УДК 517+531.01

DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-41-64

М.В. Шамолин[1]

О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ[2]

В предлагаемом цикле работ исследуются уравнения движения динамически симметричного закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n-мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В данной работе выводятся общие многомерные динамические уравнения изучаемых систем.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный $(n-1)$-мерный круговой диск $\mathcal{D}^{n-1}$ с центром в точке D, гиперплоскость которого в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ перпендикулярна державке OD. Диск жестко прикреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O, и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила $\mathbf{S}$ воздействия потока среды на диск перпендикулярна диску $\mathcal{D}^{n-1}$, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}_D$ точки D относительно потока и державкой OD, углами $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, измеряемыми в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$ (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты конца вектора $\mathbf{v}_D$), а также тензором приведенной угловой скорости $\tilde{\omega} \cong l\tilde{\Omega}/v_D$, $v_D = |\mathbf{v}_D|$ (l — длина державки, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости маятника). Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [1, 2, 3].

Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ определяет ориентацию державки. Тогда $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, где $s(\alpha) = s_1(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$, при этом коэффициент сопротивления $s_1 \geqslant 0$ зависит лишь от угла атаки α. В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно оси $Dx_1 = OD$ функция $s(\alpha)$ (формально) является четной.

Пусть $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 имеет направляющий вектор $\mathbf{e}$, а оси $Dx_2, \ldots, Dx_{n-1}$ и Dx_n лежат в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$.

Углами $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$ мы определим положение державки OD в n-мерном пространстве $\mathbf{E}^n$. При этом угол ξ будем измерять между державкой и направлением набегающего потока. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$ на $(n-1)$-мерной сфере постоянного радиуса OD.

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является $(n-1)$-мерная сфера

$$\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}, \tag{1.1}$$

Шамолин Максим Владимирович (`shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`), Институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

а фазовым пространством — касательное расслоение $(n-1)$-мерной сферы

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\left\{(\dot{\xi},\dot{\eta}_1,\ldots,\dot{\eta}_{n-2};\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\right.$$
$$\left.0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \eta_{n-2}\mod 2\pi\right\}. \tag{1.2}$$

Тензор (второго ранга) $\tilde{\Omega}$ угловой скорости в системе координат $Dx_1\ldots x_n$ будем определять через кососимметрическую матрицу. Так, для определенности, в случае $n=5$ эта матрица примет вид

$$\tilde{\Omega}=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \tilde{\Omega}\in\mathrm{so}(5). \tag{1.3}$$

Расстояние от центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$ до центра давления (точки N) будет иметь вид $|\mathbf{r}_N|=r_N=$ $=DN\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},l\Omega/v_D\right)$, где $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},\ldots,x_{nN}\}$ в системе $Dx_1\ldots x_n$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в маломерных случаях, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по тензору угловой скорости маятника (см. также [3, 4]). Анализ задачи о(б) (обобщенном) сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных многомерных тел.

2. Некоторые общие рассуждения

2.1. Случаи динамической симметрии многомерного тела

Пусть n-мерное твердое тело Θ массы m с гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Theta$ находится в некотором (вообще говоря, неконсервативном) поле сил (это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей n-мерную область евклидового пространства $\mathbf{E}^n$).

Предположим, что оно является динамически симметричным. Так, например, для четырехмерного тела имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_2,I_2,I_2\} \tag{2.1}$$

(так называемый случай (1—3)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_1,I_3,I_3\} \tag{2.2}$$

(случай (2—2)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Для пятимерного тела было бы логично рассмотреть случаи *трех* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_2,I_2,I_2,I_2\} \tag{2.3}$$

(случай (1—4)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_1,I_3,I_3,I_3\} \tag{2.4}$$

(случай (2—3)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4x_5$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерная и трехмерная плоскости Dx_1x_2 и $Dx_3x_4x_5$ являются плоскостями динамической симметрии тела.

Соответственно, для n-мерного тела было бы логично рассмотреть случаи $n-1$ независимых равенств главных моментов инерции. При этом возможны $[n/2]$ (здесь [...] — целая часть) вариантов вида (2.1), (2.2) (или (2.3), (2.4)). Так, например, для шестимерного тела возможны три случая — (1—5), (2—4), (3—3).

