УДК 517.956 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-26-33

В.А. Киричек[1]

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для одномерного гиперболического уравнения. Нелокальное граничное условие является динамическим, так как представляет собой соотношение, в которое помимо значений производных искомого решения по пространственным переменным входят производные первого порядка по переменной времени, а также интеграл от искомого решения по пространственной переменной. Доказано существование единственного обобщенного решения, принадлежащего пространству Соболева. Для доказательства однозначной разрешимости задачи использованы методы, разработанные специально для исследования нелокальных задач. Применение этих методов позволило получить априорные оценки, с помощью которых доказана единственность решения. Доказательство существования решения базируется на полученных в работе априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: нелокальное граничное условие, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, пространство Соболева.

Введение

Важное место при изучении дифференциальных уравнений с частными производными занимают задачи с нелокальными условиями. Нелокальными условиями называются соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в различных граничных и внутренних точках области, в которой ищется решение задачи. Интегральные условия могут быть различных видов. Например, интегральные условия по пространственной переменной, по переменной времени. Залдачи с нелокальными условиями невозможно исследовать с помощью методов для классических задач. Поэтому необходимо найти другие способы для их изучения. Для некоторых случаев методы уже разработаны, например, если интегральное условие содержит внеинтегральное слагаемое, представляющее собой производную по нормали к границе области.

В работе рассмотрена задача для гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, представлено обоснование поставленной задачи и доказано существование единственного обобщенного решения.

1. Постановка задачи

Поставим задачу: найти для уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

решение в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

и граничным условиям, второе из которых представляет собой нелокальное условие

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \alpha u_t(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t) = 0 \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in [0,T]\}, \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in [0,T]\},$$

Киричек Виталия Александровна (vitalya29@gmail.com), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l,$$
$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T),\ \ u_t \in L_2(\Gamma)\},$$
$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T),\ \ v(x,T) = 0\}.$$

Введем понятие обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3). Следуя известной процедуре [7], выведем тождество, которое будет основой нашего определения

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t - a u_x v_x + cuv)dxdt = \int_0^l \psi(x)v(x,0)dx + \int_0^T \alpha u_t(l,t)v(l,t)dt +$$
$$+ \int_0^T av(l,t) \int_0^l K(x)u(x,t)dxdt + \int_0^T \int_0^l fvdxdt. \tag{1.4}$$

Определение. Функция $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (1.1) - (1.3), если она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству (1.4) для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$.

2. Основной результат

Теорема. Пусть выполняются следующие условия

$$c \in C(\bar{Q}_T), a \in C(\bar{Q}_T), a_t \in C(\bar{Q}_T),$$
$$\alpha > 0, f \in L_2(Q_T), \quad \varphi \in W_2^1(0,l), \quad \psi \in L_2(0,l).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение поставленной задачи.

Доказательство Для доказательства единственности обобщенного решения покажем, что функция $u(x,t)$, которая представляет собой разность двух обобщенных решений $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, равна нулю всюду в области Q_T. Очевидно, что $u(x,0) = 0$ и выполняется тождество

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t - a u_x v_x + cuv)dxdt = \int_0^T \alpha u_t(l,t)v(l,t)dt +$$
$$+ \int_0^T av(l,t) \int_0^l K(x)u(x,t)dxdt. \tag{2.1}$$

Выберем в качестве $v(x,t)$ в этом тождестве функцию

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta)d\eta; & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0; & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\tau \in [0,T]$ и произвольно. Легко заметить, что эта функция принадлежит пространству $\hat{W}_2^1(Q_T)$ и $v_t = u$.

