреймовый оператор

Определение 1.2. Фреймовый оператор — положительный, самосопряженный обратимый оператор

$$S : H^N \to H^N, S = V^*V,$$

где V — оператор анализа

$$V : x \in H^N \to \{\langle x, f_m\rangle\}_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M.$$

V^* — оператор синтеза, сопряженный оператор к V, который удовлетворяет:

$$V^* : \{z_m\}_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M \to \sum_{m=1}^M z_m f_m \in H^N.$$

Следовательно, (1.1) можно переписать следующим образом:

$$A\langle x, x\rangle \leqslant \langle Sx, x\rangle \leqslant B\langle x, x\rangle.$$

1.3. Восстановление без фаз

Введем понятие системы, которая позволяет по модулям измерений $|\{x, f_m\}|_{m=1}^M$ восстановить сигнал. На H^N вводится отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует постоянная z, $|z| = 1$, такая что $y = zx$. Пусть $\hat{H} = H^N/\sim$ - фактор-пространство. Таким образом, класс эквивалентности имеет вид $\hat{x} = \{\pm x\}$.

Рассмотрим следующее нелинейное отображение

$$\beta : \hat{H} \to \mathbb{R}^M, (\beta(\hat{x}))_m = |\langle x, f_m\rangle|^2, 1 \leqslant m \leqslant M,$$

корректно определено на классах $\hat{x}$, поскольку из $x \sim y$ следует $|\langle x, f_m\rangle|^2 = |\langle y, f_m\rangle|^2$.

Определение 1.3. Будем говорить, что фрейм $F = \{f_1, ..., f_M\}$ восстанавливает без фаз (ВБФ-фрейм), если нелинейное отображение β инъективно.

Заметим, что любой сигнал $x \in H^N$ однозначно (с точностью до множителя) определяется модулями фреймовых коэффициентов с точностью до фазового множителя тогда и только тогда, когда F является ВБФ-фреймом.

Для определения, является ли система ВБФ, будем использовать свойство *альтернативной полноты*, так как данное свойство эквивалентно ВБФ в $\mathbb{R}^N$, что будет доказано ниже.

Определение 1.4. Набор векторов $F = \{f_m\}_{m=1}^M$ в $\mathbb{R}^N$ альтернативно полон (АП), если для любого $P \subseteq \{1, \ldots, M\}$ либо $\{f_m\}_{m\in P}$, либо $\{f_m\}_{m\in P^c}$ полно в $\mathbb{R}^N$ (P^c —дополнение к множеству P).

Теорема 1.1. [3] Фрейм $\{f_m\}_{m=1}^M$ в $\mathbb{R}^N$ является ВБФ-системой тогда и только тогда, когда он обладает свойством альтернативной полноты.

Доказательство: 1) Дана система векторов $F = \{f_m\}_{m=1}^M$ в $\mathbb{R}^N$. F- фрейм. Предположим, что F не обладает свойством альтернативной полноты. Следовательно, найдется $P \subseteq \{1, \ldots, M\}$ такое, что ни $\{f_m\}_{m\in P}$, ни $\{f_m\}_{m\in P^c}$ не полно в $\mathbb{R}^N$.

Возьмем ненулевые векторы $u, v \in \mathbb{R}^N$ так, что $\langle u, f_m \rangle = 0$ для всех $m \in P$ и $\langle v, f_m \rangle = 0$ для всех $m \in P^c$.

Для каждого m получим

$$|\langle u+v, f_m \rangle|^2 = |\langle u, f_m \rangle|^2 + 2\langle u, f_m \rangle \langle v, f_m \rangle + |\langle v, f_m \rangle|^2 = |\langle u, f_m \rangle|^2 + |\langle v, f_m \rangle|^2.$$
$$|\langle u-v, f_m \rangle|^2 = |\langle u, f_m \rangle|^2 - 2\langle u, f_m \rangle \langle v, f_m \rangle + |\langle v, f_m \rangle|^2 = |\langle u, f_m \rangle|^2 + |\langle v, f_m \rangle|^2.$$

Отсюда следует, что $|\langle u+v, f_m \rangle|^2 = |\langle u-v, f_m \rangle|^2$ для каждого m, и для отображения $\mathcal{A}$ справедливо

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}(u-v).$$

По предположению u и v не нулевые, значит,

$$u + v \neq \pm(u - v).$$

Таким образом, отображение $\mathcal{A}$ - не инъективно.