Для случая n-мерного твердого тела нас будет *прежде всего* интересовать случай $(1\text{—}(n-1))$, т.е. когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1\ldots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,\underbrace{I_2,\ldots,I_2}_{n-1}\}, \tag{2.5}$$

а именно, в гиперплоскости $Dx_2\ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

2.2. Динамика на so(n) и $\mathbf{R}^n$

Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbf{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на связную группу его вращений SO(n) (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbf{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \tag{2.6}$$

и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (а он является терзором второго ранга [4, 5, 6]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли* so(n), имеет следующий вид [6, 7]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{2.7}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{2.8}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2},\ \ \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2},\ \ \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли so(n), $[.,.]$ — коммутатор в so(n). Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли so(5).

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \tag{2.10}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathrm{so}(n), \tag{2.11}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \tag{2.12}$$

из $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли so(n), где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\},\ \ \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{2.13}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это и есть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли so(n).

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_f, f = 1, \ldots, n(n-1)/2$, на алгебре Ли so($n$), то введем такую же упорядоченность и для вычисления момента $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix},\ \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ \ldots, (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Продолжая далее, заключительная группа G_{n-1} координат состоит из одного минора

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе начинаются со знака “+”.

Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть *координатами момента* $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ *силы* $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [8, 9, 10]. При этом нам потребуется практически “в лоб” исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству* $\mathbf{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \ \ \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \ \ E = \dot{\Omega}, \tag{2.16}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело, E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ определяется функциями, которые являются в следующем смысле циклическими, т.е. обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей, и не зависят от положения тела в пространстве), то система уравнений (2.7), (2.15) на многообразии $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (2.6) и может быть исследована самостоятельно.

В частности, правая часть системы (2.7) при $n = 5$ примет вид

$$\begin{gathered} M = \{M_1, M_2, \ldots, M_{10}\} = \\ = \{\delta_4F_5 - \delta_5F_4, \delta_5F_3 - \delta_3F_5, \delta_2F_5 - \delta_5F_2, \delta_5F_1 - \delta_1F_5, \delta_3F_4 - \delta_4F_3, \\ \delta_4F_2 - \delta_2F_4, \delta_1F_4 - \delta_4F_1, \delta_2F_3 - \delta_3F_2, \delta_3F_1 - \delta_1F_3, \delta_1F_2 - \delta_2F_1\}, \end{gathered} \tag{2.17}$$

где $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ — компоненты тензора момента внешней силы в проекциях на координаты в алгебре Ли so(5),

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -M_{10} & M_9 & -M_7 & M_4 \\ M_{10} & 0 & -M_8 & M_6 & -M_3 \\ -M_9 & M_8 & 0 & -M_5 & M_2 \\ M_7 & -M_6 & M_5 & 0 & -M_1 \\ -M_4 & M_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

3. Группа динамических уравнений на алгебре Ли so(n)

В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (2.5). Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$:

$$
\begin{gathered}
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=\\
=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=\\
=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_2(\Omega)=\\
=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_1(\Omega)=\\
=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

при этом $r_{n-2}+1=r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t=1,\ldots,n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1,\ldots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, тензора Ω, причем $(k_j\neq r_i)$

$$
W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\ldots=\omega_{k_s}=0}=0, s=(n-1)(n-2)/2, j=1,\ldots,s, i=1,\ldots,n-1. \tag{3.2}
$$

Поясним формулу (3.2). Всего компонент у тензора $\Omega\in\mathrm{so}(n)$ имеется $f=n(n-1)/2$ штук. Соответственно, компонент у момента силы $M_F=(\mathbf{DN},\mathbf{F})$ столько же. Поскольку вспомогательная матрица (2.14) имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN}\\
-s(\alpha)v_D^2 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}, \tag{3.3}
$$

в правой части системы (3.1) $s=(n-1)(n-2)/2$ уравнений содержат тождественный нуль. Эти номера уравнений мы обозначим через $k_1,\ldots,k_s$. При этом соответствующие компоненты $\omega_{k_j}, j=1,\ldots,s$, тензора Ω угловой скорости будем называть *циклическими*.

Оставшиеся номера уравнений, в которых стоят следующие величины со знаком $x_{lN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right)s(\alpha)v^2$, $l=2,\ldots,n$, мы обозначаем через $r_1,\ldots,r_{n-1}$, поскольку $f-s= =n(n-1)/2-(n-1)(n-2)/2=n-1$.

Очевидно, что $W_t(0)\equiv 0$ для любых $t=1,\ldots,n-1$, т.е. квадратичные формы $W_t(\Omega)$ обращаются в нуль, когда все компоненты тензора Ω нулевые. Так вот формула (3.2) означает, что для обращения в нуль квадратичных форм $W_t(\Omega)$, $t=1,\ldots,n-1$, достаточно, чтобы все циклические компоненты тензора Ω были нулевые.

