УДК 517.95, 624.07 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-12-17

А.Б. Бейлин[1]

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЕМ ОДНОГО ИЗ КОНЦОВ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ

В статье рассматривается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня, жестко закрепленного на одном конце. Режим возможных смещений второго конца неизвестен и подлежит определению. Условие переопределения задается в виде интеграла по пространственной переменной. В статье показано, что для нахождения решения задача может быть сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. В качестве иллюстрации рассмотрен пример, позволяющий выписать ядро интегрального уравнения в явном виде.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, колебания тонкого стержня, обратная задача, интегральное условие переопределения.

Введение

Исследованиям математических моделей колебательных процессов различной природы посвящено большое количество работ. Отметим здесь лишь некоторые из них, наиболее близкие к содержанию настоящей статьи [1–4]. Интерес к этой тематике вызван прежде всего тем, что колебательные процессы возникают в различных механических системах [5–8]. Для того чтобы обеспечить надежную работу сложной современной техники в процессе ее эксплуатации необходим контроль, который производят с помощью диагностических процедур. Однако приборы диагностики не всегда можно установить в непосредственном контакте с исследуемым объектом. Следовательно, возникает необходимость осуществлять диагностику на основе косвенных данных. С другой стороны, во избежание непредвиденных ситуаций нужно уметь управлять процессом и до проведения испытаний реального объекта знать допустимые интервалы значений входных данных. Например, как нужно закрепить концы стержня, чтобы его колебания не выводили систему из заданного режима. В связи с этим и возникают задачи об управлении колебаниями, которые также называют обратными задачами математической физики [9–12].

В статье [13] рассмотрена обратная задача определения краевого условия задачи для гиперболического уравнения и доказана ее однозначная разрешимость. Но для практических целей удобно иметь формулы, позволяющие найти решение в явном виде, что возможно крайне редко, либо получить возможность нахождения приближенных решений.

В предлагаемой статье рассматривается обратная задача для уравнения колебаний струны, которое является частным случаем уравнения, изученного в [13], и показывается, как можно определить режим допустимых смещений правого конца тонкого стержня при заданной энергии. Все известные входные данные взяты в максимально простом виде, что не ограничивает общности, но дает возможность наглядно продемонстрировать предложенный метод. Опираясь на известные методы решения смешанных задач для уравнения колебаний струны, исследуемая обратная задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра относительно искомой функции, играющей роль краевого условия на правом конце.

1. Постановка задачи.

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим задачу о колебании стержня, один конец которого, $x = 0$, жестко закреплен, а закон движения второго конца, $x = l$, не задан и подлежит определению. Таким образом, мы приходим к обратной задаче, которая заключается в следующем: найти пару функций $(u(x,t), h(t))$, обладающих свойствами

$$u \in C^1(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T), \quad h \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T),$$

[1]© Бейлин А.Б., 2017

Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

удовлетворяющих уравнению

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{1.1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$

краевым условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = h(t) \tag{1.3}$$

и условию переопределения, в качестве которого часто задается интегральное среднее искомого решения [10; 11]

$$\int_0^l K(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{1.4}$$

Заметим, что однородность начальных данных не ограничивает общности, но упрощает многие преобразования.

Задача (1.1)—(1.4) может быть трактована как задача управления, а именно, как задача определения таких условий на входные данные, а именно, функцию $h(t)$, позволяющую сохранить заданную энергию $E(t)$.

2. Разрешимость задачи.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$a > 0, \quad f, f_{tt} \in C(\bar{Q}_T),$$
$$K \in C[0,l], \;\; K(l) \neq 0, \;\; K(0) = 0, E \in C^2[0,T],$$

а также условия согласования $E(0) = E'(0) = 0$. Очевидно, что искомая функция $h(t)$ должна удовлетворять условиям $h(0) = h'(0) = 0$.

Прежде всего получим соотношение между $h(t)$ и $u(x,t)$, которое в дальнейшем и приведет к желаемому результату.