2) F — АП. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно. Это означает, что существуют векторы $x, y \in \mathbb{R}^N$ такие, что $x \neq \pm y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$.

Обозначим $P := \{n : \langle x, f_m \rangle = -\langle y, f_m \rangle\}$. Имеем: $\langle x+y, f_m \rangle = 0$ для каждого $m \in P$, и $\langle x-y, f_m \rangle = 0$ для каждого $m \in P^c$.

По предположению, $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Таким образом, и $\{f_m\}_{m \in P}$, и $\{f_m\}_{m \in P^c}$ не полны в $\mathbb{R}^N$. Что противоречит определению альтернативной полноты. Теорема доказана.

Теорема 1.2. [2] Для произвольного фрейма $\{f_m\}_{m=1}^M \subset \mathbb{H}^N$ фрейм $\{S^{-1/2} f_m\}_{m=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова.

Доказательство: Для каждого $x \in \mathbb{H}^N$ верно представление

$$x = S^{-1/2} S S^{-1/2} x = \sum_{m=1}^M < S^{-1/2} x, f_m > S^{-1/2} f_m = \sum_{m=1}^M < x, S^{-1/2} f_m > S^{-1/2} f_m.$$

Таким образом, получаем, что $\{S^{-1/2} f_m\}_{m=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова.

В следующей теореме показана связь между собственными значениями фреймового оператора и границами фрейма.

Теорема 1.3.[3] Пусть $\{f_m\}_{m=1}^M$ —фрейм для $\mathbb{H}^N$ с фреймовым оператором S, собственные значения которого суть $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$. Тогда λ_1 совпадает с оптимальной верхней фреймовой границей, а λ_N — с оптимальной нижней фреймовой границей.

Доказательство Пусть $\{g_n\}_{n=1}^N$ - нормированные собственные векторы фреймового оператора и соответствующими собственными значениями, выписанными в порядке убывания. Для произвольного $x \in \mathbb{H}^N$ имеем $x = \sum\limits_{n=1}^N \langle x, g_n \rangle g_n$, отсюда

$$Sx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, g_n \rangle g_n.$$

Далее, получаем

$$\sum_{m=1}^M |\langle x, f_m \rangle|^2 = \langle Sx, x \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, g_n \rangle g_n, \sum_{n=1}^N \langle x, g_n \rangle g_n \right\rangle =$$
$$= \sum_{n=1}^N \lambda_n |\langle x, g_n \rangle|^2 \leqslant \lambda_1 \sum_{n=1}^N |\langle x, g_n \rangle|^2 = \lambda_1 \|x\|^2.$$

Таким образом, $B_{op} \leqslant \lambda_1$, здесь B_{op} обозначает оптимальную верхнюю фреймовую границу фрейма $\{f_m\}_{m=1}^M$. Равенство $B_{op} = \lambda_1$ оказывается следствием следующих равенств:

$$\sum_{m=1}^M |\langle g_1, f_m \rangle|^2 = \langle S g_1, g_1 \rangle = \langle \lambda_1 g_1, g_1 \rangle = \lambda_1.$$

Аналогичные рассуждения проводятся в отношении нижней границы.

2. Фрейм из ортов

Рассмотрим, следуя [1], систему векторов $F = \{e_1, e_2, ..., e_N\} \cup \{e_i + e_j\}_{1 \leqslant i < j \leqslant N}$, где $\{e_1, e_2, ..., e_N\}$ - ортонормированный базис в $\mathbb{R}^N$.

Фрейм F состоит из M векторов.

$$M = N + C_N^2 = N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

Вычислим фреймовый оператор для нашей системы, для это сначала запишем V - оператор синтеза и V^*- оператор анализа.

