УДК 517.946 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-19-24

А.И. Кожанов[1]

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В статье исследуется вопрос о разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений. Одной из особенностей изучаемых уравнений является возможность вырождения при обращении в нуль некоторых из его коэффициентов. Другая особенность изучаемых уравнений заключается в том, что они являются нелокальными, что влечет за собой существенные изменения в постановке задач. В частности, нелокальный характер уравнений приводит и к нелокальным условиям. В работе найдены достаточные условия, обеспечивающие корректность четырех поставленных задач.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, краевые задачи, вырождение, нелокальные условия, существование и единственность решений.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $S=\Gamma\times(0,T)$ — боковая граница Q, $f(x,t)$, $a_i(x,t)$, $b_i(x,t)$, $i=0,1$ — заданные функции, определенные в $\overline{Q}$. Далее, пусть $\mathcal{L}_i(t;v)$, $i=0,1$, есть операторы, действие которых на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенствами

$$\mathcal{L}_i(t;v)=\int\limits_{\Omega} b_i(x,t)v(x,t)\,dx.$$

Целью работы является исследование разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений

$$\Delta u+a_0(x,t)\mathcal{L}_0(t;u)+a_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{L}_1(t;u)\right)=f(x,t). \qquad (1)$$

Особенностями изучаемых уравнений является, во-первых, то, что они являются нелокальными, или нагруженными [1,2], во-вторых же — то, что в этих уравнениях допускается вырождение (вырождение имеет место, если функции $a_1(x,t)$ и $b_1(x,t)$ каким-либо образом обращаются в нуль; более точно характер вырождения будет описан ниже).

Как и для обычных параболических уравнений с меняющимся по переменной t направлением эволюции, вырождение в уравнениях (1) повлечет за собой видоизмененную постановку краевых задач: в некоторых случаях будут задаваться условие при $t=0$, в других — при $t=T$, в третьих — и при $t=0$, и при $t=T$, наконец, возможна будет и ситуация, в которой при $t=0$ и при $t=T$ условий не будет вообще (подобные ситуации для параболических уравнений см., например, в работах [3–5]).

И еще одно замечание. Нелокальный характер уравнений (1) приведет и к нелокальному характеру условий при $t=0$ и (или) при $t=T$ (точный вид этих условий будет представлен ниже).

Перейдем к содержательной части работы.

Обозначим через H_0 и H_T ортогональные дополнения в пространстве $L_2(\Omega)$ к функциям $b_1(x,0)$ и $b_1(x,T)$ соответственно.

Рассмотрим следующие краевые задачи:

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется граничное условие*

$$u(x,t)|_S=0, \qquad (2)$$

и при этом функция $u(x,0)$ принадлежит множеству H_0.

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), и при этом функция $u(x,T)$ принадлежит множеству H_T.*

Кожанов Александр Иванович (kozhanov@math.nsc.ru), Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. акад. Коптюгаул, 4.

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), и при этом функция $u(x,0)$ принадлежит множеству H_0, функция $u(x,T)$ принадлежит множеству H_T.*

Краевая задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2).*

Всюду ниже под решением уравнения (1) будем подразумевать функцию $u(x,t)$, принадлежащую пространству $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$ и такую, что $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $L_\infty([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_\infty^1([0,T])$.

Целью настоящей работы является определение достаточных условий, обеспечивающих корректность краевых задач I–IV.

Определим функции $\widetilde{b}_i(x,t)$, $i=0,1$, как решения краевых задач

$$\Delta\widetilde{b}_i(x,t)=b_i(x,t),\quad \widetilde{b}_i(x,t)|_S=0.$$

Далее, введем обозначения:

$$\alpha_0(t)=\int\limits_\Omega a_0(x,t)\widetilde{b}_0(x,t)\,dx,\quad \alpha_1(t)=\int\limits_\Omega a_1(x,t)\widetilde{b}_0(x,t)\,dx,$$

$$\beta_0(t)=\int\limits_\Omega a_0(x,t)\widetilde{b}_1(x,t)\,dx,\quad \beta_1(t)=\int\limits_\Omega a_1(x,t)\widetilde{b}_1(x,t)\,dx,$$

$$f_0(t)=\int\limits_\Omega f(x,t)\widetilde{b}_0(x,t)\,dx,\quad f_1(t)=\int\limits_\Omega f(x,t)\widetilde{b}_1(x,t)\,dx,$$

$$h(t)=\beta_1(t)-\frac{\alpha_1(t)\beta_0(t)}{1+\alpha_0(t)},\quad g(t)=f_1(t)-\frac{\beta_0(t)f_0(t)}{1+\alpha_0(t)}.$$

