МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 624.07 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18

А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина[1]

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОГО СТЕРЖНЯ

В статье рассматривается начально-краевая задача с динамическим нелокальным граничным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка в прямоугольнике. Динамическое нелокальное граничное условие представляет собой соотношение, в которое помимо значений искомого решения и его производных по пространственным переменным входят производные второго порядка по переменной времени, а также интеграл от искомого решения. Эта задача может служить математической моделью процессов, связанных с продольными колебаниями толстого короткого стержня, и демонстрирует нелокальный подход к изучаемому явлению. Основной результат статьи состоит в обосновании разрешимости поставленной задачи. Доказано существование единственного обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках, методе Галеркина и свойствах пространств Соболева.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, динамические граничные условия, продольные колебания, нелокальные условия, обобщенное решение.

Введение

Теоретические исследования продольных колебаний относительно толстого и короткого стержня базируются на математической модели, содержащей уравнение четвертого порядка с доминирующей смешанной производной. Этот факт был отмечен Рэлеем [1, Т. I, с. 273–274] и в дальнейшем развит в работах [2–4]. Использование этой модели позволяет проводить более точный анализ процесса, так как присутствие в уравнении смешанной производной четвертого порядка отражает эффекты деформации стержня в поперечном направлении. Вид краевых условий обусловлен способом закрепления концов стержня. В случае колебаний тонкого длинного стержня условия, заданные в точках границы области, в которой ищется решение, достаточны для адекватного описания процесса колебаний. Однако, если речь идет о колебаниях толстого короткого стержня, то следует предположить, что краевые условия, заданные на разных участках границы, могут оказаться связанными между собой некоторым соотношением. Задача, в которой учтена такая возможность, рассматривалась В.А. Стекловым для уравнения теплопроводности [5]. Краевые условия, возникающие при таком подходе, впоследствии были названы нелокальными, а упомянутая статья оказалась отправной точкой многих исследований нелокальных задач для уравнений с частными производными различных типов [6–9]. Следующим шагом в постановке нелокальных задач явились статьи [10; 11], в которых вместо краевых условий на решение уравнения теплопроводности рассматриваются нелокальные условия, заданные в виде интегралов от искомого решения. Такой подход оказался весьма эффективным. В настоящее время задачи с нелокальными условиями активно изучаются, опубликовано большое количество работ, из которых мы отметим лишь наиболее близкие к теме нашей статьи, а именно те, в которых рассмотрены нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболического и псевдогиперболического уравнений [12–16]. Нелокальные задачи оказались в сфере интересов многих математиков как теоретическое обобщение классических краевых задач. Разработаны методы доказательства их разрешимости. В то же время гипотеза о разумности нелокального подхода к математическому моделированию многих явлений современного естествознания, в том числе колебаний твердых тел, выдвинута и со стороны инженеров [17]. Многие идеи, представлен-

Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

ные в этой статье, могут быть реализованы с помощью теперь уже известных методов, разработанных для исследования именно нелокальных задач.

Приведенные соображения обусловили постановку задачи с нелокальными условиями для псевдогиперболического уравнения, которая и является основным объектом исследования предлагаемой статьи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим продольные колебания толстого короткого стержня, которые возбуждаются распределенной силой $f(x,t)$. Будем считать, что стержень представляет собой тело вращения относительно оси $0x$. Продольные смещения, подлежащие определению, обозначим $u(x,t)$.

Рассмотрим следующую задачу: в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ найти решение уравнения

$$Lu \equiv \sigma(x)u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{ttx})_x + cu = F(x,t), \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{1.2}$$

и нелокальным условиям

$$\int\limits_0^l P_1(x)u(x,t)dx = E_1(t), \quad \int\limits_0^l P_2(x)u(x,t)dx = E_2(t). \tag{1.3}$$

Функции $P_i(x)$, $E_i(t)$ заданы, а коэффициенты уравнения имеют физический смысл:

$$\sigma(x) = \rho(x)A(x), \quad a(x) = A(x)E(x), \quad b(x) = \rho(x)\nu^2(x)I_p(x),$$

где $A(x)$ — площадь поперечного сечения, $\rho(x)$ — массовая плотность стержня, $E(x)$ — модуль Юнга, $\nu(x)$ — коэффициент Пуассона, $I_p(x)$ — полярный момент инерции.

Условия (1.3) являются интегральными условиями первого рода. Исследование задач с такими условиями сопряжено со значительными трудностями, но методы их преодоления разработаны и успешно применяются [18]. Однако в нашем случае есть одно препятствие, не позволяющее сразу применить эти методы, так как коэффициент $\sigma(x)$ в уравнении (1.1) не есть постоянная. Проведенные исследования позволили предложить эффективный прием, который приводит к возможности применить разработанные методы исследования разрешимости задачи с нелокальными интегральными условиями вида (1.3).