Столбцы матрицы оператора синтеза являются координатами фреймовых векторов $V = F$. Матрица оператора анализа $V^* = F^T$, где F^T —транспонированная матрица F.

$$S = V^*V = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & N & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & N & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & N \end{pmatrix}$$

Мы получаем матрицу, все диагональные элементы которой равны N, а на остальных местах стоят единицы.

Корнями характеристического уравнения $|S - \lambda E| = 0$ будут $\lambda_1 = N - 1$ кратности $N - 1$ и $\lambda_2 = 2N - 1$ кратности равной 1. Для λ_1 собственные вектора, найденные из уравнения $(S - \lambda_1 E)\bar{x} = \bar{0}$ будут выражаться из соотношения $x_1 = -x_2 - ... - x_N$. Для λ_2: $x_1 = x_2 = ... = x_N$.

Так как полученная матрица является самосопряженной и обратимой, можно сказать [3], что выбранная система векторов F — фрейм. Притом $\lambda_1 = N - 1$ —оптимальная нижняя граница, а $\lambda_2 = 2N - 1$ — верхняя.

Выясним, является ли F — ВБФ-фреймом. Для определения, является ли F ВБФ, будем использовать свойство альтернативной полноты, так как оно эквивалентно ВБФ в $\mathbb{R}^N$, что было доказано выше.

Рассмотрим всевозможные разбиения F. Так как эта системапредставляет собой набор векторов ортонормированного базиса и линейные комбинации этих векторов, то легко увидеть, что при любом разбиении F получится хотя бы одна система векторов, которая будет полна в $\mathbb{R}^N$.

Распишем подробно операторы синтеза, анализа и фреймовый оператор в пространстве $\mathbb{R}^4$.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения λ_i и собственные вектора v_i, $i = 1, ..., 4$. Для этого найдем значения $|S - \lambda E| = 0$.

$$|S - \lambda E| = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 16\lambda^3 + 90\lambda^2 - 216\lambda + 189 =$$

$$= (\lambda - 3)^3(\lambda - 7) = 0.$$

Корнями этого выражения будут $\lambda_1 = 3$ кратности 3, $\lambda_2 = 7$. Подставим найденные значения в характеристическое уравнение и найдем собственные вектора.

1) $\lambda_1 = 3$

$$(S - 3E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения $(S - 3E)x = \bar{0}$ получаем соотношение $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$. Возьмем $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = -1$. Первый собственный вектор примет значение $v_1 = (1, -1, 0, 0)^T$. Теперь возьмем $x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = -1$ и $v_2 = (1, 0, -1, 0)^T$. Аналогично и для оставшегося случая, получим вектор $v_3 = (1, 0, 0, -1)^T$.

2) $\lambda_2 = 7$

$$(S-7E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем сиситему

$$\{ x_1 = x_4; x_2 = x_4; x_3 = x_4.$$

Возьмем $x_4 = 1$, тогда $v_4 = (1,1,1,1)^T$.

Обозначим матрицу, столбцы которой найденные собственные вектора, T. В случае $\mathbb{R}^4$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из первой части мы знаем, что из любого фрейма можно получить фрейм Парсеваля — Стектова. Для этого нужно найти оператор $S^{-1/2}$.

$$S = TDT^{-1}, \text{где } D \text{ —диагональная матрица для матрицы } S.$$

$$S^{1/2} = TD^{1/2}T^{-1}$$

Вычислим в $\mathbb{R}^4$:

$$S^{1/2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{7} & 3\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & 3\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & 3\sqrt{3}+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Для того чтобы получить искомый $S^{-1/2}$, нужно лишь найти обрытный оператор от полученного выше $S^{1/2}$.

$$S^{-1/2} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} \\ -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} \\ -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} \\ -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Теперь подействуем найденным оператором на состему векторов F. Получим фрейм Парсеваля — Стеклова, который представлен в виде матрицы размерности M на N.

2.1. Алгоритм восстановления сигнала

Проанализировав выбранную систему векторов, перейдем к алгоритму восстановления сигнала, в соотверствии с [1]. Как указано в [1] идея алгоритма принадлежит М.Штрауссу.