Пусть (u,h) — решение задачи (1.1)—(1.4), $K(l) \neq 0$ Проинтегрируем равенство (1.1), умноженное на $K(x)$, по промежутку $(0,l)$. Учитывая условия (1.3) и (1.4), получим после элементарных преобразований

$$h(t) = \frac{E''(t)}{a^2K(l)} + \frac{K'(l)}{K(l)}u(l,t) -$$
$$-\frac{1}{a^2K(l)}\int_0^l K''(x)u(x,t)dx - \frac{1}{a^2K(l)}\int_0^l K(x)f(x,t)dx. \tag{2.5}$$

Теперь видно, что найдя $u(x,t)$ как решение прямой задачи (1.1)—(1.3), где $h(t)$ считаем временно известной, мы можем рассчитывать, что найдем $h(t)$ из соотношения (2.5). Нашей ближайшей целью является обоснование возможности реализовать описанную схему и получить таким образом решение задачи (1.1)—(1.4). В качестве первого шага мы рассмотрим прямую задачу (1.1)—(1.3). Так как второе из краевых условий (2.5) неоднородно, то для того чтобы воспользоваться методом разделения переменных перейдем к задаче с однородными условиями, введя новую неизвестную функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - xh(t).$$

Действительно, теперь нам нужно найти функцию $v(x,t)$ как решение следующей задачи

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - xh''(t), \tag{2.6}$$
$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \tag{2.7}$$
$$v(0,t) = 0, \quad v_x(0,t) = 0. \tag{2.8}$$

Применив метод разделения переменных, полагая $v(x,t) = X(x)T(t)$, легко находим собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}.$$

Так как начальные и граничные условия нулевые, то единственное решение однородного уравнения тривиально. Поэтому сразу переходим к нахождению решения неоднородного уравнения (2.6). Введем еще некоторые упрощения исключительно для наглядности и не ограничивая общности, а именно, пусть $f(x,t) = 0$, $K(x) = x^2$. Итак, решение задачи (2.6)—(2.8) ищем в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}, \tag{2.9}$$

где $V_n(t)$ подлежат определению и должны удовлетворять условиям

$$V_n(0) = V_n'(0) = 0$$

для того чтобы начальные условия (2.7) были выполнены для $v(x,t)$. Заметим, что выполнение граничных условий гарантируют собственные функции $X_n(x)$. Подставив (2.9) в (2.6), приходим к задаче Коши:

$$V_n''(t) + \omega_n^2 V_n(t) = h_n(t), \quad V_n(0) = V_n'(0) = 0, \tag{2.10}$$

где $\omega_n = \frac{\pi(1+2n)a}{2l}$, $h_n(t)-$ коэффициенты Фурье функции $-xh''(t)$. Решение этой задачи, как известно, выражается формулой

$$V_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t h_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau. \tag{2.11}$$

Найдем коэффициенты Фурье функции $-xh''(t)$:

$$h_n(t) = -h''(t)\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}dx = \frac{(-1)^{n+1}4l^2h''(t)}{\pi^2(1+2n)^2}.$$

Теперь решение задачи Коши можно записать так:

$$V_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\frac{(-1)^{n+1}4l^2}{\pi^2(1+2n)^2}\int\limits_0^t h''(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau. \tag{2.12}$$

Тогда, подставив в полученную формулу $\omega_n = \frac{\pi(1+2n)a}{2l}$, получим решение задачи (2.6)—(2.8)

$$v(x,t) = \frac{8l^3}{\pi^3 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2n)^3}\int\limits_0^t h''(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}. \tag{2.13}$$

Сходимость этого ряда не вызывает сомнений. Однако мы по-прежнему рассматриваем функцию $h(t)$ как известную. Приступим теперь к нахождению этой функции, применив к решению (2.13) условие переопределения, представленное в виде (2.5). Предварительно сделаем некоторые преобразования.

