УДК 519.999 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-18-25

А.В. Дюжева[1]

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается краевая задача с нелокальными динамическими условиями для гиперболического уравнения. Особенностью краевых условий является присутствие в них производных по переменной времени как первого, так и второго порядков. Кроме того, краевые условия являются нелокальными, а именно, они представляют собой соотношения, связывающие значения производных на разных частях границы. Подобные задачи возникают при изучении колебаний стержня с учетом эффекта демпфирования и при наличии точечных масс. В работе доказано существование единственного обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: нелокальная задача, динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, априорные оценки, эффекта демпфирования, производная второго порядка, метод Галеркина.

Введение

В статье рассмотрена нелокальная задача для гиперболического уравнения, к которой может привести математическое моделирование процесса, связанного с колебаниями механической системы.

В случае, если размеры объекта, колебания которого исследуются, невелики, то режим на одном из его концов может оказывать существенное влияние на поведение объекта на другом конце. Этот эффект был замечен еще Стекловым В.А. в его работе [7]. Математически это выражается в том, что граничные условия становятся нелокальными. Именно этот случай рассмотрен в предлагаемой работе. Особенностью изучаемой задачи является вид нелокальных условий, содержащих значение производных по переменной времени как первого, так и второго порядка на обоих концах промежутка $[0, l]$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$ и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (1.1) в области Q_T, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{1.2}$$

и динамическим граничным условиям

$$\begin{aligned} a(0,t)u_x(0,t) &= (\alpha_1(t)u_t(0,t))_t + (\beta_1(t)u_t(l,t))_t, \\ a(l,t)u_x(l,t) &= (\alpha_2(t)u_t(0,t))_t + (\beta_2(t)u_t(l,t))_t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1.1), его правая часть, а такие функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ в (1.3) достаточно гладкие, $a(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$.

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

2. Разрешимость задачи

Обозначим:
$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in (0,T)\},\ \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in (0,T)\}$,
$W(Q) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma_0 \cup \Gamma_l)\}$,
$\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1, v(x,T) = 0\}$.

Введем понятие обобщенного решения, используя известную процедуру [4]: умножим (1.1) на функцю $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ и после интегрирования по области Q_T, получаем равенство:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt+ \tag{2.1}$$

$$+\int_0^T v_t(0,t)[\alpha_1(t)u_t(0,t) + \beta_1(t)u_t(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^T v_t(l,t)[\alpha_2(t)u_t(0,t) + \beta_2(t)u_t(l,t)]dt = \int_0^T \int_0^l fvdxdt.$$

Определение Обобщенным решением задачи (1.1)-(1.3) будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (2.1) для любой функции $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

Теорема Пусть выполняются следующие условия:

$$H1.\ \ a \in C(\bar{Q}_T),\ \ a_t \in C(\bar{Q}_T),\ \ c \in C(\bar{Q}_T),$$

$$f \in L_2(Q_T),\ \ f(x,0) = 0;$$

$$H2.\ \ \alpha_i, \beta_i \in C^1[0,T],$$

$$H3.\ \ \alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0,\ \ \alpha_1(t) < 0,\ \ \beta_2(t) > 0,\ \ \forall t \in [0,T];$$

$$H4.\ \ \alpha_1(t)\xi_1^2 - 2\alpha_2(t)\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 > 0,\ \ \forall t \in [0,T];$$

$$\alpha_1'(t)\xi_1^2 - 2\alpha_2'(t)\xi_1\xi_2 - \beta_2'(t)\xi_2^2 > 0,\ \ \forall t \in [0,T],$$

$$H5.(\alpha_1' - \alpha_1)\xi_1^2 - 2(\alpha_2' - \alpha_2)\xi_1\xi_2 - (\beta_2' - \beta_2)\xi_2^2 \leqslant 0,\ \ \forall t \in [0,T],$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3).