Выберем функции $K_1(x), K_2(x)$ так, чтобы $\sigma K_i - (K'(x)b(x))' = P_i(x)$, и

$$\Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0. \tag{1.4}$$

Предположим, что существует решение задачи (1.1)–(1.3). Умножим (1.1) на $K_i(x), i = 1,2$, и проинтегрируем каждое из полученных равенств по $(0,l)$. Получим

$$\begin{gathered}[K_i(0)a(0)u_x(0,t) + K_i(0)b(0)u_{xtt}(0,t)] - [K_i(l)a(l)u_x(l,t) + K_i(l)b(l)u_{xtt}(l,t)] - \\ -K_i'(0)a(0)u(0,t) + +K_i'(l)a(l)u(l,t) - K_i'(0)b(0)u_{tt}(0,t) + K_i'(l)b(l)u_{tt}(l,t) + \\ + \int\limits_0^l P_i(x)u_{tt}dx + \int\limits_0^l [cK_i - (aK_i')']udx = \int\limits_0^l K_i f dx.\end{gathered} \tag{1.5}$$

В силу условия (1.4) систему (1.5) можно разрешить относительно двух первых слагаемых. Получим

$$\begin{gathered}a(0)u_x(0,t) + b(0)u_{xtt}(0,t) + \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \\ +\beta_{11}u_{tt}(0,t) + \beta_{12}u_{tt}(l,t) + \int_0^l H_1(x)u(x,t)dx = g_1(t), \\ a(l)u_x(l,t) + b(l)u_{xtt}(l,t) + \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \\ +\beta_{21}u_{tt}(0,t) + \beta_{22}u_{tt}(l,t) + \int_0^l H_2(x)u(x,t)dx = g_2(t),\end{gathered} \tag{1.6}$$

где обозначено

$$\alpha_{11} = \frac{a(0)}{\Delta}[K_1(l)K_2'(0) - K_2(l)K_1'(0)], \ \ \alpha_{12} = \frac{a(l)}{\Delta}[K_2(l)K_1'(l) - K_1(l)K_2'(l)],$$

$$\beta_{11} = \frac{b(0)}{\Delta}[K_1(l)K_2'(0) - K_2(l)K_1'(0)], \ \ \beta_{12} = \frac{b(l)}{\Delta}[K_2(l)K_1'(l) - K_1(l)K_2'(l)],$$

$$\alpha_{21} = \frac{a(0)}{\Delta}[K_1(0)K_2'(0) - K_2(0)K_1'(0)], \ \ \alpha_{22} = \frac{a(l)}{\Delta}[K_2(0)K_1'(l) - K_1(0)K_2'(l)],$$

$$\beta_{21} = \frac{b(0)}{\Delta}[K_1(0)K_2'(0) - K_2(0)K_1'(0)], \quad \beta_{22} = \frac{b(l)}{\Delta}[K_2(0)K_1'(l) - K_1(0)K_2'(l)],$$
$$H_1(x) = \frac{1}{\Delta}[(cK_1 - (aK_1')')K_2(l) - (cK_2 - (aK_2')')K_1(l)],$$
$$H_2(x) = \frac{1}{\Delta}[(cK_1 - (aK_1')')K_2(0) - (cK_2 - (aK_2')')K_1(0)],$$
$$g_1(t) = \frac{1}{\Delta}[(\int_0^l K_1 f dx - E_1''(t))K_2(l) - (\int_0^l K_2 f dx - E_2''(t))K_1(l)],$$
$$g_2(t) = \frac{1}{\Delta}[(\int_0^l K_1 f dx - E_1''(t))K_2(0) - (\int_0^l K_2 f dx - E_2''(t))K_1(0)].$$

Таким образом, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.3), удовлетворяет и условию (1.6). Покажем, что при выполнении условий согласования $E_i(0) = 0$, $E_i'(0) = 0$ из условия (1.6) следует выполнение условия (1.3). Действительно, повторив процедуру умножения (1.1) на K_i и интегрирования по $(0, l)$ после применения условия (1.6) получим равенства

$$\int\limits_0^l P_i(x)u_{tt}(x,t)dx = E_i''(t), i = 1, 2,$$

каждое из которых представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функций $\int\limits_0^l P_i(x)u(x,t)dx$. Из условий согласования получаем начальные условия

$$\int\limits_0^l P_i(x)u(x,0)dx = 0, \quad \int\limits_0^l P_i(x)u_t(x,0)dx = 0.$$

Тогда очевидно, что решением каждой из полученных задач Коши являются функции $\int\limits_0^l P_i(x)u(x,t)dx = E_i(t)$, что означает выполнение условий (1.3) и, следовательно, условия (1.3) и (1.6) эквивалентны в описанном выше смысле. Для удобства дальнейших ссылок сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма. Условия (1.3) и (1.6) эквивалентны, если $\Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$ и выполнены условия согласования $E_i(0) = 0$, $E_i'(0) = 0$.