В частности, в случае $n=5$ данная система примет вид:

$$
\begin{gathered}
(I_1+2I_2)\dot\omega_1=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_2=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_3=0,\\
3I_2\dot\omega_4+(I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_5=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_6=0,\\
3I_2\dot\omega_7+(I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_8=0,\\
3I_2\dot\omega_9+(I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10}+(I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

поскольку момент силы воздействия среды при $n=5$ определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$
\begin{pmatrix}
0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N}\\
-s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{3.5}
$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2,0,0,0,0\}$ — разложение силы $\mathbf{S}$ воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$. При этом $r_1=4$, $r_2=7$, $r_3=9$, $r_4=10$.

Поскольку размерность алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$ равна $f=n(n-1)/2$, система уравнений (3.1) и составляет группу динамических уравнений на $\mathrm{so}(n)$.

Видно, что в правую часть системы уравнений (3.1) входят, прежде всего, углы $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

3.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (3.1), полученная из (2.7) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{3.6}$$

обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \ \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \ s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{3.7}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{3.8}$$

В частности, система (3.4) обладает первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \ \omega_2 \equiv \omega_2^0, \ \omega_3 \equiv \omega_3^0, \ \omega_5 \equiv \omega_5^0, \ \omega_6 \equiv \omega_6^0, \ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{3.9}$$

рассматриваемых на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{3.10}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n-1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

При условиях (3.6)–(3.8) система (3.1) примет вид незамкнутой системы $n-1$ уравнений:

$$\begin{gathered}
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2.
\end{gathered} \tag{3.11}$$

В частности, при условиях (3.9)–(3.10) система (3.4) примет вид незамкнутой системы четырех уравнений:

$$\begin{gathered}
3I_2\dot{\omega}_4 = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_7 = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_9 = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_{10} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tfrac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

4. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{4.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Равенство (4.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1 \ldots x_n$.

Действительно, в левой части равенства (4.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1 \ldots x_n$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — единичный вектор вдоль оси вектора $\mathbf{v}_D$. Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, определяющие разложение (4.2).

В правой части равенства (4.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, \ldots, 0\}$ в системе координат $Dx_1 \ldots x_n$.

На втором слагаемом правой части равенства (4.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, \ldots, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1 \ldots x_n$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (4.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{gathered}
v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi, \\
v_D \sin\alpha \cos\beta_1 = l\omega_{r_{n-1}} + v_\infty \sin\xi \cos\eta_1, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 = -l\omega_{r_{n-2}} + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \cos\eta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} = \\
= (-1)^{n+1} l\omega_{r_2} + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3} \cos\eta_{n-2}, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} = (-1)^n l\omega_{r_1} + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-2}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

В частности, в случае $n = 5$ данная группа уравнений примет вид:

$$\begin{gathered}
v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi, \\
v_D \sin\alpha \cos\beta_1 = l\omega_{10} + v_\infty \sin\xi \cos\eta_1, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 = -l\omega_9 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \cos\eta_2, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 = l\omega_7 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 \cos\eta_3, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 = -l\omega_4 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 \sin\eta_3.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

5. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости Ω и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ фазового пространства (1.2) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^n\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$, через новые переменные $z_1, \ldots, z_{n-1}$ (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\eta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\eta.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\eta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\eta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\eta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

В частности, при $n = 5$ преобразуются величины $\omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_3) \circ T_{2,3}(\eta_2) \circ T_{3,4}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

где

$$T_{3,4}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\eta & -\sin\eta \\ 0 & 0 & \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta & -\sin\eta & 0 \\ 0 & \sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta & 0 & 0 \\ \sin\eta & \cos\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\eta_1) \circ T_{2,3}(-\eta_2) \circ T_{1,2}(-\eta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

т.е.

$$\begin{gathered} z_1 = \omega_4 \cos\eta_3 + \omega_7 \sin\eta_3, \\ z_2 = (\omega_7 \cos\eta_3 - \omega_4 \sin\eta_3)\cos\eta_2 + \omega_9 \sin\eta_2, \\ z_3 = [(-\omega_7 \cos\eta_3 + \omega_4 \sin\eta_3)\sin\eta_2 + \omega_9 \cos\eta_2]\cos\eta_1 + \omega_{10}\sin\eta_1, \\ z_4 = [(\omega_7 \cos\eta_3 - \omega_4 \sin\eta_3)\sin\eta_2 - \omega_9 \cos\eta_2]\sin\eta_1 + \omega_{10}\cos\eta_1. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$\begin{gathered} z_{n-1} = \dot\xi, \\ z_{n-2} = -\dot\eta_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}, \\ z_{n-3} = \dot\eta_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_2 = (-1)^{n+1}\dot\eta_{n-3}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4}, \\ z_1 = (-1)^n\dot\eta_{n-2}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