Проинтегрировав дважды по частям правую часть формулы (2.12), получим

$$\int\limits_0^t h''(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau = \omega_n h(t) - \omega_n^2\int\limits_0^t h(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau.$$

Тогда (2.13) примет вид

$$v(x,t) = \frac{16l^2}{a\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1+2n)^3}[\omega_n h(t) -$$

$$-\omega_n^2\int\limits_0^t h(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau]\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x. \tag{2.14}$$

Обратимся к формуле (2.5) и подставим в нее найденное решение $u(x,t) = v(x,t) + xh(t)$ где $v(x,t)$ определяется равенством (2.14). После элементарных преобразований получим

$$\frac{1-a^2}{a^2}h(t) = \frac{E''(t)}{a^2l^2} + \frac{2}{l}v(l,t) - \frac{2}{a^2l^2}\int\limits_0^l v(x,t)dx. \tag{2.15}$$

Подставив в эту формулу найденное решение $v(x,t)$, мы придем к интегральному уравнению относительно $h(t)$, ядро которого представлено в виде ряда. Однако при некоторых дополнительных ограничениях можно получить явное представление ядра, что и будет показано.

Пусть $T \leqslant \frac{l}{a}$. Тогда можно эффективно воспользоваться следующими формулами [14]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \quad (0.234(2,4)),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi, \quad (1.442(1)),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\frac{\pi}{4}x,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad (1.444(5)).$$

Учтя эти формулы и вычислив $\int_0^l \sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}dx=\frac{2l}{\pi(1+2n)}$, получим

$$v(l,t)=a\int\limits_0^t h(\tau)d\tau-lh(t),$$

$$\int\limits_0^l v(x,t)dx=-\frac{l^2}{2}h(t)+\frac{8al}{\pi^2}\int\limits_0^t h(\tau)\left[\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{2l}+\frac{\pi^2 a}{8l}(t-\tau)\right]d\tau.$$

Подставив полученные выражения в (2.14), приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$h(t)-\int\limits_0^t H(t,\tau)h(\tau)d\tau=g(t), \tag{2.16}$$

где обозначено

$$H(t,\tau)=a+\frac{16}{al\pi^2}\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{2l}+\frac{2}{l^2}(t-\tau),$$

$$g(t)=\frac{E''(t)}{a^2l^2}.$$

Уравнение (2.16) в силу ограниченности ядра однозначно разрешимо [15]. Существование производных функции $h(t)$ вытекает из свойств $E(t)$ и гладкости ядра.

Подводя итоги проведенным исследованиям, сформулируем полученный результат.

Если выполнены условия

$$a>0,\quad f,f_{tt}\in C(Q_T),$$

$$K\in C[0,l],\ \ K(l)\neq 0,\ \ K(0)=0, E\in C^3[0,T]\cap C^4(0,T),$$

а также условия согласования $E(0)=E'(0)=0$, то в области Q_T существует единственное решение задачи (1.1)—(1.4). В частном случае, $f=0$, $K(x)=x^2$, $T\leqslant\frac{l}{a}$, интегральное уравнение, определяющее режим смещений правого конца стержня, принимает простой вид, пригодный для применения приближенных методов его решения.

Литература

[1] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992. 431 с.

[2] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // Доклады РАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.

[3] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3(114). С. 9–19.

[4] Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях упруго закреплённого нагруженного стержня // Вестник Самарского гос. Тех. Ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 2. С. 249–258.

[5] Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

[6] Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределёнными параметрами: Учеб. пособие. Самара: Самар. Госуд. Аэрокосмич. Ун-т, 2002. 80 с.

[7] Вейц В.Л., Дондошанский В.К., Чиряев В.И. Вынужденные колебания в металлорежущих станках. М-Л.: Машгиз, 1959 288 с.

[8] Кумабэ Д. Вибрационное резание. М.: Машиностроение, 1985. 424 с.

[9] Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 35. № 5. С. 692–704.

