УДК 517.987 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-34-40

Т.А. Срибная[1]

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

В работе доказаны теоремы о продолжении неаддитивных функций множества, область определения которых, вообще говоря, не является кольцом, на сигма-кольцо множеств. Показано, что непрерывная сверху в нуле исчерпывающая композиционная субмера первого или второго рода может быть продолжена с мультипликативного класса множеств на сигма-кольцо множеств до полной непрерывной в нуле квазитреугольной субмеры. Найдены условия, при выполнении которых композиционная субмера первого (второго) рода продолжается до композиционной субмеры того же рода. Полученное в работе продолжение композиционной субмеры в общем случае не является единственным. Рассмотрены некоторые частные виды субмер, для которых имеет место единственность продолжения.

Ключевые слова: кольцо множеств, сигма-кольцо множеств, мультипликативный класс множеств, исчерпывающая функция множества, непрерывная в нуле функция множества, продолжение функции множества, квазитреугольная субмера, композиционная субмера.

Введение

В настоящее время, наряду с решением задачи о продолжении аддитивных функций множества и полимер [1–3], большое внимание уделяется вопросу о продолжении неаддитивных функций множества (см., например, [4–9]) в связи с приложениями таких функций в различных областях математики: в теории меры, в теории экстремальных задач, в теории игр.

Для простейших классов неаддитивных функций множества теоремы о продолжении доказаны в работах [4; 5]. В работах [6; 7] решена задача о продолжении функций множества, принадлежащих к классу жордановых внешних мер. В работах [8; 9] изучены вопросы о продолжении вещественнозначной квазитреугольной субмеры и субмеры со значениями в частично упорядоченной полугруппе. При этом в работах [6; 7] используется общий топологический принцип продолжения по непрерывности, а в работах [8; 9] продолжение строится конструктивно.

В предлагаемой статье рассматривается вопрос о продолжении непрерывных сверху в нуле, исчерпывающих композиционных субмер первого и второго рода, область определения которых Σ, вообще говоря, не является кольцом, на $\sigma-$кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$ с сохранением свойств композиционности и непрерывности в нуле.

Поскольку, в общем случае, композиционная субмера не является непрерывной в порожденной FN — топологии [10], то при решении задачи о продолжении композиционной субмеры нужно либо строить топологию на Σ, относительно которой субмера была бы равномерно непрерывной, либо строить продолжение конструктивно.

В данной работе выбран второй путь, то есть продолжение композиционной субмеры строится конструктивно, при этом, так же как и в работах [8; 9], применяется лебеговская схема продолжения меры ([11], глава 1. п. 1.5).

1. Определения и обозначения. Примеры

Пусть T — некоторое множество, Σ — некоторый непустой класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$; $R(\Sigma)$ и $S(\Sigma)$ — соответственно, кольцо и σ — кольцо, порожденные классом Σ; Σ_σ — класс счетных объединений множеств класса Σ; $\Sigma_{\sigma\delta}$ — класс счетных пересечений множеств класса Σ_σ. Если $E \subset T$, то через $E \cap \Sigma$ будем обозначать класс множеств A, для которых $A \subset E$, $A \in \Sigma$; через E' будем обозначать

Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnayata@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

дополнение множества E. Множества $A, B \in \Sigma$ такие, что $A \cup B \in \Sigma$ и $A \cap B = \varnothing$, будем называть парой множеств из Σ и обозначать как $(A, B) \in \Sigma$.

Непустой класс множеств Σ будем называть мультипликативным классом множеств, или кратко, m-классом, если для любых двух множеств из Σ их разность принадлежит Σ.

Из этого определения следует, что, если Σ — m- класс, то

1) $\varnothing \in \Sigma$,

2) если $A, B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$,

3) если $A, B, C \in \Sigma$, причем $A \subset C$, $B \subset C$, то $A \cup B \in \Sigma$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что функции множества φ заданы на классе множеств Σ, принимают значения из $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$ и $\varphi(\varnothing) = 0$.

Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ сконденсирована на классе множеств $\mathcal{P} \subset \Sigma$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого множества $E \in \Sigma$ существует такое множество $e \in \mathcal{P}$, что

$$\varphi(E \triangle e) < \varepsilon.$$

Функцию множества

$$\varphi'(E) = \sup\{\varphi(A), A \in E \cap \Sigma\}, E \subset T,$$

называют супремацией функции φ.

Определение 1. Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ непрерывна (соответственно, непрерывна сверху, непрерывна снизу) на множестве $E \in \Sigma$, если для любой последовательности множеств $E_n \in \Sigma$, сходящейся к E (соответственно, $E_n \downarrow E$, $E_n \uparrow E$), справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi(E).$$

В случае, если функция множества φ непрерывна (непрерывна сверху) на пустом множестве, говорят, что функция φ непрерывна в нуле (соответственно, непрерывна сверху в нуле).

В случае, если функция множества φ непрерывна снизу на каждом множестве $E \in \Sigma$, говорят, что функция φ непрерывна снизу на Σ.

Определение 2. Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ исчерпывающая, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $E_n \in \Sigma$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = 0.$$

Определение 3. Монотонную функцию множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ называют квазитреугольной субмерой на Σ, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ справедливо: если $\varphi(A) < \delta$ и $\varphi(B) < \delta$, то $\varphi(A \cup B) < \varepsilon$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$ — класс непрерывных, строго возрастающих функций, заданных на $\mathbb{R}^+$ и таких ,что

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \;\; f(0) = 0; \;\; f(x) \geqslant x, \;\; x \in \mathbb{R}^+.$$

Функцию множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ назовем композиционной, если существуют такие функции g, f_1, $f_2 \in \mathcal{F}$, что для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ справедливо

$$\varphi(A \cup B) \leqslant g(f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B)).$$

Монотонную композиционную функцию множества будем называть композиционной субмерой первого рода, если $g(x) = x$, и композиционной субмерой второго рода во всех остальных случаях.

Пример 1. Если φ — аддитивная функция на классе Σ, то для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ справедливо

$$(\varphi(A \cup B))^n \leqslant 2^{n-1}\varphi(A) + 2^{n-1}\varphi(B).$$

Отсюда следует, что функции множества $\mu(E) = \varphi^n(E)$, $E \in \Sigma$, и $\nu(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(\varphi(E))^k$, $E \in \Sigma$, где $c_1, c_2, ..., c_n$ — некоторый набор неотрицательных чисел,являются композиционными субмерами, для которых $g(x) = x$, $f_1(x) = f_2(x) = 2^{n-1}x$.

Пример 2. Пусть φ — аддитивная функция на классе Σ. Функция множества $\psi(E) = (\exp\varphi(E)) - 1$ является композиционной субмерой, для которой $g(x) = x$, $f_1(x) = f_2(x) = x^2 + x$.

2. Свойства композиционных субмер и их супремаций

Предложение 1. Пусть φ — композиционная субмера первого рода на m- классе Σ. Если φ непрерывна сверху в нуле, то ее супремация φ' является композиционной субмерой второго рода на классе Σ_σ.

Доказательство. Пусть $E, F \in \Sigma_\sigma$, $E \cap F = \varnothing$. Пусть $A_n \subset R(\Sigma)$, $B_n \subset R(\Sigma)$ и $A_n \uparrow E$, $B_n \uparrow F$. Тогда $(A_n \cup B_n) \uparrow (E \cup F)$.

Пусть $C \in (E \cup F) \cap \Sigma$.

Тогда $(A_n \cup B_n) \cap C \uparrow (E \cup F) \cap C$.

Так как Σ m - класс, то $(A_n \cup B_n) \cap C \in \Sigma$.