Доказательство. Заметим, что в силу условий теоремы 1 найдутся числа

$$K > 0,\ \ K_1 > 0,\ \ a_0 > 0,\ \ a_1 > 0,\ \ c_0 > 0$$

такие, что

$$\max_{[0,T]} |\alpha_i(t),\ \ \beta_i(t), \alpha_i'(t),\ \ \beta_i'(t)| \leqslant K,\ \ \max_{\bar{Q}_T} |c(x,t)| \leqslant c_0,$$

$$a(x,t) \geqslant a_0,\ \ \max_{\bar{Q}_T} |a(x,t), a_t(x,t)| \leqslant a_1,$$

$$\int_0^T \int_0^l f^2 dxdt \leqslant K_1.$$

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Сначала с помощью метода Галеркина построим последовательность приближенных решений. На следующем этапе выведем априорные оценки приближенных решений. Полученные оценки позволят выделить слабо сходящиуюся подпоследовательности из последовательности приближенных решений. Затем мы покажем, что предел этой подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение. На заключительном этапе докажем его единственность.

Существование. Для доказательства существования обобщенного решения построим сначала последовательность приближенных решений при помощи метода Галеркина.

Будем искать приближенное решение поставленной задачи (1.1)-(1.3) в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x), \tag{2.2}$$

где $\{w_k(x)\}_1^\infty$ - линейно независимая и полная в $W_2^1(0,l)$ система функций, в которой $w_k(x) \in C^2[0,l]$, из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j)dx+$$

$$+w_j(0)[(\alpha_1(t)u_t^m(0,t))_t + (\beta_1(t)u_t^m(l,t))_t]- \tag{2.3}$$

$$-w_j(l)[(\alpha_2(t)u_t^m(0,t))_t + (\beta_2(t)u_t^m(l,t))_t] = \int_0^l f(x,t)w_j dx.$$

Подставив (2.2) в (2.3), получим

$$\sum_{k=1}^{m}[A_{kj}c_k''(t)+B_{kj}c_k'(t)+D_{kj}c_k(t)=f_j(t), \tag{2.4}$$

где

$$f_j(t)=\int_0^l f(x,t)w_j(x)dx,$$

$$A_{kj}(t)=\int_0^l w_k(x)w_j(x)dx+\alpha_1(t)w_k(0)w_j(0)+\beta_1(t)w_k(l)w_j(0)-$$
$$-\alpha_2(t)w_k(0)w_j(l)-\beta_2(t)w_k(l)w_j(l),$$
$$B_{kj}(t)=\alpha_1'(t)w_k(0)w_j(0)+\beta_1'(t)w_k(l)w_j(0)-$$
$$-\alpha_2'(t)w_k(0)w_j(l)-\beta_2'(t)w_k(l)w_j(l),$$
$$D_{kj}(t)=\int_0^l a(x,t)w_k'(x)w_j'(x)+c(x,t)w_k(x)w_j(x)dx.$$

Добавив начальные условия

$$c_k(0)=c_k'(0)=0, \tag{2.5}$$

приходим к задаче Коши для системы (2.4).

Для доказательства существования решения задачи Коши покажем сначала, что систему (2.4) можно разрешить относительно $c_k''(t)$. Рассмотрим квадратичную форму $q=\sum_{k,j=1}^m A_{kj}\xi_k\xi_j$ и убедимся в том, что матрица $A=(A_{kj})_{k,j=1}^m$ положительно определена. Использовав выражение коэффициентов A_{kj}, получим следующее представление квадратичной формы:

$$q=\sum_{k,j=1}^{m}\int_0^l w_k(x)w_j(x)\xi_k\xi_j dx+\alpha_1(t)w_k(0)w_j(0)\xi_k\xi_j+$$
$$+\beta_1(t)w_k(l)w_j(0)\xi_k\xi_j-\alpha_2(t)w_k(0)w_j(l)\xi_k\xi_j-\beta_2(t)w_k(l)w_j(l)\xi_k\xi_j.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$q=\int_0^l|\xi|^2dx+\alpha_1(t)|\xi(0)|^2+(\beta_1(t)-\alpha_2(t))|\xi(0)||\xi(l)|-\beta_2(t)|\xi(l)|^2,$$

где $\xi=\sum_{k=1}^m w_k\xi_k$.