В частности, при $n = 5$ имеем следующие формулы:

$$\begin{gathered} z_4 = \dot\xi, \\ z_3 = -\dot\eta_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}, \\ z_2 = \dot\eta_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1, \\ z_1 = -\dot\eta_3 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Таким образом, две группы уравнений (5.1) и (5.7) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \dots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \dots \circ$$

$$\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} (-1)^n\dot\eta_{n-2}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3} \\ (-1)^{n+1}\dot\eta_{n-3}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \\ -\dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \\ \dot\xi \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

В частности, при $n=5$ имеем:

$$\begin{gathered}\omega_4 = -\dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3-\\ -\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\sin\eta_3 - \dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\ \omega_7 = \dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 + \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3+\\ +\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\cos\eta_3 - \dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,\\ \omega_9 = -\dot\xi\sin\eta_1\cos\eta_2 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\cos\eta_2 + \dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2,\\ \omega_{10} = \dot\xi\cos\eta_1 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Видно, что три группы соотношений (3.11), (4.3), (5.9) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v_D}\right),\ \ldots,\ x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v_D}\right),\ s(\alpha). \tag{5.11}$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α, а функции $x_{2N},\ldots,x_{nN}$ могут зависеть, наряду с углами α, β_1, $\ldots$, β_{n-2}, вообще говоря, и от приведенного тензора угловой скорости $l\Omega/v_D$.

6. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного динамически симметричного (случай (2.5)) n-мерного твердого тела с передним торцом (круговым $(n-1)$-мерным диском $\mathcal{D}^{n-1}$) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [9, 11] с той же моделью воздействия среды.

Если $(v,\alpha,\ldots,\beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$, лежащего на оси симметрии тела, Ω — тензор угловой скорости тела (для случая $n=5$ см. (1.3)) в системе координат $Dx_1\ldots x_n$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2,Dx_3,\ldots,Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3=I_2$, $\ldots$, $I_n=I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то может быть получена динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v\cos\alpha\\ v\sin\alpha\cos\beta_1\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} + \Omega\begin{pmatrix} v\cos\alpha\\ v\sin\alpha\cos\beta_1\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix}+\\ +\Omega^2\begin{pmatrix}-\sigma\\0\\0\\\ldots\\0\\0\end{pmatrix}+\dot\Omega\begin{pmatrix}-\sigma\\0\\0\\\ldots\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1/m\\0\\0\\\ldots\\0\\0\end{pmatrix},\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\ (n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\ (n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_2(\Omega)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$
$$(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_1(\Omega)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

где $F_1=-S,\ S=s(\alpha)v^2,\ \sigma=CD$, при этом

$$\left(0,x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),\ldots,x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\right) \tag{6.2}$$

— координаты точки N приложения силы $\mathbf{S}$ в системе координат $Dx_1x_2\ldots x_n$, связанной с телом, $r_{n-2}+1=r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t=1,\ldots,n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1,\ldots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, тензора Ω, причем выполнены свойства (3.2).

Так, например, в случае $n=5$ данная система примет вид:

$$\begin{gathered}
\dot v\cos\alpha-\dot\alpha v\sin\alpha-\omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1+\omega_9v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\\
-\omega_7v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\omega_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\
+\sigma(\omega_{10}^2+\omega_9^2+\omega_7^2+\omega_4^2)=\frac{F_1}{m},\\
\dot v\sin\alpha\cos\beta_1+\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot\beta_1v\sin\alpha\sin\beta_1+\\
+\omega_{10}v\cos\alpha-\omega_8v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_6v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\\
-\omega_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3-\sigma(\omega_9\omega_8+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)-\sigma\dot\omega_{10}=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2-\\
-\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2-\omega_9v\cos\alpha+\omega_8v\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_5v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\
+\omega_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3-\sigma(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)+\sigma\dot\omega_9=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\
+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_7v\cos\alpha-\omega_6v\sin\alpha\cos\beta_1+\\
+\omega_5v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_1v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\sigma(\omega_6\omega_{10}+\omega_5\omega_9-\omega_1\omega_4)-\sigma\dot\omega_7=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\
+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4v\cos\alpha+\omega_3v\sin\alpha\cos\beta_1-\\
-\omega_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_1v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\sigma(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)+\sigma\dot\omega_4=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_1=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_2=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_3=0,\\
3I_2\dot\omega_4+(I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_5=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_6=0,\\
3I_2\dot\omega_7+(I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_8=0,\\
3I_2\dot\omega_9+(I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10}+(I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2.
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Первая группа уравнений системы (6.1) описывают движение центра масс в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ в проекциях на систему координат $Dx_1\ldots x_n$. Вторая же группа уравнений системы (6.1) получены из (2.7). В частности, первые пять уравнений системы (6.3) описывают движение центра масс в пятимерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^5$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$. Вторые же десять уравнений системы (6.3) также получены из (2.7) при $n=5$.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (6.1) порядка $n(n+1)/2$ является прямое произведение $\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^{n-1}\times\mathrm{so}(n)$ n-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (6.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [11, 12]). В частности, фазовым пространством системы динамических уравнений (6.3) пятнадцатого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^4\times\mathrm{so}(5)$ пятимерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$.