Заметим, что условия (1.6) являются динамическими нелокальными условиями. Задачи с динамическими краевыми условиями возникают при математическом моделировании многих физических явлений. Не останавливаясь здесь на их описании подробно, отметим некоторые работы [3; 19–22]. Простейшие задачи с динамическими условиями приведены в качестве примеров в [19].

Будем теперь рассматривать задачу (1.1), (1.2), (1.6), что обосновано леммой.

Обозначим $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l$, где $\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in [0,T]\}, \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in [0,T]\}$

$$W(Q_T) = \{u : \ u \in W_2^1(Q_T), \ u_t \in W_2^1(Q_T), \ u_{xt} \in L_2(Q_T), \ u \in L_2(\Gamma)\},$$
$$V(Q_T) = \{v : \ v \in W(Q_T), \ v(x,T) = 0\}.$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$||u||^2_{W(Q_T)} = ||u||^2_{W_2^1(Q_T)} + ||u_{xt}||^2_{L_2(Q_T)} + ||u_t||^2_{L_2(\Gamma)},$$
$$||v||^2_{V(Q_T)} = ||v||^2_{W_2^1(Q_T)} + ||v_{xt}||^2_{L_2(Q_T)}.$$

Следуя [24, с. 92, 210], из тождества $\int\limits_0^T\int\limits_0^l (Lu - f)v dx dt = 0$ получим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-\sigma u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} + c u v)dxdt - \int\limits_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t)]dt +$$
$$+ \int\limits_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t)]dt + \int\limits_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t) + \beta_{12}u_t(l,t)]dt -$$
$$- \int\limits_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t) + \beta_{22}u_t(l,t)]dt - \int\limits_0^T v(0,t)\int\limits_0^l H_1(x)u(x,t)dxdt +$$

$$+\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2(x)u(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt+\int_0^T v(0,t)g_1(t)dt-\int_0^T v(l,t)g_2(t)dt. \tag{1.7}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.6) будем называть функцию $u\in W(Q_T)$, удовлетворяющую начальному условию $u(x,0)=0$ и тождеству (1.7) для любой функции $v\in V(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи

Теорема. Пусть выполняются условия

$$1.\quad f\in L_2(Q_T),\quad a,b\in C^1[0,l],\quad c,\sigma\in C[0,l];$$

$$2.\quad K_i\in C^2(0,l)\cup C^1[0,l],\quad K_1(0)K_2(l)-K_1(l)K_2(0)\neq 0;$$

$$3.\quad E\in C^2[0,T],\quad E_i(0)=E_i'(0)=0;$$

$$4.\quad \beta_{12}+\beta_{21}=0,\quad \beta_{11}<0,\quad \beta_{22}>0;$$

$$5.\ \alpha_{22}\xi_1^2+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2-\alpha_{11}\leqslant 0,\quad \beta_{22}\xi_1^2+2\beta_{12}\xi_1\xi_2-\beta_{11}\leqslant 0,$$

причем равенство нулю возможно лишь при всех $\xi_i=0,\ i=1,2.$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), (1.6).

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. На первом докажем единственность обобщенного решения. Реализацию второго этапа начнем с построения последовательности приближенных решений. Затем получим априорную оценку решений, которая позволит выделить из построенной последовательности приближенных решений слабо сходящуюся в пространстве $W(Q_T)$ подпоследовательность. На заключительном этапе покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение.

Единственность. Предположим, что существует два различных обобщенных решения задачи (1.1), (1.2), (1.6), u_1 и u_2. Тогда их разность, $u=u_1-u_2$, удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-\sigma u_tv_t+au_xv_x-bu_{xt}v_{xt}+cuv)dxdt-\int_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+\int_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1(x)u(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2(x)u(x,t)dxdt=0 \tag{2.8}$$

Положим в (2.8)

$$v=\begin{cases}\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{2.9}$$

где $\tau\in[0,T]$ произвольно, и преобразуем его, интегрируя по частям. Получим равенство

$$\int_0^l[\sigma u^2(x,\tau)+av_x^2(x,0)+bu_x^2(x,\tau)]dx-$$

$$-\beta_{11}u^2(0,\tau)+2\beta_{21}u(0,\tau)u(l,\tau)+\beta_{22}u^2(l,\tau)+$$

$$+\alpha_{22}v^2(l,0)+2\alpha_{12}v(0,0)v(l,0)-\alpha_{11}v^2(0,0)=$$

$$=2(\alpha_{21}-\alpha_{12})\int_0^\tau u(0,t)v(l,t)dt+2\int_0^\tau\int_0^l cvv_tdxdt-$$