Из условий Н3 и Н4 теоремы следует

$$q=\int_0^l|\xi|^2dx+\alpha_1(t)|\xi(0)|^2+2\beta_1(t)|\xi(0)||\xi(l)|-\beta_2(t)|\xi(l)|^2>0.$$

Следовательно, система (2.4) разрешима относительно старших производных и задача (2.4), (2.5) эквивалентна задаче Коши с условием $c_k(0)=0$ для системы уравнений первого порядка:

$$(I-\tilde{B})C'(t)=\tilde{A}C(t)+\tilde{F}(t), \tag{2.6}$$

где $C(t)=(c_1'(t),..c_m'(t))$, $B=(B_{kj})_{k,j=1}^m$ - матрица из коэффициентов при $c_k'(t)$ в (2.4), матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{F}$ - результат разрешения (2.4) относительно $c_k''(t)$, $\tilde{B}=A^{-1}B$. Если $det(I-\tilde{B})\neq 0$, то систему (2.6) сведем к системе интегральных уравнений

$$C(t)=\int_0^t KC(\tau)d\tau+\int_0^t F(\tau)d\tau,$$

где $K=(I-\tilde{B})^{-1}\tilde{A}$, $F=(I-\tilde{B})^{-1}\tilde{F}$, которая однозначно разрешима при выполнении условий теоремы. Если же $det(I-\tilde{B})=0$, то после элементарных преобразований мы придем к системе алгебраических уравнений относительно $c_k(t)$. Заметим, что в последнем случае условие $c_k(0)=0$ будет выполнено в силу требования теоремы $f(x,0)=0$.

Итак, в силу разрешимости задачи (2.4), (2.5) последовательность приближенных решений задачи (1.1)-(1.3) построена.

Следующим шагом доказательства является обоснование возможности выделить из нее слабо сходящуюся подпоследовательность, а затем возможности перехода к пределу в (2.3). Для этого нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и переходим.

Априорная оценка Умножим (2.3) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. В результате получим:

$$\int_0^\tau\int_0^l(u_{tt}^m u_t^m+a(x,t)u_{xt}^m u_x^m+c(x,t)u^m u_t^m)dxdt+ \tag{2.7}$$

$$+\int_0^\tau u_t(0,t)[\alpha_1(t)u^m_{tt}(0,t)+\alpha_1'(t)u^m_t(0,t)+\beta_1(t)u^m_{tt}(l,t)+\beta_1'(t)u^m_t(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^\tau u_t(l,t)[\alpha_2(t)u^m_{tt}(0,t)+\alpha_2'(t)u^m_t(0,t)+\beta_2(t)u^m_{tt}(l,t)+\beta_2'(t)u^m_t(l,t)]dt=$$

$$=\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u^m_t dxdt.$$

Интегрируя по частям (2.7) и учитывая условие H3, получим

$$1.\int_0^\tau\int_0^l [u^m_{tt}u^m_t + au^m_{xt}u^m_x]dxdt= \tag{2.8}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l((u^m_t)^2+(au^m_x)^2)dx-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(a_tu^m_x)^2dxdt;$$

$$2.\int_0^\tau \alpha_1(t)u^m_{tt}(0,t)u^m_t(0,t)dt= \tag{2.9}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha_1(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-\frac{1}{2}\int_0^\tau\alpha_1'(t)(u^m_t(0,t))^2dt;$$

$$3.\int_0^\tau \alpha_2(t)u^m_{tt}(0,t)u^m_t(l,t)dt=\int_0^\tau\alpha_2(t)u^m_t(0,t)u^m_{tt}(l,t)dt+ \tag{2.10}$$

$$+\int_0^\tau\alpha_2'(t)u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt-\alpha_2(\tau)u^m_t(l,\tau)u^m_t(0,\tau);$$

$$4.-\int_0^\tau\beta_2(t)u^m_{tt}(l,t)u^m_t(l,t)dt= \tag{2.11}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\tau\beta_2'(u^m_t(l,t))^2dt-\frac{1}{2}\beta_2(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2.$$

Тогда из (2.7)следует:

$$\frac{1}{2}\int_0^l[(u^m_t(x,\tau))^2+a(x,\tau)(u^m_x(x,\tau))^2]dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(a_tu^m_x)^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt+$$

$$\frac{1}{2}\alpha_1(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-\alpha_2(\tau)u^m_t(l,\tau)u^m_t(0,\tau)-\frac{1}{2}\beta_2(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau[\alpha_1'(u^m(0,t))^2dt-\int_0^\tau\alpha_2'(t)u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\beta_2'(u^m_t(l,t))^2dt=$$

$$=\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u^m_t dxdt.$$

Используя условия H4 и H5 теоремы, неравенство Коши:

$$\int_0^\tau\int_0^l|fu^m_t|dxdt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(u^m_t)^2dxdt,$$