Возьмем систему $F = \{e_1, e_2, ..., e_N\} \cup \{e_i + e_j\}_{1 \leqslant i < j \leqslant N}$, которая, как доказано выше, является ВБФ-фреймом.

Обозначим измерения, как

$$< x, e_n >= a_n, \ \ n = 1, ..., N$$

$$< x, e_i + e_j >= a_l, \ \ 1 \leqslant i < j \leqslant N, l = N+1, ..., M.$$

Но на практике, нам известны лишь модули измерений. Пусть a_i - первый ненулевой коэффициент, и пусть $b_j = a_j/a_i$, где $i \neq j$, $i, j = 1, ..., M$.

Представим сигнал в виде суммы и распишем её, используя введённые ранее обозначения:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n = a_1 f_1 + a_2 f_2 + ... + a_N f_N. \tag{2.1}$$

$$\frac{x}{a_i} = \frac{a_1}{a_i} f_1 + ... + f_i + ... + \frac{a_N}{a_i} f_N = b_1 f_1 + ... + f_i + ... b_N f_N. \tag{2.2}$$

Для b_j справедлива формула:

$$b_j = \frac{|1+b_j|^2 - |b_j|^2 - 1}{2},$$

где

$$|b_j| = |\frac{a_j}{a_i}| = \frac{|a_j|}{|a_i|},$$

$$|1+b_j| = |1+\frac{a_j}{a_i}| = |\frac{a_i+a_j}{a_i}| = \frac{|< x, e_i > + < x, e_j >|}{|a_i|} =$$

$$= \frac{|< x, e_i + e_j >|}{|a_i|} = \frac{|a_l|}{|a_i|}.$$

Вычислим нужные значения b_j, и подставим значения в (2). Получим, что

$$x = |a_i|(b_1e_1 + ... + e_i + ...b_Ne_N).$$

Для наглядности метода представим примеры восстановления сигнала в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$.

Пример 2.1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны измерения

$$|a_1| = |\langle x, e_1\rangle| = 3; |a_2| = |\langle x, e_2\rangle| = \sqrt{3}; |a_3| = |\langle x, e_3\rangle| = 2;$$

$$|a_4| = |\langle x, e_4\rangle| = 3+\sqrt{3}; |a_5| = |\langle x, e_5\rangle| = 5; |a_6| = |\langle x, e_6\rangle| = 2+\sqrt{3}$$

Фрейм представим векторами

$$e_1 = \{1,0,0\}; e_2 = \{0,1,0\}; e_3 = \{0,0,1\}; e_4 = \{1,1,0\};$$

$$e_5 = \{1,0,1\}; e_6 = \{0,1,1\}.$$

Мы знаем, что исходный сигнал можно представить в следующем виде

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$

Возьмем a_1, так как $a_1 \neq 0$:

$$\frac{x}{a_1} = e_1 + \frac{a_2}{a_1}e_2 + \frac{a_3}{a_1}e_3 = e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \tag{2.3}$$

Вычислим

$$b_2 = \frac{\frac{|a_4|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$b_3 = \frac{\frac{|a_5|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = \frac{2}{3}$$

Подставляем найденные значения в уравнение (2.3).

$$x = |a_1|(e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = \pm\{3, -\sqrt{3}, 2\}$$

Получаем, что исходный сигнал принимал одно из полученных значений $x = \pm\{3, -\sqrt{3}, 2\}$.

Пример 2.2 Даны измерения:

$$|a_1| = |\langle x, e_1\rangle| = 1; |a_2| = |\langle x, e_2\rangle| = 0; |a_3| = |\langle x, e_3\rangle| = 3; |a_4| = |\langle x, e_4\rangle| = 1;$$

$$|a_5| = |\langle x, e_1+e_2\rangle| = 1; |a_6| = |\langle x, e_1+e_3\rangle| = 4; |a_7| = |\langle x, e_1+e_4\rangle| = 2;$$

$$|a_8| = |\langle x, e_2+e_3\rangle| = 1; |a_8| = |\langle x, e_2+e_4\rangle| = 1; |a_10| = |\langle x, e_3+e_4\rangle| = 4.$$

Вычислим коэффициенты b_2, b_3, b_4.

$$b_2 = \frac{|1-b_2|^2 - |b_2|^2 - 1}{2} = \frac{\frac{|a_5|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = 0$$

$$b_3 = \frac{\frac{|a_6|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = 3$$

$$b_4 = \frac{\frac{|a_7|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_4|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = 1$$

Получаем исходный сигнал: $x = \pm\{1, 0, 3, 1\}$.