В результате интегрирования по частям получим

$$\int_0^l (u^2(x,\tau) + av_x^2(x,0))dx + 2l \int_0^\tau \alpha u^2(l,t)dt = -2 \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt -$$
$$-2 \int_0^\tau av(l,t) \int_0^l K(x)u(x,t)dxdt - 2 \int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt. \tag{2.3}$$

Проведем некоторые оценки. В силу условий теоремы существует такая положительная константа c_1, что $max|c(x,t)| \leqslant c_1$. Применив неравенство Коши, получим

$$2|\int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt| \leqslant c_1 \int_0^\tau \int_0^l (v^2 + v_t^2)dxdt.$$

Аналогично в силу теоремы существует положительная константа a_1 такая, что $max|a_t(x,t)| \leqslant a_1$, тогда

$$|\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt| \leqslant a \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dxdt.$$

Применив неравенство Коши, получим

$$2|\int_0^\tau av(l,t) \int_0^l K(x)u(x,t)dxdt| \leqslant \int_0^\tau a^2 v^2(l,t)dt + \int_0^\tau (\int_0^l Kudx)^2 dt. \qquad (2.4)$$

Оценим первое и второе слагаемые правой части полученного неравенства

$$\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dxdt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2 dxdt.$$

$$(\int_0^l K(x)udx)^2 \leqslant \int_0^l K^2(x)dx \int_0^l u^2 dx \leqslant K \int_0^l u^2 dx.$$

Используя полученные оценки в итоге придем к неравенству

$$\int_0^l (u^2(x,\tau) + av_x^2(x,0))dx + 2l\alpha \int_0^\tau u^2(l,t)dt \leqslant c_1 \int_0^\tau \int_0^l (v^2 + v_t^2)dxdt +$$

$$+2l \int_0^\tau a^2 v_x^2 dxdt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l a^2 v^2 dxdt + K \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt + 2a_1 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dxdt.$$

Обозначим $m = c_1 + K + c_1\tau + \frac{2a\tau}{l}, m_0 = c_1 + \frac{2a}{l}$. Пусть $m_1 = max[m_0, m]$, тогда неравенство примет вид

$$\int_0^l (u^2 + av_x^2(x,0))dx \leqslant m_1 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2)dxdt. \qquad (2.5)$$

Введем вспомогательную функцию

$$w(x,t) = \int_0^t u_x d\eta,$$

из этого представления следует

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), v_x(x,0) = -w(x,\tau).$$

Тогда

$$v_x^2 \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau).$$

Так как τ является произвольным, то выберем его так, чтобы $a - 2m_1\tau > 0$. Пусть для определенности $a - 2m_1\tau > \frac{a}{2}$. Возьмем $a_1 = \max[1, \frac{a}{2}]$. В итоге

$$a_1 \int_0^l (u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau))dx \leqslant m_2 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + w^2)dxdt.$$

Применняя лемму Гронуолла, получим, что $u(x,\tau) = 0$ для любого $\tau \in [0; \frac{a}{4m_1}]$. Если рассмотреть теперь задачу с начальными данными при $\tau = \frac{a}{4m_1}$, то проведя те же рассуждения, что и выше, докажем, что $u(x,\tau) = 0$ при $\tau \in [0; \frac{a}{2m_1}]$. За конечное число шагов получим, что $u = 0$ во всей области Q_T.

Для доказательства существования обобщенного решения применим метод компактности. Для этого сначала построим последовательность приближенных решений поставленной задачи методом Галеркина. Рассмотрим последовательность $\{w_n(x)\}$, где $w_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, которая является линейно независимой и образует полную систему в $W_2^1(\Omega)$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) w_k(x) \qquad (2.6)$$

из соотношений

$$\int_{\Omega}(u^m_{tt}w_j + au^m_x w'_j + cu^m w_j)dx + \alpha u^m_t(l,t)w_j(l) + aw_j(l)\int_0^l K(x)u(x,t)dx = \int_{\Omega} fw_j dx, \tag{2.7}$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно $d_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m d''_k(t)A_{kj} + \alpha\sum_{k=1}^m d'_k(t)C_{kj} + \alpha\sum_{k=1}^m d_k(t)(B_{kj}+A_{kj}) = f_j(t), \tag{2.8}$$

где $A_{kj} = \int\limits_0^l w_k(x)w_j(x)dx, C_{kj} = w_k(l)w_j(l), B_{kj} = \int\limits_0^l (aw_k(x)'w_j(x)' +$