$$-2\int\limits_0^\tau v(0,t)\int\limits_0^l H_1 u dxdt + 2\int\limits_0^\tau v(l,t)\int\limits_0^l H_2 u dxdt +$$

$$+2(\beta_{12}+\beta_{21})\int\limits_0^\tau u(0,t)u_t(l,t)dt. \tag{2.10}$$

Заметим, что в силу условий теоремы существуют положительные числа c_0, h, A, B такие, что

$$\max_{\bar{Q}_T}|c(x,t)| \leqslant c_0, \quad \max_i \max_{[0,T]}\{\int\limits_0^l H_i^2 dx\} \leqslant h,$$
$$\max_{ij}|\alpha_{ij}| \leqslant A, \quad \max_{ij}|\beta_{ij}| \leqslant B.$$

Перейдем к выводу оценок. Применив неравенство Коши, получим :

$$\Big|2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cvv_t dxdt\Big| \leqslant c_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v^2+v_t^2)dxdt;$$

$$\Big|2(\alpha_{21}-\alpha_{12})\int\limits_0^\tau u(0,t)v(l,t)dt\Big| \leqslant A\int\limits_0^\tau [u^2(0,t)+v^2(l,y)]dt;$$

$$\Big|2\int\limits_0^\tau v(0,t)\int\limits_0^l H_1 u dxdt\Big| \leqslant \int\limits_0^{tau} v^2(0,t)dt + h\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2 dxdt;$$

$$\Big|2\int\limits_0^\tau v(l,t)\int\limits_0^l H_2 u dxdt\Big| \leqslant \int\limits_0^{tau} v^2(l,t)dt + h\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2 dxdt.$$

Для продолжения вывода оценки нам будут полезны неравенства

$$\begin{aligned} u^2(0,\tau) &\leqslant 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,\tau)dx + \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx,\\ u^2(l,\tau) &\leqslant 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,\tau)dx + \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx, \end{aligned} \tag{2.11}$$

которые являются следствиями представлений

$$u(0,\tau) = \int\limits_x^0 u_{xi}d\xi + u(x,t), \quad u(l,\tau) = \int\limits_x^l u_{xi}d\xi + u(x,t),$$

а также неравенство

$$v^2(x,t) \leqslant \tau\int\limits_0^\tau u^2(x,t)dt,$$

которое вытекает из представления функции $v(x,t)$. Отметим, что неравенства (2.11) выполняются и для $v(x,t)$. Теперь из (2.8) с помощью полученных неравенств, условия (5) и первого из условий (4) теоремы получим неравенство

$$\int\limits_0^l [\sigma u^2(x,\tau) + a v_x^2(x,0) + b u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [u^2+v_x^2+u_x^2]dxdt, \tag{2.12}$$

где C_1 выражена через c_0, h, A, B, l, τ. Нетрудно видеть, что применению к (2.12) леммы Гроноулла препятствует присутствие в левой части (2.12) функции $v_x^2(x,0)$. Поэтому введем функцию $w(x,t) = = \int\limits_t^0 u_x(x,\eta)d\eta$, которая дает возможность получить равенства

$$v_x(x,t) = w(x,\tau) - w(x,t), \quad v_x(x,0) = w(x,\tau).$$

Тогда (2.12) примет вид

$$\int\limits_0^l [\sigma u^2(x,\tau) + a w^2(x,\tau) + b u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [u^2+u_x^2]dxdt +$$

$$+2C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l w^2dxdt+2\tau C_1\int\limits_0^l w^2(x,\tau)dx. \quad (2.13)$$

Заметим, что из физического смысла коэффициентов уравнения (1.1) следует, что $a(x)\geqslant a_0>0$, $b(x)\geqslant b_0>0$, $\sigma(x)\geqslant\sigma_0>0$. Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $a_0-2C_1\tau>0$. Пусть $a_0-2C_1\tau\geqslant\frac{a_0}{2}$. Перенесем последнее слагаемое правой части неравенства (2.13) в правую часть, в результате чего получим

$$m_0\int\limits_0^l[u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)]dx\leqslant M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l[u^2+w^2+u_x^2]dxdt,$$

где $m_0=\min\{\sigma_0,\frac{a_0}{2},b_0\}$, $M=2C_1$. Применение к последнему неравенству леммы Гронуолла приводит к равенству $u(x,t)=0$ $\forall t\in[0,\frac{a_0}{4C_1}]$. Повторив рассуждение для $t\in[\frac{a_0}{4C_1},\frac{a_0}{2C_1}]$, убедимся, что и на этом промежутке $u(x,t)=0$. Продолжив этот процесс, в конечное число шагов докажем, что $u(x,t)=0$ на всем промежутке $[0,T]$. Итак, в условиях теоремы существует не более одного решения поставленной задачи.