6.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (6.1), частично полученная из (2.7), в силу имеющейся динамической симметрии
$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{6.4}$$
обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами
$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \ \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \ s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{6.5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:
$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{6.6}$$

В частности, система (6.3) обладает первыми интегралами
$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \ \omega_2 \equiv \omega_2^0, \ \omega_3 \equiv \omega_3^0, \ \omega_5 \equiv \omega_5^0, \ \omega_6 \equiv \omega_6^0, \ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{6.7}$$
рассматриваемых на нулевых уровнях:
$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{6.8}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n - 1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

6.2. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [13])
$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{6.9}$$
то в системе (6.1) вместо F_1 будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (6.9). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (6.1), получим при $\cos\alpha \neq 0, \ n > 2$:
$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_p}^2) +$$
$$+ s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{6.10}$$
где
$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) =$$
$$= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{6.11}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$, $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (6.9)), а именно:
$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ \ldots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \tag{6.12}$$
(см. (4.2)).

6.2.1. Редукции в системе

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (6.9). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (6.1) в результате действий порождает независимую систему порядка $n(n+1)/2-(n-1)(n-2)2-1=2(n-1)$ следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} + \Omega^{(1)}\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} +$$

$$+\Omega^{(2)}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \dot\Omega^{(1)}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},$$

$$(n-2)I_2\dot\omega_{r_1} = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{6.13}$$

$$(n-2)I_2\dot\omega_{r_2} = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}} = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}} = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v, при этом матрицы $\Omega^{(1)},\Omega^{(2)}$ размера $(n-1)\times n$ получаются из матриц Ω,Ω^2, соответственно, удалением первой строки.

В частности, при $n=5$ система (6.3) в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка следующего вида:

$$\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \omega_{10}v\cos\alpha - \sigma\dot\omega_{10} = 0,$$

$$\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 -$$
$$-\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \sigma\dot\omega_9 = 0,$$

$$\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 -$$
$$-\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \sigma\dot\omega_7 = 0,$$

$$\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \tag{6.14}$$
$$+\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \sigma\dot\omega_4 = 0,$$

$$3I_2\dot\omega_4 = -x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$3I_2\dot\omega_7 = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$3I_2\dot\omega_9 = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$3I_2\dot\omega_{10} = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (6.13) эквивалентна системе

$$\dot\alpha v\cos\alpha + \ldots = 0,$$

$$\dot\beta_1 v\sin\alpha + \ldots = 0,$$

$$\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \ldots = 0,$$

$$
\begin{gathered}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{\beta}_{n-3} v \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4} + \ldots = 0, \\
\dot{\beta}_{n-2} v \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} + \ldots = 0, \\
\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n-1} \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{\omega}_{r_{n-2}} = -\frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha).
\end{gathered}
\tag{6.15}
$$