и воспользовавшись неравенством

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx\leqslant\tau\int_0^\tau\int_0^l u_t^2dxdt,$$

которое следует из представления

$$u(x,\tau)dx=\tau\int_0^\tau u_tdxdt,$$

получим

$$\int_0^l[(u^m_t(x,\tau))^2+(u^m_x(x,\tau))^2+(u^m(x,\tau))^2]dx+ \tag{2.12}$$

$$+\alpha_1(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-2\alpha_2(\tau)u^m_t(l,\tau)u^m_t(0,\tau)-\beta_2(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2\leqslant$$

$$\leqslant c_3\int_0^\tau\int_0^l[(u^m_t)^2+(u^m_x)^2+(u^m)^2]dxdt+$$

$$+\int_0^\tau[\alpha_1(u^m(0,t))^2dt-2\alpha_2(t)u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt-\beta_2(u^m_t(l,t))^2dt+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt,$$

где $c_3=\frac{c_1}{c_2}$, $c_1=\min\{1,a_0\}$, $c_2=\max\{a_1,c_0,c\}$.

К (2.12) применим лемму Гронуолла, что приводит к неравенству

$$\int_0^l[(u_t^m(x,\tau))^2+(u_x^m(x,\tau))^2+(u^m(x,\tau))^2]dx+$$
$$+\alpha_1(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2-2\alpha_2(\tau)u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)-\beta_2(\tau)(u_t^m(l,\tau))^2\leqslant$$
$$\leqslant e^{c_3\tau}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt.$$

Проинтегрировав по t от 0 до τ, получим

$$||u||^2_{W_2^1(Q)}+\int_0^\tau[\alpha_1(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2- \tag{2.13}$$
$$-2\alpha_2(\tau)u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)-\beta_2(\tau)(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant p,$$

где $p=\frac{1}{c_3}(e^{c_3T}-1)||f||^2_{L_2(Q_T)}$.

Из (2.13) в частности

$$||u^m||^2_{W_2^1(Q_T)}\leqslant p, \tag{2.14}$$

$$\int_0^\tau[\alpha_1(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2-\beta_2(\tau)(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant \tag{2.15}$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau\alpha_2(\tau)u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)dt+p.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma\int_0^\tau[(u_t^m(0,\tau))^2+(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant K\int_0^\tau[(u_t^m(0,\tau))^2+(u_t^m(l,\tau))^2]dt+p,$$

если $\alpha_1\geqslant\gamma>0$, $-\beta_2\geqslant\gamma>0$, а так же $\gamma-|\alpha_2|>0$, то

$$\int_0^\tau[(u_t^m(0,\tau))^2+(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant\frac{p}{\gamma-K}.$$

Это означает, что справедливо

$$||u_t||^2_{\Gamma_0}\leqslant p_1,\ \ ||u_t||^2_{\Gamma_l}\leqslant p_1. \tag{2.16}$$

Полученные оценки (2.14) и (2.16) позволяют утверждать, что $||u^m||^2_{W(Q_T)}\leqslant p$. то означает, что из построенной последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ к некоторой $u\in W(Q_T)$. Покажем, что этот предел и есть искомое обобщенное решение. Для этого докажем справедливость тождества (2.1). Умножим каждое из соотношений (2.3) на $\delta_l(t)\in W_2^1(0,t),\delta_l(T)=0$; обозначим $\eta(x,t)=\sum_{l=1}^m\delta_l(t)w_l(x)$. Полученные равенства просуммируем по l от 1 до m и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T\int_0^l(u_{tt}^m\eta+u_x^m\eta_x+cu^m\eta)dxdt+$$
$$+\int_0^T\eta(0,t)[(\alpha_1(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_1(t)u_t^m(l,t))_t]dt-$$
$$-\int_0^T\eta(l,t)[(\alpha_2(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_2(t)u_t^m(l,t))_t]dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt.$$