Перейдем к доказательству существования решения.

Существование. Пусть $w_k\in C^2[0,l]$ линейно независимы и образуют полную систему в $W_2^1(0,l)$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$$

из соотношений

$$\int\limits_0^l\left(\sigma u_{tt}^m w_j+u_x^m w_j'+bu_{xtt}^m w_j'+cu^m w_j\right)dx-$$
$$-w_j(0)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u^m(l,t)+\beta_{11}u_{tt}^m(0,t)+\beta_{12}u_{tt}^m(l,t)]dt+$$
$$+w_j(l)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u^m(l,t)+\beta_{21}u_{tt}^m(0,t)+\beta_{22}u_{tt}^m(l,t)]dt-$$
$$-w_j(0)\int\limits_0^l H_1udx+w_j(l)\int\limits_0^l H_2udx=$$
$$=w_j(0)g_1(t)-w_j(l)g_2(t)+\int\limits_0^l fw_jdx, \quad (2.14)$$

которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $c_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m[A_{kj}c_k''(t)+B_{kj}c_k(t)]=f_j(t), \quad (2.15)$$

коэффициенты которой выражаются формулами

$$A_{kj}=\int\limits_0^l(\sigma w_kw_j+bw_k'w_j')dx-$$
$$-w_k(0)[\beta_{11}w_k(0)+\beta_{12}w_k(l)]+w_j(l)[\beta_{21}w_k(0)+\beta_{22}w_k(l)],$$
$$B_{kj}=\int\limits_0^l aw_k'w_j'dx-w_j(0)\int\limits_0^l H_1w_kdx+w_j(l)\int\limits_0^l H_2w_kdx-$$
$$-w_j(0)[\alpha_{11}w_k(0)+\alpha_{12}w_k(l)]+w_j(0)[\alpha_{21}w_k(0)+\alpha_{22}w_k(l)],$$
$$f_j(t)=\int\limits_0^l f(x,t)w_j(x)dx+g_1(t)w_j(0)-g_2(t)w_j(l).$$

Добавив начальные условия

$$c_k(0)=0,\quad c_k'(0)=0, \quad (2.16)$$

получаем задачу Коши для системы (2.15).

Выясним, разрешима ли эта система относительно $c_k''(t)$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{A} = (A_{kj})_{k,j=1}^m$ при старших производных и покажем, что она положительно определена. Введем квадратичную форму с матрицей $\mathcal{A}$

$$q = \sum_{k,j=1}^m A_{kj}\xi_k\xi_j,$$

где ξ_k, ξ_j — коэффициенты линейных комбинаций $\xi = \sum\limits_{i=1}^m \xi_i w_i(x)$. Преобразуем квадратичную форму, учитывая представление ее коэффициентов:

$$q = \sum_{k,j=1}^m \int_0^l (\sigma w_k w_j \xi_k\xi_j + b w_k' w_j' \xi_k\xi_j)dx + [\beta_{22}w_k(l)w_j(l) - \beta_{11}w_j(0)w_k(0)]\xi_k\xi_j -$$
$$-[\beta_{12}w_j(0)w_k(l) + \beta_{21}w_j(l)w_k(0)]\xi_k\xi_j.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$q = \int_0^l \left(\sigma|\xi|^2 + b|\nabla\xi|^2\right)dx + (\beta_{22}|\xi(l)|^2 + 2\beta_{21}|\xi(0)||\xi(l)| - \beta_{11}|\xi(0)|^2) > 0$$

в силу условий 4 и 5 теоремы.

Заметим, что квадратичная форма q обращается в нуль только при $\xi = 0$, а тогда в силу линейной независимости $w_k(x)$ $\xi_k = 0$, $\forall k = 1, ..., m$. Следовательно матрица $\mathcal{A}$ положительно определена, и поэтому система (2.15) разрешима относительно старших производных. Так как из условий теоремы следует ограниченность ее коэффициентов и принадлежность правой части пространству $L_2(Q_T)$, то задача Коши (2.15)–(2.16) разрешима и $c_k''(t) \in L_2(Q_T)$.

Итак, последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ построена. Следующий шаг в доказательстве теоремы состоит в получении априорных оценок.

Априорная оценка.