В частности, система (6.14) эквивалентна системе

$$
\begin{gathered}
\dot{\alpha} v \cos\alpha + v \cos\alpha \left\{\omega_{10} \cos\beta_1 + \left[(\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3) \sin\beta_2 - \omega_9 \cos\beta_2\right] \sin\beta_1\right\} + \\
+\sigma\left\{-\dot{\omega_{10}} \cos\beta_1 + \left[\dot{\omega}_9 \cos\beta_2 - (\dot{\omega}_7 \cos\beta_3 - \dot{\omega}_4 \sin\beta_3) \sin\beta_2\right] \sin\beta_1\right\} = 0, \\
\dot{\beta}_1 v \sin\alpha + v \cos\alpha \left\{\left[(\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3) \sin\beta_2 - \omega_9 \cos\beta_2\right] \cos\beta_1 - \omega_{10} \sin\beta_1\right\} + \\
+\sigma\left\{\left[\dot{\omega}_9 \cos\beta_2 - (\dot{\omega}_7 \cos\beta_3 - \dot{\omega}_4 \sin\beta_3) \sin\beta_2\right] \cos\beta_1 + \dot{\omega_{10}} \sin\beta_1\right\} = 0, \\
\dot{\beta}_2 v \sin\alpha \sin\beta_1 + v \cos\alpha \left\{\left[\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3\right] \cos\beta_2 + \omega_9 \sin\beta_2\right\} + \\
+\sigma\left\{-\left[\dot{\omega}_7 \cos\beta_3 - \dot{\omega}_4 \sin\beta_3\right] \cos\beta_2 - \dot{\omega}_9 \sin\beta_2\right\} = 0, \\
\dot{\beta}_3 v \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 + v \cos\alpha \left\{-\omega_4 \cos\beta_3 - \omega_7 \sin\beta_3\right\} + \\
+\sigma\left\{\dot{\omega}_4 \cos\beta_3 + \dot{\omega}_7 \sin\beta_3\right\} = 0, \\
\dot{\omega}_4 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_7 = \frac{v^2}{3I_2} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha).
\end{gathered}
\tag{6.16}
$$

6.2.2. Новые квазискорости в системе

Введем новые квазискорости в системе:

$$
\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\beta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{6.17}
$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$
T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.18}
$$

$$
M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \; m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \; m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.
$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{6.19}
$$

В частности, при $n=5$ преобразуются величины $\omega_4,\omega_7,\omega_9,\omega_{10}$ посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix}\omega_4\\ \omega_7\\ \omega_9\\ \omega_{10}\end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_3)\circ T_{2,3}(\beta_2)\circ T_{3,4}(\beta_1)\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

где

$$T_{3,4}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&0&\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta&0\\0&\sin\beta&\cos\beta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta&0&0\\\sin\beta&\cos\beta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix} = T_{3,4}(-\beta_1)\circ T_{2,3}(-\beta_2)\circ T_{1,2}(-\beta_3)\begin{pmatrix}\omega_4\\ \omega_7\\ \omega_9\\ \omega_{10}\end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

т.е.

$$\begin{gathered}z_1=\omega_4\cos\beta_3+\omega_7\sin\beta_3,\\ z_2=(\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3)\cos\beta_2+\omega_9\sin\beta_2,\\ z_3=[(-\omega_7\cos\beta_3+\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2+\omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1+\omega_{10}\sin\beta_1,\\ z_4=[(\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2-\omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1+\omega_{10}\cos\beta_1.\end{gathered} \tag{6.22}$$

6.2.3. Системы нормального вида

Как видно из (6.16), на многообразии

$$\begin{gathered}O_1=\bigl\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\omega_4,\omega_7,\omega_9,\omega_{10})\in\mathbf{R}^8:\\ \alpha=\pi k/2,\ \ \beta_1=\pi l,\ \ \beta_2=\pi m,\ \ k,l,m\in\mathbf{Z}\}\end{gathered} \tag{6.23}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha,\ \dot\beta_1,\ \dot\beta_2,\ \dot\beta_3$. Формально, таким образом, на многообразии (6.23) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых l,m неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение системы (6.16) вырождается.

Из этого следует, что система (6.14) вне и только вне многообразия (6.23) эквивалентна системе

$$\dot\alpha=-z_4+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot z_4=\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)+$$
$$+z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)-z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\},$$

$$\dot z_3=z_3z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)-z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\}-$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_2=z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_4+z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}+\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}+\\
+\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_1=z_1z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{z_4-z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-\\
-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot\beta_1=z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot\beta_2=-z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot\beta_3=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),
\end{gathered}
\tag{6.24}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3\right)\right),\\
\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered}
\tag{6.25}
$$

а функция $\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v\right)$ представляется в виде (6.11).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ в силу (6.22).

В общем случае, на многообразии

$$
\begin{gathered}
O_1=\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\\
\alpha=\frac{\pi}{2}k,\ \ \beta_1=\pi l_1,\ldots,\beta_{n-3}=\pi l_{n-3},\ \ k,l_1,\ldots,l_{n-3}\in\mathbf{Z}\}
\end{gathered}
\tag{6.26}
$$

нельзя однозначно разрешить систему (6.15) относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\ldots$, $\dot\beta_{n-2}$. Формально, таким образом, на многообразии (6.26) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых $l_1,\ldots,l_{n-3}$ неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение системы (6.15) вырождается.