Проинтегрируем первое слагаемое в интеграле слева, получим

$$\int_0^T\int_0^l(-u_t^m\eta_t(x,t)+u_x^m\eta_x+cu^m\eta)dxdt+\int_0^l u_t^m(x,0)\eta(x,0)dx+$$
$$+\int_0^T\eta(0,t)[(\alpha_1(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_1(t)u_t^m(l,t))_t]dt-$$
$$-\int_0^T\eta(l,t)[(\alpha_2(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_2(t)u_t^m(l,t))_t]dt= \tag{2.17}$$

$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt.$$

Зафиксировав в (2.17) $\eta(x,t)$, перейдем к пределу и увидим, что тождество (2.1) выполняется для предельной функции $u(x,t)$. Однако еще нельзя утверждать, что $u(x,t)-$ искомое обобщенное решение, так как тождество (2.1) пока выполняется не для всех функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, а только для функций вида $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m \delta_j(t)w_j(x)$. Но множество всех таких функций плотно в $\hat{W}_2^1(Q_T)$ (см.[4], с.215), поэтому утверждение о существовании решения задачи из пространства $W_2^1(Q_T)$ доказано полностью.

Единственность. Предположим, что существует два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1.1)-(1.3). Тогда $u = u_1 - u_2$ - решение соответствующей однородной задачи. Это означает, что $u(x,0) = 0$ и выполняется тождество (2.1) с $f(x,t) = 0$:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt+$$
$$+\int_0^T v_t(0,t)[\alpha_1(t)u_t(0,t) + \beta_1(t)u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(l,t)[\alpha_2(t)u_t(0,t) + \beta_2(t)u_t(l,t)]dt = 0. \tag{2.18}$$

Положим в тождестве (2.18)

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Выбранная таким образом функция принадлежит пространству $\hat{W}_2^1(Q_T)$. Заметим, что $v_t(x,t) = u(x,t)$.

Проинтегрируем по частям (2.18)

$$-\int_0^\tau \alpha_1 u(0,t)u_t(0,t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1' u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\alpha_1 u^2(0,t);$$
$$\int_0^\tau \alpha_2 u(0,t)u_t(l,t)dt = \alpha_2 u(0,t)u(l,t)-$$
$$-\int_0^\tau \alpha_2 u(0,t)u_t(l,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2' u(0,t)u(l,t)dt;$$
$$\int_0^\tau \beta_2 u(l,t)u_t(l,t)dt = \frac{1}{2}\beta_2 u^2(l,t) - \int_0^\tau \beta_2' u^2(l,t).$$

Применяя условия Н3, получаем

$$-\frac{1}{2}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx + \int_0^T \int_0^l cv_t v dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^l a_t v_x^2 dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1' u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_2 u^2(l,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2' u(0,t)u(l,t)dt-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_1 u^2(0,t) + \frac{1}{2}\beta_2 u^2(l,t) + \alpha_2 u(0,t)u(l,t) = 0.$$

Сделаем следующую оценку:

$$|\int_0^\tau \int_0^l cvv_t dxdt| \leqslant \frac{c_0}{2}\int_0^\tau \int_0^l [v^2 + v_t^2]dxdt.$$

Из представления функции $v(x,t)$ следует неравенство:

$$\int_0^\tau \int_0^l v^2 dxdt \leqslant \tau^2 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt.$$

Учитывая, что $a(x,t) > 0$ всюду в $\overline{Q}_T$, а также принимая во внимание Н4, получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + av_x^2(x,\tau)]dx + \alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t) \leqslant$$
$$\leqslant c_0 \int_0^\tau \int_0^l [v^2 + v_t^2]dxdt + a_1 \int_0^\tau \int_0^l [v_x^2]dxdt+$$
$$+\int_0^\tau [\alpha_1' u^2(0,t) - 2\alpha_2' u(0,t)u(l,t) - \beta_2' u^2(l,t)]dt.$$

Положим $w(x,t) = \int_0^t v_x(x,\eta)d\eta$. Нетрудно видеть, что

$$v_x(x,t) = -w(x,t) + w(x,\tau), \;\; v_x(x,0) = w(x,\tau).$$

Тогда

$$\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt = \int_0^\tau \int_0^l [w^2(x,t) - 2w(x,t)w(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dxdt.$$