Умножим (2.14) на $c_j'(t)$, просуммируем от $j = 1$ до $j = m$, а затем проинтегрируем полученное равенство от $t = 0$ до $t = \tau$, в результате чего получим:

$$\int_0^\tau\int_0^l (\sigma u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m)\,dxdt+$$
$$-\int_0^\tau u_t^m(0,t)[\alpha_{11}u^m(0,t) + \alpha_{12}u^m(l,t) + \beta_{11}u_{tt}^m(0,t) + \beta_{12}u_{tt}^m]dt+$$
$$+\int_0^\tau u_t^m(l,t)[\alpha_{21}u^m(0,t) + \alpha_{22}u^m(l,t) + \beta_{21}u_{tt}^m(0,t) + \beta_{22}u_{tt}^m]dt-$$
$$-\int_0^\tau u_t^m(0,t)\int_0^l H_1u^m dxdt + \int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_2u^m dxdt =$$
$$= \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt - \int_0^\tau g_1(t)u_t^m(0,t)dt - \int_0^\tau g_2(t)u_t^m(l,t)dt. \tag{2.17}$$

Интегрируя по частям, как и при доказательстве единственности, и учитывая условие $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$ приходим к равенству

$$\int_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx+$$
$$+[\alpha_{22}(u^m(l,\tau))^2 + 2\alpha_{21}u^m(0,\tau)u^m(l,\tau) - \alpha_{11}(u^m(0,t))^2]+$$
$$+[\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2 + 2\beta_{21}u_t^m(0,\tau)u^m(l,\tau) - \beta_{11}(u_t^m(0,t))^2] =$$
$$= 2(\alpha_{12} + \alpha_{21})\int_0^\tau u_t^m(0,t)u^m(l,t)dt - 2\int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt+$$

$$+2\int_0^\tau u_t^m(0,t)\int_0^l H_1u^m dxdt-2\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_2u^m dxdt+$$
$$+2\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m dxdt+2\int_0^\tau g_1(t)u_t^m(0,t)dt-2\int_0^\tau g_2(t)u_t^m(l,t)dt. \qquad (2.18)$$

Оценим правую часть (2.18), заметив, что левая часть этого равенства неотрицательна.

Применив неравенство Коши и неравенства (2.11), с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности, получим

$$\int_0^l\left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2+a(u_x^m(x,\tau))^2+b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx+$$
$$+[\alpha_{22}(u^m(l,\tau))^2+2\alpha_{21}u^m(0,\tau)u^m(l,\tau)-\alpha_{11}(u^m(0,t))^2]$$
$$+[\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2+2\beta_{21}u_t^m(0,\tau)u^m(l,\tau)-\beta_{11}(u_t^m(0,t))^2]\leqslant$$
$$C_3\int_0^\tau\int_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2+(u^m)^2_{xt}]dxdt+$$
$$+C_4\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt+\int_0^\tau(g_1^2+g_2^2\right)dt \qquad (2.19)$$

В частности

$$\int_0^l\left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2+a(u_x^m(x,\tau))^2+b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx\leqslant$$
$$C_3\int_0^\tau\int_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2+(u^m)^2_{xt}]dxdt+$$
$$+C_4\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt+\int_0^\tau(g_1^2+g_2^2\right)dt.$$

Прибавим к обеим частям последнего соотношения неравенство

$$(u^m(x,\tau))^2\leqslant\tau\int_0^\tau(u_t^m(x,t))^2dt,$$

являющееся следствием применения неравенства Коши — Буняковского к представлению

$$u^m(x,\tau)=\int_0^\tau u_t^m(x,t)dt,$$

получим

$$\int_0^l\left((u^m(x,\tau)^2+\sigma(u_t^m(x,\tau))^2+a(u_x^m(x,\tau))^2+b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx\leqslant$$
$$C_5\int_0^\tau\int_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2+(u^m)^2_{xt}]dxdt+$$
$$+C_4\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt+\int_0^\tau(g_1^2+g_2^2\right)dt,$$

$C_5=C_4(1+\tau)$. Обозначим $\mu_1=\min\{1,\sigma_0,a_0,b_0,\}$, $M_1=C_5/\mu_1$, $M_2=C_4/\mu_1$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\int_0^l\left((u^m(x,\tau)^2+(u_t^m(x,\tau))^2+(u_x^m(x,\tau))^2+(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)_{xt}^2] dxdt +$$

$$+M_2 \left(\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2 \right) dt. \tag{2.20}$$

Применив к (2.20) лемму Гроноулла, получим

$$\int_0^l \left((u^m(x,\tau)^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant M_2 e^{M_1 \tau} \left(\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2 \right) dt.$$

Заметим, что в силу условий теоремы функция $\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2) dt$ ограничена. Пусть она ограничена некоторым числом k. Тогда мы получаем оценку

$$\int_0^l \left((u^m(x,\tau)^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant M_3 e^{M_1 \tau}, \quad M_3 = M_2 k. \tag{2.21}$$

Интегрируя (2.21)по τ от 0 до T, получим

$$\int_0^T \int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt \leqslant \frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1).$$

Обозначив $\frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1) = R_1$, перепишем полученное неравенство

$$\int_0^T \int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt \leqslant R_1. \tag{2.22}$$