$+ cw_k(x)w_j(x))dx + a(l,t)w_j(l)\int\limits_0^l K(x)w_k(x)dx, f_j(t) = \int\limits_{\Omega} fw_j dx$. Добавим начальные условия

$$d_k(0) = \gamma_k, \quad d'_k(0) = \eta_k. \tag{2.9}$$

γ_k и η_k такие, что $\varphi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^m \gamma_k w_k(x), \psi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^m \eta_k w_k(x)$. При $m \to \infty$ эти суммы аппроксимируют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в нормах W_2^1 и L_2 соответственно $\varphi^m(x) \to \varphi(x)$ и $\psi^m(x) \to \psi(x)$. Получили задачу Коши (2.8), (2.9). Такая задача разрешима тогда и только тогда, когда матрица A_{kj} является обратимой. В силу условий на $w_j(x)$ матрица A_{kj} — невырожденная. На w_k налагают дополнительное требование об ортогональности в L_2. В силу теорем обыкновенных диффиренциальных уравнений задача (2.8) с начальными условиями (2.9) однозначно разрешима, и $d''_k \in L_1(0,T)$. Следовательно, последовательность приближенных решений $\{u^m\}$ построена.

Теперь докажем ограниченность этой последовательности в W_2^1. Для этого нужно получить априорные оценки. Умножим (2.7) на d'_j , просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ

$$\int_0^\tau\int_0^l u^m_{tt}u^m_t dxdt + \int_0^\tau\int_0^l au^m_x u^m_{xt}dxdt + \int_0^\tau\int_0^l cu^m u^m_t dxdt+$$

$$+\alpha\int_0^\tau (u^m_t(l,t))^2dt + \int_0^\tau au^m_t(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt = \int_0^\tau\int_0^l fu^m_t dt. \tag{2.10}$$

Проинтегрировав по частям последнее равенство, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l ((u^m_t(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u^m_x(x,\tau))^2)dx + \alpha\int_0^\tau u^m_t(l,t))^2dt+$$

$$+\int_0^\tau au^m_t(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt = \frac{1}{2}\int_0^l (u^m_t(x,0))^2dx + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_x)^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l a(u^m_x(x,0))^2dx - \int_0^\tau\int_0^l cu^m u^m_t dxdt + \int_0^\tau\int_0^l fu^m_t dxdt. \tag{2.11}$$

С помощью ограничений на $a(x,t), a_t(x,t)$ и $c(x,t)$, сформулированных в теореме, оценим сверху правую часть (2.11). Получим оценку второго слагаемого

$$\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_x)^2dxdt \leqslant a_1\int_0^\tau\int_0^l (u^m_x)^2dxdt.$$

Теперь оценим предпоследнее и последнее слагаемые

$$\int_0^\tau\int_0^l cu^m u^m_t dxdt \leqslant c_1\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2 + (u^m_t)^2)dxdt,$$

$$\int_0^\tau\int_0^l fu^m_t dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m_t)^2dxdt.$$

Получим неравенство

$$\int\limits_0^l ((u_t^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2)dx + 2\int\limits_0^\tau \alpha(u_t^m(l,t))^2dt+$$

$$+2\int\limits_0^\tau au_t^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u^m dxdt \leqslant \int\limits_0^l (u_t^m(x,0))^2dx + \ a_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m)^2dxdt+$$

$$+\int\limits_0^l a(u_x^m(x,0))^2dx - c_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f^2dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m)^2dxdt. \tag{2.12}$$

Прведем оценку последнего слагаемого левой части (2.12). Но сначала проинтрегрируем его по частям

$$\int\limits_0^\tau au_t^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u^m dxdt = -\int\limits_0^\tau au^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u_t^m dxdt-$$

$$-\int\limits_0^\tau a_t u^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u^m dxdt + a(x,\tau)u^m(l,\tau)\int\limits_0^l K(x)u^m(x,\tau)dx.$$

Оценим каждое слагаемое, входящее в последенее равенство, по отдельности

$$|\int\limits_0^\tau au^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u_t^m dxdt| \leqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_0^\tau (u^m(l,t))^2dt + \frac{a_0}{2}\int\limits_0^\tau (\int\limits_0^l Ku_t^m dx)^2dt$$

Используя ранее выведенное неравенство для оценки функции на границе области, получим

$$\int\limits_0^\tau (u^m(l,t))^2dt \leqslant 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m)^2dxdt + \frac{2}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m)^2dxdt,$$