Таким образом имеем

$$\varphi(C) \leqslant f_1\varphi(C \cap (A_n \cup B_n)) + f_2\varphi(C \setminus (C \cap (A_n \cup B_n))).$$

Переходя к пределу, в силу непрерывности сверху в нуле функции φ, получим

$$\varphi(C) \leqslant \lim_{n\to\infty} f_1\varphi(C \cap (A_n \cup B_n)).$$

Отсюда, в силу произвольности множества $C \in (E \cup F) \cap \Sigma$, получим

$$\varphi'(E \cup F) \leqslant \lim_{n\to\infty} f_1\varphi(C \cap (A_n \cup B_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} f_1(f_1\varphi(C \cap A_n) + f_2(C \cap B_n)) \leqslant f_1(f_1\varphi'(E) + f_2\varphi'(F)).$$

Предложение 2. Пусть φ — композиционная субмера на кольце Σ. Если φ непрерывна снизу на Σ, то ее супремация φ' является композиционной субмерой на классе Σ_σ того же рода, что и φ.

Доказательство. Пусть φ — композиционная субмера первого рода. Пусть $E \in \Sigma_\sigma$, пусть E_n возрастающая последовательность множеств из Σ, для которой $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Пусть $C \in E \cap \Sigma$. Так как функция φ непрерывна снизу, то

$$\varphi(C) = \lim_{n\to\infty} \varphi(C \cap E_n).$$

Отсюда, в силу монотонности функции φ, получим

$$\varphi(C) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n).$$

Так как множество $C \in E \cap \Sigma$ выбрано произвольно, то

$$\varphi'(E) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n).$$

Отсюда и из условия $E_n \in \Sigma$, $E_n \subset E$ получим

$$\varphi'(E) = \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n). \tag{2.1}$$

Пусть теперь $E, F \in \Sigma_\sigma$, $E \cap F = \varnothing$.

Пусть A_n, B_n — возрастающие последовательности множеств из Σ такие, что

$$A_n \uparrow E, \; B_n \uparrow F.$$

В силу (2.1) получим

$$\varphi'(E \cup F) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n \cup B_n).$$

Так как

$$\varphi(A_n \cup B_n) \leqslant f_1\varphi(A_n) + f_2\varphi(B_n) \leqslant f_1\varphi'(E) + f_2\varphi'(F),$$

то

$$\varphi'(E \cup F) \leqslant f_1\varphi'(E) + f_2\varphi'(F),$$

Случай, когда φ — композиционная субмера второго рода, рассматривается аналогично.

Заметим, что в ходе доказательства показано, что функции $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$ для субмеры φ' на Σ_σ, те же, что и для субмеры φ на Σ.

Предложение 3. Пусть φ — композиционная субмера первого рода на кольце Σ, причем $f_1(x) = x$. Если φ непрерывна сверху в нуле, то ее супремация φ' является композиционной субмерой первого рода на классе Σ_σ, для которой $f_1(x) = x$.

Доказательство. Покажем, что функция φ удовлетворяет условиям предложения 2.

Пусть $E \in \Sigma$, $E_n \subset \Sigma$, $E_n \uparrow E$.

Так как

$$E \subset E_n \cup (E \setminus E_n),$$

то

$$\varphi(E) \leqslant \varphi(E_n) + f_2\varphi(E \setminus E_n), \; n = 1, 2, ...$$

Переходя к пределу и учитывая непрерывность сверху в нуле функции φ, получим

$$\varphi(E) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n). \tag{2.2}$$

Так как функция φ монотонна, то
$$\varphi(E_n) \leqslant \varphi(E),\ \ n = 1, 2, ...,$$
следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) \leqslant \varphi(E). \tag{2.3}$$
Из (2.2) и (2.3) следует, что функция φ непрерывна снизу на Σ.

Отсюда, в силу предложения 2 и замечания к нему, получим, что супремация φ' является композиционной субмерой первого рода на Σ_σ, для которой $f_1(x) = x$.