Разрешимость краевых задач I–IV будет основана на разрешимости краевыз задач для обыкновеного дифференциального уравнения

$$h(t)w'+w=g(t).$$

Приведем соответствующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

$$h(t)\in C^2([0,T]),\quad -\frac{2}{3}<h'(t)<2\quad \textit{при}\quad t\in[0,T]; \tag{3}$$

$$g(t)\in W_2^2([0,T]); \tag{4}$$

$$h(0)>0,\quad h(T)=0,\quad g(0)=0,\quad g'(T)=0. \tag{5}$$

Тогда краевая задача

$$h(t)w'+w=g(t),\quad w(0)=0, \tag{6}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия (3) и (4), а также условие*

$$h(0)=0,\quad h(T)<0,\quad g(T)=0,\quad g'(0)=0. \tag{7}$$

Тогда краевая задача

$$h(t)w'+w=g(t),\quad w(T)=0, \tag{8}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Утверждение 3. *Пусть выполняются условия (3) и (4), а также условие*

$$h(0)>0,\quad h(T)<0,\quad g(0)=g(T)=0,\quad g'(0)=g'(T)=0. \tag{9}$$

Тогда краевая задача

$$h(t)w'+w=g(t),\quad w(0)=w(T)=0, \tag{10}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Утверждение 4. *Пусть выполняются условия (3) и (4), а также условие*

$$h(0)=0,\quad h(T)=0,\quad g'(0)=g'(T)=0. \tag{11}$$

Тогда уравнение

$$h(t)w'+w=g(t) \tag{12}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Доказательство утверждений 1–4 проводится в целом по одной и той же схеме. Рассматриваются вспомогательные задачи с положительным параметром ε:

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w(0) = w''(0) = w'(T) = w'''(T) = 0 \tag{13}$$

(к задаче (6));

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w'(0) = w'''(0) = w(T) = w''(T) = 0 \tag{14}$$

(к задаче (8));

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w(0) = w'(0) = w(T) = w'(T) = 0 \tag{15}$$

(к задаче (10));

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w'(0) = w'''(0) = w'(T) = w'''(T) = 0 \tag{16}$$

(к задаче (12)).

Каждая из задач (13)–(16) разрешима (и притом единственным образом) в пространстве $W_2^4([0,T])$, для решений $w(t)$ каждой из этих задач выполняется априорная оценка

$$\varepsilon \int\limits_0^T (w'''')^2\,dt + \|w\|^2_{W_2^2([0,T])} \leqslant M\|g\|^2_{W_2^2([0,T])} \tag{17}$$

с фиксированной постоянной M (для доказательства этой оценки необходимо последовательно умножить дифференциальное уравнение задач (13)–(16) на функции $w(t)$, $-w''(t)$, $w''''(t)$ и проинтегрировать по отрезку $[0,T]$; с помощью условий (3) и (4), а также условий на функцию $g(t)$ из полученных равенств и выводится оценка (17)). Из оценки (17) и из свойства рефлексивности пространства L_2 вытекает, что существуют последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел, последовательность $\{w_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений задач (13)–(16) с соответствующим параметром ε_m, а также функция $w(t)$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_m w_m''''(t) \to 0$ слабо в пространстве $L_2([0,T])$, $h(t)w_m'(t) + w_m(t) \to h(t)w'(t) + w$ слабо в пространстве $L_2([0,T])$, и при этом предельная функция $w(t)$ будет решением соответствующих задач (6), (8), (10) или (12), и будет принадлежать пространству $W_2^2([0,T])$. Единственность решений задач (6), (8), (10) или (12) в пространстве $W_2^2([0,T])$ очевидным образом вытекает из равенства

$$\int\limits_0^T (h(t)w' + w)w\,dt = \int\limits_0^T gw\,dt$$

и условий соответствующего утверждения.