тогда

$$|\int\limits_0^\tau au^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u_t^m dxdt| \leqslant a_0l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m)^2dxdt + \frac{a_0}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{a_0K^2}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m)^2dxdt.$$

Аналогично проводится оценка остальных слагаемых

$$|\int\limits_0^\tau a_t u^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u^m dxdt| \leqslant a_1l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m)^2dxdt + \frac{a_1}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{a_1K^2}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m)^2dxdt,$$

$$|a(x,\tau)u^m(l,\tau)\int\limits_0^l K(x)u^m(x,\tau)dx| \leqslant 2la_0\int\limits_0^l (u_x^m)^2dx + \frac{2a_0}{l}\int\limits_0^l (u^m)^2dx+$$

$$+a_0K^2\int\limits_0^l (u^m)^2dx.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\tau au_t^m(l,t)\int\limits_0^l K(x)u^m dxdt \leqslant l(a_0+a_1)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{l}(a_0+a_1)\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt+\frac{a_1K^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{a_1K^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt+2la_0\int_0^l (u_x^m)^2dx+a_0(\frac{2}{l}+K^2)\int_0^l (u^m)^2dx.$$

Пусть $E=\max[1,a-2la_0,1-a_0(\frac{2}{l}+K^2)]$, а $N=\max[A,B,C]$, тогда, учитывая свойства норм в пространствах L_2 и W_2^1, получим

$$E\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+a(u_x^m)^2)dx\leqslant N\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+$$

$$+(u_x^m)^2)dxdt+||f||_{L_2}^2+||\psi||_{L_2}^2+m||\varphi||_{W_2^1}^2.$$

Так как f является ограниченной функцией в $L_2(Q_T)$, φ в $W_2^1(Q_T)$, а ψ в $L_2(Q_T)$,то $||f||_{L_2}^2+$ $+||\varphi||_{W_2^1}^2+$ $+||\psi||_{L_2}^2\leqslant P$, где P положительная константа. Тогда последнее неравенство примет вид

$$E\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)_{t=\tau}dx\leqslant M\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)dxdt+P.$$

К этому неравенству применима лемма Гронуола, после ее применения и интегрирования по t от 0 до T получим

$$\int_0^T\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)_{t=\tau}dxdt\leqslant\frac{P}{N}(e^{\frac{N}{E}T}-1).$$

Пусть $\frac{P}{N}(e^{\frac{N}{E}T}-1)=L$, тогда $||u^m||_{W_2^1(Q_T)}^2\leqslant L$. Значит последовательность функций ограничена в W_2^1, следовательно, можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из этого же пространства, то есть к $u\in W_2^1$.Покажем , что этот предел и есть искомое обобщенное решение задачи (1.1) - (1.3).Чтобы доказать это, нужно показать, что для любой функции $v(x,t)\in W_2^1$ выполняется интегральное тождество (1.4) с $\psi(x)=0$

$$\int_0^T\int_0^l (-u_tv_t-au_xv_x+cuv)dxdt=\int_0^T \alpha u_t(l,t)v(l,t)dt+$$

$$+\int_0^l K(x)u(x,t)\int_0^T av(l,t)dxdt+\int_0^T\int_0^l fvdxdt. \tag{2.13}$$

Для этого нужно показать, что для некоторого всюду плотного в W_2^1 множества функций выполняется тождество (2.13). Возьмем функции $\eta^m(x,t)\in W_2^1(0,T)$ и $\eta(x,T)=0$. Умножим (2.7) на η^m. После умножения проинтегрируем по t от 0 до T и просуммируем по j от 1 до m

$$\int_0^T\int_0^l (u_t^m\eta_t^m+au_x^m\eta_x^m+cu^m\eta^m)dxdt+\alpha\int_0^T au_t^m(l,t)\eta^m dt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l f\eta^m dxdt.$$

Последнее равенство справедливо для любых функций $\eta(x,t)=$ $=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$. Перейдем к пределу при $m\to\infty$ при фиксированной $\eta(x,t)$

$$\int_0^T\int_0^l (u_t\eta_t+au_x\eta_x+cu\eta)dxdt+\alpha\int_0^l au_t(l,t)\eta(l,t)dt=\int_0^T\int_0^l f\eta dxdt.$$