3. Теоремы о продолжении

Теорема 1. Пусть φ композиционная субмера, заданная на m- классе Σ. Если функция φ непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая, то существуют σ- кольцо $\overline{\Sigma}$ и квазитреугольная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$ такие, что

(1) $\overline{\Sigma} \supset S(\Sigma)$;

(2) $\overline{\varphi}$ является продолжением φ на $\overline{\Sigma}$;

(3) $\overline{\varphi}$ — полная функция на $\overline{\Sigma}$;

(4) $\overline{\varphi}$ сконденсирована на классе $R(\Sigma)$;

(5) $\overline{\varphi}$ непрерывна в нуле на $\overline{\Sigma}$;

(6) множество $E \in \overline{\Sigma}$ тогда и только тогда, когда $E = A \triangle B$, где $A \in \Sigma_{\sigma\delta}$, $B \subset A'$, $A' \in \Sigma_{\sigma\delta}$, $\overline{\varphi}(A') = 0$.

Доказательство. Пусть φ композиционная субмера первого рода. Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть $\delta = \min\{f_1^{-1}(\frac{\varepsilon}{2}), f_2^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})\}$. Тогда для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ из условий $\varphi(A) < \delta$, $\varphi(B) < \delta$ следует
$$\varphi(A \cup B) < f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B) < \varepsilon.$$
Таким образом, функция φ является квазитреугольной субмерой.

Обозначим через $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ наследственное σ- кольцо, порожденное классом Σ_σ.

Положим
$$\overline{\varphi}_0(E) = \inf\{\varphi'(F), E \subset F, F \in \Sigma_\sigma\},\ \ E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma).$$
Обозначим через $\overline{\Sigma}$ класс тех и только тех подмножеств σ- кольца $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, на которых функция $\overline{\varphi}_0$ сконденсирована на кольце $R(\Sigma)$:
$$\overline{\Sigma} = \{E : E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma), \forall\varepsilon > 0\ \ \exists e \in R(\Sigma) : \overline{\varphi}_0(E\triangle e) < \varepsilon\}.$$
В силу теоремы 2.1 [9] класс множеств $\overline{\Sigma}$ является σ- кольцом, а функция $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0\mid_{\overline{\Sigma}}$ является квазитреугольной субмерой на $\overline{\Sigma}$, для которой выполнены утверждения (2)—(6) теоремы.

Теорема 2. Пусть φ монотонная функция множества, заданная на m- классе Σ. Если функция φ непрерывна сверху в нуле, исчерпывающая на Σ, а ее супремация φ' на классе Σ_σ является композиционной субмерой некоторого рода, то существуют σ- кольцо $\overline{\Sigma}$ и композиционная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$ того же рода, что и супремация φ', для которых выполнены утверждения (1)—(6) теоремы 1.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ — наследственное σ- кольцо, порожденное классом Σ_σ; пусть
$$\overline{\varphi} = \inf\{\varphi'(F), E \subset F, F \in \Sigma_\sigma\},\ \ E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma).$$
Покажем, что функция $\overline{\varphi}_0$ является композиционной субмерой на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ того же рода, что и супремация φ' на классе Σ_σ (с теми же функциями $g, f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, что и для супремации φ').

Пусть, для определенности, φ — квазитреугольная субмера второго рода. Пусть $E_1, E_2 \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Пусть $F_1, F_2 \in \Sigma_\sigma$, причем $E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$. . Тогда
$$\overline{\varphi}_0(E_1 \cup E_2) \leqslant \varphi'(F_1 \cup F_2) \leqslant g(f_1\varphi'(F_1) + f_2\varphi'(F_2)).$$
Отсюда, в силу произвольности множеств $F_1, F_2 \in \Sigma_\sigma$ и определения функции $\overline{\varphi}_0$, получим
$$\overline{\varphi}_0(E_1 \cup E_2) \leqslant g(f_1\overline{\varphi}_0(E_1) + f_2\overline{\varphi}_0(E_2)).$$
Положим
$$\overline{\Sigma} = \{E : E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma), \forall\varepsilon > 0\ \ \exists e \in R(\Sigma) : \overline{\varphi}_0(E\triangle e) < \varepsilon\};$$
$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0\mid_{\overline{\Sigma}}.$$
Для завершения доказательства осталось применить теорему 1.

Из предложений 1, 2 и теоремы 2 вытекает справедливость следствий 1 и 2.