Вернемся к (2.19). В силу полученной оценки (2.22) из него следует

$$\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2 + 2\beta_{21} u_t^m(0,\tau) u^m(l,\tau) - \beta_{11}(u_t^m(0,t))^2] \leqslant\leqslant C_3 R_1.$$

Перенесем удвоенное произведение из левой части в правую и оценим с помощью неравенства Коши. Тогда

$$(\beta_{22} - |\beta_{21}|)(u_t^m(l,\tau))^2 + (-\beta_{11} - |\beta_{21}|)(u_t^m(0,\tau))^2 \leqslant C_3 R_1 + C_4 k.$$

Так по условию теоремы $\beta_{22} - |\beta_{21}| > 0, \quad -\beta_{11} - |\beta_{21}| > 0$, то, обозначив $M_3 = \min\{\beta_{22} - |\beta_{21}|, \ -\beta_{11} - |\beta_{21}|\}$, $R_2 = (C_3 R_1 + C_4 k)/M_3$, получим

$$(u_t^m(l,\tau))^2 + (u_t^m(0,t))^2 \leqslant R_2. \tag{2.23}$$

Из (2.22) и (2.23) следует оценка

$$||u^m||_{W(Q_T)} \leqslant R, \tag{2.24}$$

где мы обозначили $R^2 = R_1 + R_2$.

Так как пространств $W(Q_T)$ гильбертово, то полученная оценка позволяет утверждать, что из построенной последовательности приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в норме $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение.

На завершающем этапе доказательства покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение. Умножим (2.14) на $d_j \in C^2(0,T), \quad d_j(T) = 0$, просуммируем от $j = 1$ до $j = m$, а затем проинтегрируем по t от 0 до T. Получим равенство

$$\int_0^T \int_0^l [\sigma u_{tt}^m \eta + a u_x^m \eta_x + b u_{xtt}^m \eta_x] dxdt -$$

$$- \int_0^T \eta(0,t)[\alpha_{11} u(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{12} u_{tt}^m(l,t)] dt +$$

$$+\int_0^T \eta(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u^m(l,t)+\beta_{21}u^m_{tt}(0,t)+\beta_{22}u^m_{tt}(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^T \eta(0,t)\int_0^l H_1 u dxdt+\int_0^T \eta(l,t)\int_0^l H_2 u dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l f\eta dxdt+\int_0^T \eta(0,t)g_1(t)dt-\int_0^T \eta(l,t)g_2(t)dt, \qquad (2.25)$$

где $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$. Доказанные сходимости позволяют перейти к пределу при $m\to\infty$ в равенстве (2.24). Мы получим тождество вида (1.7), но пока справедливое только для функций $\eta(x,t)=$ $=\sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$. Однако множество всех функций такого вида всюду плотно в пространстве $W(Q_T)$ [24], поэтому мы вправе утверждать, что $u(x,t)$, слабый предел выделенной из $\{u^m(x,t)\}$ подпоследовательности удовлетворяет тождеству (1.7) для любой $v\in V(Q_T)$, т.е. является искомым обобщенноым решением задачи (1.1), (1.2), (1.6), а в силу леммы и решением задачи (1.1)–(1.3).

Теорема доказана.

Литература

[1] Re Стретт Дж.В. Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. I.

[2] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992.

[3] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1.

[4] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. 2014. № 3(114). С. 9–19.

[5] Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. // Сообщ. Харьковского мат. о-ва. 1896. № 5(3–4). С. 136–181.

[6] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. № 42(8). С. 1072–1077.

[7] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравн. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661.

[8] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал института математики МО и НРК, Алматы. 2009. № 2(32). С. 78–92.

[9] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2010. № 4(78), С. 56–64.

[10] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. № 21. P. 155–160.

[11] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1964. № 4(6). С. 1006–1024.

[12] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. № 12(1). С. 94–103.

[13] Bouziani A. On the solvability of a nonlocal problems arising in dynamics of moisture transfer // Georgian Mathematical Journal. 2003. № 4. P. 607–622.

[14] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. № 5(1). P. 31–37.

[15] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. № 42(9). С. 1166–1179.

[16] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2006. № 2(42). С. 15–27.

[17] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek, Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics. 2002. P. 1119–1149.

[18] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74-–83.

[19] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.

[20] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010.

[21] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. № 28. P. 1–10.

[22] Pulkina L.S. A nonlocal problem for a pseudohyperbolic Equation // EJDE. 2014. № 116. P. 1–11.

[23] Пулькина Л.С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Известия вузов. 2016. Т. 60. № 9. С. 42–50.

[24] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

References

[1] J.W.S.Rayleigh. *Theory of sound*. New York: Dover, 1945. (translated in Russian in 1955). M.: GITTL, 1955, Vol. I [in Russian].