Из этого следует, что система (6.13) вне и только вне многообразия (6.26) может быть приведена к следующему виду $(n>2)$:

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha=-z_{n-1}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_{n-1}=\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)-(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\right\},\\
\dot z_{n-2}=z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+
\end{gathered}
$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-$$
$$-\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\dot z_{n-3}=z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left[-z_{n-1}+z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+$$
$$+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^{s}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+$$
$$+\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),\tag{6.27}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot z_1=\dot\beta_{n-2}(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2}+\omega_{r_2}\cos\beta_{n-2})+$$
$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$
$$=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\times$$
$$\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\dot\beta_1=z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\dot\beta_2=-z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot\beta_{n-2}=(-1)^{n+1}z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$

где

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)),$$
$$\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\tag{6.28}$$
$$\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)),$$
$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)),$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде (6.11).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу (6.19), при этом $(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N)$ — евклидово скалярное произведение.

6.2.4. Замечания о распределении индексов

В правой части системы (6.27) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, во втором уравнении системы (6.27) (с левой частью $\dot{z}_{n-1}$) функции (6.28) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2. \tag{6.29}$$

А вот далее, в следующие уравнения системы (6.27) появление набора функций (6.28) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для $\dot{z}_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (6.28) с индексами (6.29). А в уравнение для $\dot{z}_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2 \tag{6.30}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

Таблица 1

Общее распределение индексов набора функций (6.28)

Левая часть (6.27)	Распределение индексов s набора функций (6.28)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

Так минор

$$(1)$$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (6.28) при $s=1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (6.28) при $s=1,2$. Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (6.27) функций (6.28) при $s=1,2,3$ и т.д.

6.2.5. Нарушение теоремы единственности

Нарушение теоремы единственности для системы (6.15) на многообразии (6.26) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (6.26) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (6.15), пересекая многообразие (6.26) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (6.9) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (6.10).

Пусть

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=L\left(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right). \tag{6.31}$$

Заметим, что $|L|<+\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)\right)\right|<+\infty. \tag{6.32}$$

При $\alpha=\pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T=T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega\right)=m\sigma(\omega_{r_1}^2+\ldots+\omega_{n-1}^2)-\frac{m\sigma Lv^2}{(n-2)I_2},\ \ n>2, \tag{6.33}$$

где значения $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{n-1}$ — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства $\mathbf{E}^n$, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T=T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega\right)=\frac{mv^2}{R_0}, \tag{6.34}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (6.33) и (6.34) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (6.26), что и доказывает сделанное замечание.

6.3. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathbf{const} \tag{6.35}$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс), то в системе (6.1) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T-s(\alpha)v^2\equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=s(\alpha)v^2,\ \ \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}. \tag{6.36}$$

Случай (6.36) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка после некоторого преобразования системы (6.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=\sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1}\tau_{i,j}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j}= \tag{6.37}$$

$$=T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2,\ \ \omega_0=v.$$

Введем для начала новые квазискорости (6.17)–(6.19).

Систему (6.1) в случаях (6.4)–(6.6) можно переписать в виде

$$\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$

$$=\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha,$$

$$\dot\alpha v+z_{n-1}v-\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\sin\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$

$$=\frac{s(\alpha)v^2-T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha,$$

$$\dot\beta_1\sin\alpha-z_{n-2}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0.$$

$$\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1+z_{n-3}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0, \tag{6.38}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{gathered}
\dot{\beta}_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+(-1)^n z_1\cos\alpha-\\
-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\\
\dot{\omega}_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot{\omega}_{r_2}=(-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{\omega}_{r_{n-1}}=\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered}
$$

Здесь, как и ранее, введены функции (6.11), (6.28).

Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу (6.19).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$
z_k=n_1vZ_k,\ \ k=1,\ldots,n-1,\ \ <\cdot>=n_1v<'>,\ \ n_1>0,\ \ n_1=\mathrm{const}, \tag{6.39}
$$

система (6.38) приведется к следующему виду:

$$
v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{6.40}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha'=-Z_{n-1}+\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+\\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-\\
-\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,
\end{gathered} \tag{6.41}
$$

$$
\begin{gathered}
Z'_{n-1}=\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\right\}-\\
-Z_{n-1}\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right),
\end{gathered} \tag{6.42}
$$

$$
\begin{gathered}
Z'_{n-2}=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\times\\
\times\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)+\right.\\
\left.+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-\\
-\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-Z_{n-2}\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right),
\end{gathered} \tag{6.43}
$$

$$
\begin{gathered}
Z'_{n-3}=Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\
-\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\left[-Z_{n-1}+Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\
+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+\\
+\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-Z_{n-3}\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{6.44}
$$

$$Z_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\times$$
$$\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s}Z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+(-1)^n\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right), \tag{6.45}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right), \tag{6.46}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right), \tag{6.47}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right), \tag{6.48}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)+$$
$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{6.49}$$

Видно, что в системе (6.40)–(6.48) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (6.41)–(6.48) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (6.36) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ (и, далее, от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z_1,\ldots,n_1Z_{n-1})$) в силу (6.19) и (6.39).