Следствие 1. Пусть функция множества φ задана на классе множеств Σ, непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая. Если Σ — m- класс, а φ — композиционная субмера первого рода на Σ, то существуют σ-

кольцо $\overline{\Sigma}$ и композиционная субмера второго рода $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$, для которых выполнены утверждения (1)—(6) теоремы 1.

Следствие 2. Пусть функция множества φ задана на классе множеств Σ, непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая. Если Σ — кольцо множеств, а φ — непрерывная снизу композиционная субмера на Σ, то существуют σ- кольцо $\overline{\Sigma}$ и композиционная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$ того же рода, что и φ, для которых выполнены утверждения (1)—(6) теоремы 1.

4. Единственность продолжения частных видов композиционных субмер

Рассмотрим вопрос об единственности продолжения.

Пример. Пусть $p, q > 0$. Пусть $T = [0; 2p]$, λ — мера Лебега на T, Σ — кольцо множеств, порожденное полукольцом промежутков вида $(a; b]$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2p$. На $\mathbb{R}^+$ определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} x, 0 \leqslant x < p; \\ x + q, p \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Пусть Σ_0 — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0; 2p]$. Для любого множества $E \in \Sigma_0$ положим $\mu(E) = g\lambda(E)$. Пусть $(A, B) \in \Sigma_0$, тогда

$$\mu(A \cup B) = g\lambda(A \cup B) = g(\lambda(A) + \lambda(B)) \leqslant k\lambda(A) + k\lambda(B),$$

где $k = 1 + \frac{q}{p}$.

Отсюда следует, что μ — композиционная субмера первого рода,

$$f_1(x) = f_2(x) = \left(1 + \frac{q}{p}\right) x.$$

Рассмотрим сужение μ_1 функции μ на кольцо Σ, положив для любого множества $E \in \Sigma$

$$\mu_1(E) = \mu(E).$$

В силу теоремы 1 функцию μ_1 можно продолжить до квазитреугольной (точнее, до композиционной субмеры) $\overline{\mu}_1$ на σ- кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$.

Покажем, что даже на классе Σ_σ функции $\overline{\mu}_1$ и μ принимают различные значения.

Пусть

$$E_0 = (0; p); \;\; E_n = \left(\frac{1}{2^n}; p - \frac{1}{2^n}\right]; \;\; n = 1, 2, ...$$

Так как $E_n \in \Sigma$ и $E_n \uparrow E_0$, то $E_0 \in \Sigma_\sigma$.

Тогда по определению функции $g(x)$, имеем

$$\mu(E_0) = g\lambda(E_0) = p + q.$$

В то же время, так как $E_0 \in \Sigma_\sigma$, то

$$\overline{\mu}_1(E_0) = \mu'(E_0) = \sup\{\mu(A), \;\; A \in E_0 \cap \Sigma\} = \sup\{g\lambda(A), A \in E_0 \cap \Sigma\} = p.$$

Данный пример показывает, что, вообще говоря, даже композиционная субмера первого рода продолжается не единственным образом.

В то же время, если в теореме 1 предположить, что класс множеств Σ — кольцо, а φ — композиционная субмера первого рода на Σ, причем $f_1(x) = x$ (в частном случае φ может быть монотонной полуаддитивной функцией множества), то продолжение $\overline{\varphi}$ функции множества φ на σ- кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$, для которого выполнены утверждения (1)—(6), является единственным.

Покажем это.

Предположим, что существуют σ- кольца $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\Sigma}_2$, композиционные субмеры $\overline{\varphi}_1$ на $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\varphi}_2$ на $\overline{\Sigma}_2$, для которых справедливы утверждения (1)—(6) теоремы 1.

На σ- кольце $S(\Sigma)$, порожденном кольцом Σ, зададим функцию

$$\nu(E) = \overline{\varphi}_1(E) + \overline{\varphi}_2(E), \;\; E \in S(\Sigma.)$$

В силу теоремы 1 функция ν множества является квазитреугольной субмерой, непрерывной сверху в нуле и исчерпывающей на $S(\Sigma)$. Отсюда следует, что для любого множества $E \in S(\Sigma)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e \in \Sigma$, что $\nu(E \triangle e) < \varepsilon$.