Замечание. В утверждениях 1–4 рассматривается ситуация, в которой функция $h(t)$ обязательно где-либо на отрезке $[0,T]$ обращается в нуль (и, вообще говоря, может менять знак произвольным образом). Вместе с тем очевидно, что при отсутствии вырождения — т.е. в случае положительной или же отрицательной на отрезке $[0,T]$ функции $h(t)$ — условие разрешимости в пространстве $W_2^2([0,T])$ задач (6) или (8) можно ослабить.

Перейдем к исследованию разрешимости краевых задач I–IV.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a_i(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a_{it}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a_{itt}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b_i(x,t) \in C(\overline{Q}),$$
$$b_{it}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b_{itt}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad i = 0,1; \tag{17}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{tt}(x,t) \in L_2(Q); \tag{18}$$

$$h(t) \in C^2([0,T]), \quad 1 + \alpha_0(t) \neq 0, \quad -\frac{2}{3} < h'(t) < 2 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{19}$$

$$h(0) > 0, \quad h(T) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(T) = 0. \tag{20}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия (17) и из [6] вытекает, что функции $\widetilde{b}_i(x,t)$ корректно определены, и для них будут выполняться включения $\widetilde{b}_i(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $\widetilde{b}_{it}(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $\widetilde{b}_{itt}(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $i = 0,1$. Эти включения и условия (17)–(20) означают, что для функций $h(t)$ и $g(t)$ выполняются все условия Утверждения 1. Следовательно, существует функция $w(t)$, принадлежащая пространству $W_2^2([0,T])$ и являющаяся решением краевой задачи (6). Определим функцию $v(t)$:

$$v(t) = \frac{f_0(t)}{1+\alpha_0(t)} - \frac{\alpha_1(t)}{1+\alpha_0(t)} w'(t).$$

Далее, рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\Delta u = f(x,t) - a_0(x,t)v(t) - a_1(x,t)w'(t) \tag{22}$$

и такую, что для нее выполняется условие (2). Заметим, что правая часть в уравнении (22) принадлежит пространству $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. Отсюда и из [7] следует, что функция $u(x,t)$ как решение краевой задачи (22), (2) определена корректно и является элементом пространства $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$. Имеют место равенства

$$[1+\alpha_0(t)]v(t) + \alpha_1(t)w'(t) = f_0(t),$$
$$\beta_0(t)v(t) + w(t) + \beta_1(t)w'(t) = f_1(t),$$
$$\int\limits_\Omega b_0(x,t)u(x,t)\,dx + \alpha_0(t)v(t) + \alpha_1(t)w'(t) = f_0(t),$$
$$\int\limits_\Omega b_1(x,t)u(x,t)\,dx + \beta_0(t)v(t) + \beta_1(t)w'(t) = f_1(t).$$

Из этих равенств очевидным образом вытекают соотношения

$$v(t) = \int\limits_\Omega b_0(x,t)u(x,t)\,dx, \quad w(t) = \int\limits_\Omega b_1(x,t)u(x,t)\,dx.$$

Эти соотношения, уравнение (22) и включения $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $v(t) \in W_2^1([0,T])$, $w(t) \in W_2^2([0,T])$ означают, что найденная функция $u(x,t)$ будет искомым решением краевой задачи I.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (17)–(19), а также условие*

$$h(0) = 0, \quad h(T) < 0, \quad g(T) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (17)–(19), а также условие*

$$h(0) > 0, \quad h(T) < 0, \quad g(0) = g(T) = g'(0) = g'(T) = 0.$$

Тогда краевая задача III имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (17)–(19), а также условие*

$$h(0) = 0, \quad h(T) = 0, \quad g'(0) = g'(T) = 0.$$

Тогда краевая задача IV имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Доказательство теорем 2–4 проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие. *При выполнении условий одной из теорем 1–4 решение $u(x,t)$ краевых задач I, II, III или IV будет иметь обобщенную производную $u_t(x,t)$, и эта обобщенная производная будет принадлежать пространству $L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.*

Доказательство. При выполнении условий теорем 1,2,3 или 4 правая часть в уравнении (22) будет иметь обобщенную производную по переменной t, и эта обобщенная производная будет принадлежать пространству $L_2(Q)$. Из общей теории разрешимости в пространствах Соболева краевых задач для эллиптических уравнений [7] и следует требуемое.