[2] Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration*. N.Y.: Wiley, 1992 [in English].

[3] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia* [Theory of free vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *DAN [Doklady Physics], 2007, Vol. 417, pp. 56–61.*

[4] Beilin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[5] Steklov V.A. *Zadacha ob okhlazhdenii neodnorodnogo tverdogo tela* [The problem of cooling of inhomogeneous solid] *Soobshch. Khar'kovskogo mat. o-va* [Communications of Kharkov Mathematical Society], 1896, Vol. 5, Issue 3-4, pp. 136–181 [in Russian].

[6] Lazhetich N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka* [On the classical solvability of the mixed problem for a second-order one-dimensional hyperbolic equation]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, Issue 8, pp. 1134–1139 [in Russian].

[7] Ilin V.A., Moiseev E.I. *O edinstvennosti resheniia smeshannoi zadachi dlia volnovogo uravneniia s nelokal'nymi granichnymi usloviiami* [Uniqueness of the solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2000, Vol. 36, Issue 5, Pages 728–733 [in Russian].

[8] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti nekotorykh granichnykh zadach so smeshcheniem dlia lineinykh giperbolicheskikh uravnenii* [On solvability of certain boundary problems with shift for linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii zhurnal instituta matematiki MO i NRK, Almaty* [Matematical Journal. Institute of Mathematics and Mathematical Modelling. Almaty], 2009, Vol. 2(32), pp. 78–92 [in Russian].

[9] Pulkina L.S., Dyuzheva A.V. *Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal problem with time variable boundary Steclov's conditions for hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2010, no. 4(78), pp. 56–64 [in Russian].

[10] Cannon J.R. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart.Appl.Math.*, 1963, no. 21, pp. 155–160 [in English].

[11] Kamynin L.I. *Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviiami* [On certain problem in heat theory with nonclassical boundary conditions]. *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiz.* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Phyzics], 1964, no. 4(6), pp. 1006–1024 [in Russian].

[12] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Resheniia nelokal'nykh zadach dlia odnomernykh kolebanii sredy* [Solutions of Nonlocal Problems for One-Dimensional Oscillations of the Medium]. *Matem. modelir.* [Mathematical Modeling], 2000, Vol. 12, no.1, pp. 94–103 [in Russian].

[13] Bouziani A. On the solvability of a nonlocal problems arising in dynamics of moisture transfer. *Georgian Mathematical Journal*, 2003, no. 4, pp. 607–622 [in English].

[14] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, no. 5(1), pp. 31–37 [in English].

[15] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii* [On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimentional Hyperbolic Equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246 [in Russian].

[16] Dmitriev V.B. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia volnovogo uravneniia* [Nonlocal problem with integral condition for wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2006, no. 2(42), pp. 15–27 [in Russian].

[17] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek. *Nonlocal Integral Formulationof Plasticity And Damage: Survey of Progress. American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, 2002, pp. 1119–1149 [in English].

[18] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nymi usloviiami I i II roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2012, Vol. 56, no.4, pp. 62–69 [in Russian].

[19] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 2004 [in Russian].

[20] Korpusov O.M. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Blow-up in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010 [in Russian].

[21] Doronin G.G., Larkin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28, pp. 1–10 [in English].

[22] Pulkina L.S. [Solutions to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations]. *EJDE*, 2014, no. 116, pp. 1-9 [in English].

[23] Pul'kina L.S. *Zadacha s dinamicheskim nelokal'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2016, Vol. 60, Issue 9, pp. 38–45 [in Russian]

[24] Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

A.B. Beylin, L.S. Pulkina[2]

A PROBLEM ON LONGITUDINAL VIBRATION IN A SHORT BAR WITH DYNAMICAL BOUNDARY CONDITIONS

In this paper, we consider an initial-boundary problem with dynamical nonlocal boundary condition for a pseudohyperbolic fourth-order equation in a rectangular. Dynamical nonlocal boundary condition represents a relation between values of a required solution, its derivatives with respect of spacial variables, second-order derivatives with respect of time-variables and an integral term. This problem may be used as a mathematical model of longitudinal vibration in a thick short bar and illustrates a nonlocal approach to such processes. The main result lies in justification of solvability of this problem. Existence and uniqueness of a generalized solution are proved. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper, Galerkin's procedure and the properties of the Sobolev spaces.

Key words: pseudohyperbolic equation, dynamical boundary conditions, longitudinal vibration, nonlocal conditions, generalized solution.

Статья поступила в редакцию 18/X/2017.
The article received 18/X/2017.

[2] *Beylin Alexander Borisovich* (`abeilin@mail.ru`), Department of Automated Machining and Tool Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeiskaya str., Samara, 443010, Russian Federation.

Pulkina Ludmila Stepanovna (`louise@samdiff.ru`), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.