Литература

[1] Fast algorithms for signal reconstruction without phase / R. Balan [et al.]. Wavelets XII. 2007. Vol. 6701 of Proc. SPIE. P. 670111920–670111932.

[2] Новиков С.Я., Лихобабенко М.А. Фреймы конечномерных пространств. Самара: Самарский госуниверситет, 2013. С. 5–24

[3] Новиков С.Я. Фреймы конечномерных пространств и дискретная фазовая проблема. Самара: Самарский госуниверситет, 2016. С. 25–35

[4] Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, 2008. 487 с.

[5] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz bases. Boston: Birkhäuser. 2003. 440 p.

[6] Saving phase: Injectivity and stability / A. Bandeira [et al.]. arXiv: math. 1302.4618v1.

[7] Balan R., Casazza P., Edidin D. On signal reconstruction without phase. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. № 20:3. P. 345–356.

[8] Dustin G.M. SOFT 2016: Summer of Frame Theory. URL: http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory (15.06.2016).

References

[1] R. Balan, B.G. Bodmann, P.G. Casazza, D. Edidin *Fast algorithms for signal reconstruction without phase. Wavelets XII*, 2007, Volume 6701 of Proc. SPIE, pp. 670111920–670111932 [in English].

[2] Novikov S.Ya., Likhobabenko M.A. *Freimy konechnomernykh prostranstv* [Frames of finite dimensional spaces]. Samara: Samarskii gosuniversitet, 2013, pp. 5-24 [in Russian].

[3] Novikov S.Ya. *Freimy konechnomernykh prostranstv i diskretnaia fazovaia problema* [Frames of finite dimensional spaces and discrete phase problem]. Samara: Samarskii gosuniversitet, 2016, pp. 25-35 [in Russian].

[4] Frazier M. *Vvedenie v veivlety v svete lineinoi algebry* [An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra]. M.: BINOM, 2008, 487 p. [in Russian].

[5] Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz bases.* Boston: Birkhäuser, 2003, 440 pp. [in English]

[6] Bandeira A.S., Cahill J., Mixon G., Nelson A.A. *Saving phase: Injectivity and stability.* arXiv: math. 1302.4618v1. [in English]

[7] Balan R., Casazza P., Edidin D. *On signal reconstruction without phase. Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2006, no. 20:3, pp. 345–356 [in English].

[8] *Dustin G. Mixon* SOFT 2016: Summer of Frame Theory. Retrieved from: http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory (accessed 15.06.2016) [in English].

D.A. Rogach[2]

THE FRAME FOR ALGORITHM SIGNAL RECOVERY

A frame of a finite-dimensional Euclidean space composed of vectors and their sums is considered. The operator proof of frame properties of the constructed system is presented, the eigenvalues for the matrix of the frame operator are found, which are also frame boundaries. The property of alternative completeness of the constructed system is proved. This property is the cause of interest in the constructed frame, since in real Euclidean space it is equivalent to injectivity of the measurement operator, which maps the signal vector into a sequence of measurement modules. The investigated frame underlies the fast algorithm of signal reconstruction, proposed by M. Shapiro and stated in [1]. An operator that translates the constructed frame into the Parseval-Steklov frame closest to it, is found.

Key words: frame, Parseval-Steklov frame, analysis operator, synthesis operator, frame operator, eigenvalent, eigenvector, alternative completeness.

Статья поступила в редакцию $11/XI/2017$.
The article received $11/XI/2017$.

[2] *Rogach Daria Alexandrovna* (ida@ssau.ru), Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.