Следствие доказано.

В заключение заметим следующее. Краевое условие Дирихле в задачах I–IV можно заменить другим условием — например, условием третьей краевой задачи. Далее, в уравнении (1) оператор Лапласа можно заменить более общим эллиптическим оператором второго или же произвольного четного порядка (в случае оператора порядка выше второго краевое условие (2) должно меняться на естественные краевые условия для эллиптических уравнений высокого порядка). Во всех случаях требования на коэффициенты оператора и коэффициенты граничных условий, нафункции $a_0(x,t)$, $a_1(x,t)$, $b_0(x,t)$ и $b_1(x,t)$, должны быть такими, чтобы краевые задачи, определяющие функции $\widetilde{b}_0(x,t)$ и $\widetilde{b}_1(x,t)$, задачи (6), (8), (10), (12), а также задачи, соответствующие задаче (22), (2), имели бы решения, принадлежащие требуемым классам. И, наконец, последнее. Если в уравнении

$$h(t)w' + w = g(t),$$

функция $h(t)$ не вырождается — т.е. если выполняется условие

$$|h(t)| \geqslant h_0 > 0,$$

то корректной будет либо задача (6), либо задача (8), и при этом условия на функции $h(t)$ и $g(t)$ можно существенно ослабить.

Литература

[1] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.

[2] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.

[3] Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычисл. Центр СО РАН, 1995.

[4] Efimova, E.S., Egorov, I.E., Kolesova, M.S. Error Estimate to the Stationary Galerkin Method Applied to a Semilinear Parabolic Equation with Alternating Time Direction. Journal of Mathematical Sciences. 2016. № 213(6). P. 838–843.

[5] Егоров И.Е., Федоров В.Е., Тихонова И.М., Ефимова Е.С. Метод Галеркина для неклассических уравнений математической физики // VIII Международная конференция по математическому моделированию. Якутск. 4–8 июля 2017 г. Тезисы докладов. С. 11.

[6] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

[7] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

References

[1] Nahushev A.M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primenenie* [Loaded equations and their application]. M.: Nauka, 2012 [in Russian].

[2] Dzhenaliev M.T. *K teorii lineinykh kraevykh zadach dlia nagruzhennykh differentsial'nykh uravnenii* [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]. Almaty: In-t teoreticheskoi i prikladnoi matematiki, 1995 [in Russian].

[3] Egorov I.E., Fedorov V.E. *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki vysokogo poriadka* [Nonclassical equations of high-order mathematical physics]. Novosibirsk: Vychisl. Tsentr SO RAN, 1995 [in Russian].

[4] Efimova E.S., Egorov I.E., Kolesova M.S. Error Estimate to the Stationary Galerkin Method Applied to a Semilinear Parabolic Equation with Alternating Time Direction. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, 213(6), pp. 838–843 [in English].

[5] Egorov I.E., Fedorov V.E., Tihonova I.M., Efimova E.S. *Metod Galerkina dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics]. In: VIII Mezhdunarodnaia konferentsiia po matematicheskomu modelirovaniiu. Iakutsk. 4–8 iiulia 2017 g. Tezisy dokladov [VIII International Conference on mathematical modeling. Yakutsk. July 4-8, 2017. Abstracts of reports], p. 11 [in Russian].

[6] Bitsadze A.V. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 1976 [in Russian].

[7] Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

A.I. Kozhanov[2]

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF NONLOCAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

In this paper, we study the solvability of boundary value problems for integro-differential equation. One of the features of the equations under consideration is the possibility of degeneration when some of coefficients vanish. The other feature is that the equations under consideration are nonlocal. This motivates modifications in statement of problems. Nonlocal nature of equation in particular leads to nonlocal conditions. Sufficient conditions providing well-posedness of four problems are obtained.

Key words: integro-differential equations, boundary problems, degeneration, nonlocal conditions, existence and uniqueness of solutions.

Статья поступила в редакцию 28/*IX*/2017.
The article received 28/*IX*/2017.

[2] *Kozhanov Alexander Ivanovich* (kozhanov@math.nsc.ru), Sobolev Institute of Mathematics, 4, Akad. Koptyug Av., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.