(2.7) выполняется для предельной функции $u(x,t)$, если $v(x,t)=\eta(x,t)$, поэтому нельзя утверждать,что $u(x,t)$ искомое решение, так как (2.7) выполняется для $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$, а не для любых функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1$. Обозначим множество функций $\eta(x,t)$ через Θ_m. Объединение $\bigcup\limits_j \Theta_j$ является плотным в W_2^1 [7], поэтому тождество для предельной функции $u(x,t)$ выполняется для любых функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1$.

Теорема полностью доказана.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 728 с.

[2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave mation with internal and boundary damping // Journal of applied physics 111, 014702 (2012).

[3] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS. 2010. 240 с.

[4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. № 28. P. 1–10.

[5] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. 2014. № 3(114). С. 9—19.

[6] Пулькина Л.С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. № 9. С. 42–50.

[7] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

[1] Бейлин С.А. Об одной краевой задаче для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2011. № 5(86). С. 12–17.

[8] Рогожников А.М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых ВМК МГУ. 2013. Т. 10. С. 188–214.

[9] Cannon J. R. The solution of tne heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. P. 155–160.

[10] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.

[11] Пулькина Л.С. Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 1991. № 11. С. 48–51.

[12] Пулькина Л.С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Математические заметки. 1992. Т. 51. Вып. 3. С. 91–96.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977, 728 p. [in Russian].

[2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave mation with internal and boundary damping. *Journal of applied physics* 111, 014702 (2012) [in English].

[3] Korpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010, 240 p. [in Russian].

[4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28, pp. 1–10 [in English].

[5] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [Task on longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. *Zadacha s dinamicheskim nelokal'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2016, no. 9, pp. 42–50 [in Russian].

[7] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[8] Beylin S.A. *(*Ob odnoi kraevoi zadache dlia volnovogo uravneniia) [On a certain problem for a wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2011, no. 5(86), pp. 12–17 [in Russian].

[9] Rogozhnikov A.M. *O razlichnykh tipakh granichnykh uslovii dlia odnomernogo uravneniia kolebanii* [On various types of boundary conditions for the one-dimensional equation of oscillations]. *Sbornik statei molodykh uchenykh VMK MGU* [Collection of articles of young scientists of the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of MSU], 2013, Vol. 10, pp. 188–214 [in Russian].

[9] Cannon J.R. The solution of tne heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, Vol. 21, pp. 155–160 [in Russian].

[10] Kamynin L.I. *Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviiami* [A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1964, Vol. 4, no. 6, pp. 1006–1024 [in Russian].

[11] Pulkina L.S. *Ob odnoi neklassicheskoi zadache dlia vyrozhdaiushchegosia giperbolicheskogo uravneniia* [A nonclassical problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1991, no. 11, pp. 48–51 [in Russian].

[12] Pulkina L.S. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlia vyrozhdaiushchegosia giperbolicheskogo uravneniia* [Certain nonlocal problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes], 1992, Vol. 51, no. 3, pp. 48–51 [in Russian].

V.A. Kirichek[2]

PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION FOR A HYPERBOLIC EQUATION

In this paper we consider an initial-boundary problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional hyperbolic equation. Nonlocal condition is dynamic so as represents a relation between values of derivatives with respect of spacial variables of a required solution, first-order derivatives with respect to time variable and an integral of a required solution of spacial variable. We prove the existence and uniqueness of a generalized solution, which belongs to the Sobolev space. To prove uniquely solvability of the problem techniques developed specifically for research nonlocal problems are used. The application of these methods allowed us to obtain a priori estimates, through which the uniqueness of the solution is proved. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper and Galyorkin's procedure.

Key words: nonlocal boundary condition, hyperbolic equation, generalized solution, Sobolev space.

Статья поступила в редакцию 28/ *VI*/2017.
The article received 28/ *VI*/2017.

[2] *Kirichek Vitaliia Alexandrovna* (`vitalya29@gmail.com`), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.