В частности, при $n=5$ система (6.40)–(6.48) примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \tag{6.50}$$

$$\alpha' = -Z_4+\sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\sin\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_2,n_1Z\right)-$$
$$-\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha, \tag{6.51}$$

$$Z_4' = \frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-Z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+Z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-$$
$$-Z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\}-Z_4\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.52}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(Z_1^2+Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{Z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-$$
$$-Z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\}-$$

$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_3\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.53}$$

$$Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+$$
$$+\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_2\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.54}$$

$$Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-$$
$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.55}$$

$$\beta_1'=Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.56}$$

$$\beta_2'=-Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.57}$$

$$\beta_3'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.58}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z)=-\sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+$$
$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{6.59}$$

При этом в системе (6.50)–(6.58) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (6.51)–(6.58) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (6.36) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

6.3.1. Замечания о распределении индексов

В правой части системы (6.41)–(6.48) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (6.42) (с левой частью Z_{n-1}') функции (6.28) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad \ldots \qquad n-2. \tag{6.60}$$

А вот далее, в уравнения (6.43)–(6.45) появление набора функций (6.28) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (6.28) с индексами (6.60). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad \ldots \qquad n-2 \tag{6.61}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 2.

Таблица 2

Общее распределение индексов набора функций (6.28)

Левая часть (6.41)–(6.48)	Распределение индексов s набора функций (6.28)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	$\ldots$	$n-2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\ldots$	$n-2$

Так минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 2 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (6.28) (при $s=1$). Там же минор второго порядка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (6.28) (при $s=1,2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (6.41)–(6.48) функций (6.28) (при $s=1,2,3$) и т.д. (см. также [12, 13, 14]).

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.

[2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.

[3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. "Динамические системы". 2013. С. 5–254.

[4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[5] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.

[6] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во "Экзамен ", 2007. 352 с.

[11] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. № 10. С. 49–67.

[12] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.

[13] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.

[14] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.

References

[1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113 [in Russian].

[2] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika v trekhmernom prostranstve* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: "Sovremennaia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory". T. 125. "Dinamicheskie sistemy".* [Journal of Mathematical Sciences. Vol 125. Dynamical Systems], 2013, pp. 5–254 [in Russina].

[4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Some cases of integrability of dynamic systems in transcedent functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2013, no. 9/1(110), pp. 35–41 [in Russian].

[5] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie tipov fazovykh portretov v dinamike tverdogo tela, vzaimodeistvuiushchego s soprotivliaiushcheisia sredoi* [Variety of types of phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 1996, Vol. 349, no. 2, pp. 193–197 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. *Dinamicheskie sistemy s peremennoi dissipatsiei: podkhody, metody, prilozheniia* [Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications]. *Fund. i prikl. mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2008, Vol. 14, no. 3, pp. 3–237 [in Russian].

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspects in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].

[8] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetruc spaces automorphysm groups]. *Vestn. Mosk. un–ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].

[10] Shamolin M.V. *Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela* [Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. M.: Izd-vo "Ekzamen ", 2007, 352 p. [in Russian].

[11] Shamolin M.V. *Nekotorye model'nye zadachi dinamiki tverdogo tela pri vzaimodeistvii ego so sredoi* [Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium]. *Prikl. mekhanika* [International Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].

[12] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemosti sistem s dissipatsiei na kasatel'nykh rassloeniiakh k dvumernoi i trekhmernoi sferam* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Two- and Three-Dimensional Spheres]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2016, Vol. 471, no. 5, pp. 547–551 [in Russian].

[13] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoi sfere* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, no. 2, pp. 177–181 [in Russian].

[14] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 475, no. 5, pp. 519–523 [in Russian].

M.V. Shamolin[3]

ON A PENDULUM MOTION IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE. PART 1. DYNAMICAL SYSTEMS

In the proposed cycle of work, we study the equations of the motion of dynamically symmetric fixed n-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of the motion of a free n-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. In thit work, we derive the general multi-dimensional dynamic equations of the systems under study.

Key words: multi-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Paper received 18/ VI/2017.
Paper accepted 18/ VI/2017.

[3] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (`shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.