Пусть $E \in S(\Sigma)$. Последовательно полагая $\varepsilon = 1; \frac{1}{2}; ...; \frac{1}{n}$, построим последовательность множеств $\{e_n\} \subset \Sigma$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \nu(E \triangle e_n) = 0.$$

Из предложения 3 и теоремы 2 следует, что функции множества $\overline{\varphi}_1$ и $\overline{\varphi}_2$ являются композиционными субмерами первого рода, для которых $f_1(x) = x$.

Так как
$$E \subset e_n \cup (E \setminus e_n), \ \ n = 1, 2, ...,$$
то
$$\overline{\varphi}_i(E) \leqslant \overline{\varphi}_i(e_n) + f\overline{\varphi}_i(E \setminus e_n), \ \ f \in \mathcal{F}; \ \ i = 1, 2; \ \ n = 1, 2, ...$$

Переходя к пределу, получим
$$\overline{\varphi}_i(E) \leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_i(e_n), \ \ i = 1, 2.$$

Так как $e_n \subset E \cup (e_n \setminus E), \ n = 1, 2, ...,$ то
$$\overline{\varphi}_i(e_n) \leqslant \overline{\varphi}_i(E) + f\overline{\varphi}_i(e_n \setminus E), \ \ f \in \mathcal{F}; \ \ i = 1, 2, ...$$

Переходя к пределу, получим
$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_i(e_n) \leqslant \overline{\varphi}_i(E), \ \ i = 1, 2.$$

Так как
$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_i(e_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(e_n), \ \ i = 1, 2,$$
то
$$\overline{\varphi}_1(E) = \overline{\varphi}_2(E).$$

Отсюда, учитывая структуру множеств σ- колец $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\Sigma}_2$ (утверждение (6) теоремы 1), получим
$$\overline{\Sigma}_1 = \overline{\Sigma}_2 = \overline{\Sigma},$$
а также
$$\overline{\varphi}_1(E) = \overline{\varphi}_2(E)$$
для любого множества $E \in \overline{\Sigma}$.

Замечание 1. Основные результаты работы, распространяющие классическую теорему о лебеговском продолжении меры ([11], теорема 1.5.6) на случай неаддитивных функций множества, были депонированы автором в работе [12].

Замечание 2. Применение конструкции Лебега к продолжению неаддитивных функций множества позволило найти условия на функции множества (композиционность, непрерывность сверху в нуле, исчерпываемость), достаточные для продолжения таких функций с мультипликативного класса множеств на сигма-кольцо.

Литература

[1] Ricanova Z. On the extension of measures with values in partially ordered semigroups // Math. Nachr. 1982. V. 106. P. 201–209.

[2] Boccuto A. On Stone-type extensions for group-valued measures // Math. Slov. 1995. V. 45. № 3. P. 309–315.

[3] Dobrakov I. On extension of vector polymeasures, II // Math. Slov. 1995. V. 45. № 4. P. 377–380.

[4] Алексюк В.Н. Безносиков Ф.Д. Продолжение непрерывной внешней меры на булевой алгебре // Изв. вузов. Матем. 1972. № 4. С. 3–9.

[5] Гусельников Н.С. О продолжении квазилипшицевых функций множества // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 21–31.

[6] Малюгин С.А. Топология покрывающих множеств и непрерывное продолжение внешних мер. // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 2. С. 285–292.

[7] Савельев Л.Я. Внешние меры и внешние топологии // Сиб. матем. журн. 1983. № 2. С. 133–149.

[8] Климкин В.М., Срибная Т.А. Продолжение квазитреугольной субмеры // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 42–48.

[9] Срибная Т.А. Продолжение функции множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2007. № 6 (56). С. 269–280.