Оценив интеграл справа и применив неравенство Коши, получим

$$\int_0^\tau \int_0^l v_l^2(x,t)dxdt = \frac{2}{\epsilon}\int_0^\tau \int_0^l w^2(x,t)dxdt + 2\epsilon\int_0^\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dxdt.$$

Так как $\int_0^\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dxdt = \tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx$, то выбрав ϵ так чтобы $a_0 - 2a_1\epsilon \geqslant \frac{a_0}{2} > 0$, получим

$$m_0\int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx + \alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t) \leqslant$$

$$\leqslant c_1\int_0^\tau \int_0^l [w^2 + u^2]dxdt + \int_0^\tau [\alpha_1' u^2(0,t) - 2\alpha_2' u(0,t)u(l,t) - \beta_2' u^2(l,t)]dt,$$

где $m_0 = \min\{1, \frac{a_0}{2}\}$. В силу Н5, имеем

$$\int_0^\tau [\alpha_1' u^2(0,t) - 2\alpha_2' u(0,t)u(l,t) - \beta_2' u^2(l,t)]dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau [\alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t)]dt.$$

Тогда

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx + \alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t) \leqslant$$

$$\leqslant c_2(\int_0^\tau \int_0^l [w^2 + u^2]dxdt + \int_0^\tau [\alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t)]dt),$$

где $c_2 = \max\{c_1, 1\}$.

Применив к этому неравенству лемму Гронуолла, получаем

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx + \alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t) \leqslant 0.$$

Откуда приходим к утверждению $u(x,t) \equiv 0$. Это означает, что существует не более одного решения поставленной задачи.

Литература

[1] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на часим границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. №2(23). С. 7–14.

[2] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 120 с.

[3] Дюжева А.В. Задача с динамическими условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. №2(23). С. 7–14.

[4] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

[5] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 2006. №8(42). С. 1072–1077.

[6] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. №4(86). С. 56–64.

[7] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.:Наука,1983.

[8] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 42 с.

References

[1] Beylin A.B., Pulkina L.S *Zadacha o kolebaniiakh sterzhnia s neizvestnym usloviem ego zakrepleniia na chasim granitsy* [A problem on vibration of a bar with unknown boundary condition on a part of the boundary]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural science Series], 2017, № 2(23), pp. 7–14 [in Russian].

[2] Gording L. *Zadacha Koshi dlia giperbolicheskikh uravnenii* [The Cauchy problem for hyperbolic equations]. M.: Izd-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. [in Russian].

[3] Dyuzheva A.V. *Zadacha s dinamicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Problem with time-dependent boundary conditions for hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural science Series], 2017, № 2(23), pp. 7–14 [in Russian].

[4] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[5] Lazhetich N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka* [On classical solvability of a mixed problem for one-dimensional hyperbolic equation of the second order]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, no. 42(8), pp. 1072–1077 [in Russian].

[6] Pulkina L.S., Dyuzheva A.V. *Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal problem with Steklov's time-varying boundary conditions for a hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural science Series], 2010, no. 4(86), pp. 56–64 [in Russian].

[7] Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1983 [in Russian].

[8] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 2004, 798 p. [in Russian].

A.V. Duyzheva[2]

NONLOCAL PROBLEM WITH DYNAMICAL BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this article, we consider a boundary-value problem with nonlocal dynamical conditions for hyperbolic equation. A feature of such conditions is the presence of both first and second order derivatives with respect to time-variable. Furthermore, boundary conditions are nonlocal to the extent that their representation is a relation between values of the derivatives on different parts of the boundary. The problem under consideration arise when we study vibration of a bar with damping and point masses. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved. The proof is based on apriori estimates and Galerkin procedure.

Key words: nonlocal problem, nonlocal dynamical conditions, hyperbolic equation, generalized solution, second order derivatives, bar with damping, apriori estimates, Galerkin procedure.

Статья поступила в редакцию 28/*VII*/2017.
The article received 28/*VII*/2017.

[2] *Duzheva Alexandra Vladimirovna* (aduzheva@rambler.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.