[10] Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. 94(2). С. 207–217.

[11] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems. 1988. № 4. P. 35–45.

[12] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1.

[13] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным режимом на части границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 2.

[14] Градштейн В.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.

[15] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

References

[1] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992, 431 p. [in Russian].

[2] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia* [Theory of free vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *Doklady RAN* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].

[3] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A Problem on Longitudinal Vibration in a Short Bar with Dynamical Boundary Conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[4] Beylin A.B. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh uprugo zakreplennogo nagruzhennogo sterzhnia* [Task on longitudinal vibration of an elastic attached loaded rod]. *Vestnik Samarskogo gos. Tekh. Un-ta. Seriia: Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2016, Vol. 20, no. 2, pp. 249–258 [in Russian].

[5] Babakov I.M. *Teoriia kolebanii* [Theory of vibrations]. M.: Nauka, 1968, 560 p. [in Russian].

[6] Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniia sistem s raspredelennymi parametrami: Ucheb. posobie* [Mechanical oscillations of systems with distributed parameters: textbook]. Samara: Samar. Gosud. Aerokosmich. Un-t, 2002, 80 p. [in Russian].

[7] Veiz V.L., Dondoshansky V.K., Chiriaev V.I. *Vynuzhdennye kolebaniia v metallorezhushchikh stankakh* [Forced oscillations in metal-cutting machines]. M-L.: Mashgiz, 1959, 288 p. [in Russian].

[8] Kumabe D. *Vibratsionnoe rezanie* [Vibration Cutting]. M.: Mashinostroenie, 1985, 424 p. [in Russian].

[9] Ilin V.A., Tikhomirov V.V. *Volnovoe uravnenie s granichnym upravleniem na dvukh kontsakh i zadacha o polnom uspokoenii kolebatel'nogo protsessa* [The wave equation with boundary control at two ends and the problem of complete damping of a vibration process]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 1990, Vol. 35, no. 5, pp. 692–704 [in Russian].

[10] Kamynin V.L. *Obratnaia zadacha opredeleniia mladshego koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabliudeniia* [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equation with integral observation]. *Matem. zametki* [Mathematical notes], 2013, **94(2)**, pp. 207–217 [in Russian].

[11] Cannon J.R., Lin Y. *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems*, 1988, no. 4, pp. 35–45 [in English].

[12] Denisov A.M. *Obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nym kraevym usloviem, soderzhashchim zapazdyvaiushchii argument* [The inverse problem for a hyperbolic equation with nonlocal boundary condition involving retarding argument]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics. Ural Branch of Russian Academy of Sciences], 2012, Vol. 18, no. 1 [in Russian].

[13] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o kolebaniiakh sterzhnia s neizvestnym rezhimom na chasti granitsy* [On Certain Problem for Hyperbolic Equation with unknown behavior on a part of the boundary]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2017, no. 2, pp. 9–19 [in Russian].

[14] Gradstein V.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series, and products]. M: Fizmatgiz, 1963, 1100 p. [in Russian].

[15] Mikhlin S.G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam* [Lectures on linear integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1959, 232 p. [in Russian].

A.B. Beylin[2]

ON CERTAIN CONTROL PROBLEM OF DISPLACEMENT AT ONE ENDPOINT OF A THIN BAR

In this paper, we study an inverse problem for hyperbolic equation. This problem arises when we consider vibration of a thin bar if one endpoint is fixed but behavior of the other is unknown and is the subject to find. Overdetermination is given in the form of integral with respect to spacial variable. The problem is reduced to the second kind Volterra integral equation. Special case is considered.

Key words: hyperbolic equation, vibration of a thin bar, inverse problem, integral overdetermination.

Статья поступила в редакцию 28/ V/2017.
The article received 28/ V/2017.

[2] *Beylin Alexander Borisovich* (abeilin@mail.ru), Department of Automated Machining and Tool Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeiskaya str., Samara, 443010, Russian Federation.