[10] Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration, I, II // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci Math. Astr. Phus. 1972. V. 20. № 4. P. 269–276, 277–286.

[11] Богачев В.И. Основы теории меры // Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2006. Т. 1. 583 с.

[12] Срибная Т.А. О продолжении композиционной функции множества // Деп. в ВИНИТИ РАН. Самарский государственный университет. Самара. 2013. № 52-В2013. 15 с.

References

[1] Ricanova Z. On the extension of measures with values in partially ordered semigroups. *Math. Nachr*, 1982, Vol. 106, pp. 201–209 [in Englsih].

[2] Boccuto A. On Stone-type extensions for group-valued measures. *Math. Slov.*, 1995, Vol. 45, № 3, pp. 309–315 [in English].

[3] Dobrakov I. On extension of vector polymeasures, II. *Math. Slov.*, 1995, Vol. 45, № 4, pp. 377–380 [in English].

[4] Aleksyuk V.N., Beznosikov F.D. *Prodolzhenie nepreryvnoi vneshnei mery na bulevoi algebre* [Continuation of a continuous exterior measure on a Boolean algebra]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1972, no. 4, pp. 3–9 [in Russian].

[5] Guselnikov N.S. *O prodolzhenii kvazilipshitsevykh funktsii mnozhestva* [On the extension of quasi-Lipschitz set functions]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1975, Vol. 17, no 1, pp. 21–31 [in Russian].

[6] Malyugin S.A. *Topologiia pokryvaiushchikh mnozhestv i nepreryvnoe prodolzhenie vneshnikh mer* [The topology of covering sets and continuous continuation of external measures]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1979, Vol. 26, no 2, pp. 285–292 [in Russian].

[7] Saveliev L.Ya. *Vneshnie mery i vneshnie topologii* [External measures and external topologies]. *Cib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1983, no. 2, pp. 133–149 [in Russian].

[8] Klimkin V.M., Sribnaya T.A. *Prodolzhenie kvazitreugol'noi submery* [Continuation of quasi-triangular submeasure]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1992, no 2, pp. 42–48 [in Russian].

[9] Sribnaya T.A. *Prodolzhenie funktsii mnozhestva so znacheniiami v chastichno uporiadochennoi polugruppe* [Continuation of the set function with values in a partially ordered semigroup]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University], 2007, no 6(56), pp. 269–280 [in Russian].

[10] Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration, I, II. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci Math. Astr. Phus*, 1972, Vol. 20, no 4, pp. 269–276, 277–286 [in English].

[11] Bogachev V.I. *Osnovy teorii mery* [Fundamentals of measure theory]. In: *Moskva-Izhevsk: NITs Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika* [Moscow-Izhevsk: scientific research centre Regular and chaotic dynamics], 2006, Vol. 1, 583 p. [in Russian].

[12] Sribnaya T.A. *O prodolzhenii kompozitsionnoi funktsii mnozhestva* [On the continuation of the composite function of the set]. In: Depository in the All-Union Institute of Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences. Samara National Research University. Samara, 2013, no 52-B2013, 15 p. [in Russian].

T.A. Sribnaya[2]

ON THE EXTENSION OF NON-ADDITIVE SET FUNCTIONS

In this paper we prove theorems on the extension of non-additive set functions domain of definition of which, generally speaking, is not a ring, on the sigma-ring of sets. It is shown that continuous from the top at zero, the exhaustive compositional submersion of the first or second kind can be continued from the multiplicative class of sets to the sigma-ring of sets to a complete quasitriangular submerse complete at zero. Conditions are found under which the composition sub-measure of the first (second) kind extends to the composition sub-measure of the same kind. The continuation of the composite submerses obtained in the work is, in general, not unique. Some particular types of submeasures are considered, for which uniqueness of continuation takes place.

Key words: extension of set functions, exhaustive non-additive set functions, composition submeasures.

Статья поступила в редакцию 28/*VIII*/2017.
The article received 28/*VIII*/2017.

[2] *Sribnaya Tatyana Arkadievna* (`sribnayata@mail.ru`), Department of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.