

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 621.373.12, 517.938

В.В. Зайцев, А.Н. Шилин¹ОТОБРАЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДЮФФИНГА
В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

В работе описан переход к дискретному времени в уравнении движения генератора ван дер Поля – Дюффинга. Цель перехода – сформировать отображения генератора, как объекты теории нелинейных колебаний (нелинейной динамики) в дискретном времени. Метод дискретизации основан на использовании отсчетов импульсной характеристики колебательного контура в качестве дискретизирующей последовательности для сигнала в генераторном кольце “активная нелинейность – резонатор – обратная связь”. Выбор последовательной схемы возбуждения контура позволяет получить итерированные отображения в виде рекуррентных формул. Представлены две эквивалентные формы дискретных отображений генератора ван дер Поля – Дюффинга – комплексная и действительная. В приближении медленно меняющихся амплитуд подтверждено, что сформированные дискретные отображения обладают динамическими свойствами аналогового прототипа. Вместе с тем, в рамках численного эксперимента показано, что при высоких уровнях возбуждения на динамику дискретных автогенераторов существенно влияет эффект подмены частот гармоник генерируемого дискретного сигнала. В частности, в дискретном генераторе ван дер Поля – Дюффинга наблюдаются режимы генерации хаотических автоколебаний.

Ключевые слова: автоколебательная система, импульсная характеристика, дискретное отображение, метод медленно меняющихся амплитуд, хаотические автоколебания.

Введение

В теории нелинейных колебаний генератор (осциллятор) ван дер Поля – автоколебательная система на основе высокочастотного резонатора с кубической нелинейностью в цепи положительной обратной связи – служит универсальной моделью систем различной физической природы [1; 2]. Одно из обобщений модели – генератор ван дер Поля – Дюффинга, позволяет учесть дополнительные свойства реальных автоколебаний (в частности, неизохронность) [3; 4]. Ввиду того, что современная теория рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ) представляет интерес временная дискретизация в математической модели, т.е. переход к дискретному отображению осциллятора.

Переход к дискретному времени в математических моделях линейных НВ-систем широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [5]. Помимо решения прикладных задач, такой подход позволяет ввести в рассмотрение колебательные ДВ-системы как объекты исследования теории колебаний. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени. Это утверждение справедливо для линейных систем [5] и тем более относится к системам, содержащим нелинейности. Например, в [6] представлено так называемое универсальное отображение, получаемое введением дельта-импульсов в гамильтониан системы. Более традиционные способы основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем. В статье [7] (см. также [8]) дискретизация проведена методом Эйлера. Отмечено, что полученные таким образом отображения наследуют основные черты аналоговых прототипов, но и приобретают новые свойства.

¹© Зайцев В.В., Шилин А.Н., 2017

Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@samsu.ru), кафедра радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

Шилин Александр Николаевич (shilax@mail.ru), кафедра радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

В настоящей работе дискретизацию времени в модели генератора ван дер Поля – Дюффинга предлагается провести с использованием дискретизирующей последовательности в виде отсчетов импульсной характеристики резонатора, входящего в состав генератора. При этом сохраняется линейный отклик системы на внешнее воздействие. Показано, что сформированные при таком подходе дискретные отображения в квазигармоническом приближении воспроизводят характеристики аналоговых генераторов.

1. Структурный синтез АКС

Аналоговый прототип — генератор ван дер Поля – Дюффинга в непрерывном времени описывается уравнением движения вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0 \gamma (1 - y^2) \frac{dy}{dt} + \mu \omega_0^2 y^3, \quad (1.1)$$

где ω_0 и Q — собственная частота и добротность резонансного контура АКС, γ и μ — параметры активной и реактивной нелинейностей. Формально при выполнении условий $Q \gg 1$, $\gamma \ll 1$ АКС (1.1) относится к классу томсоновских.

Используемый способ проектирования ДВ-генератора в определенном смысле можно назвать структурным, поскольку он опирается на представление о структурной схеме томсоновской АКС (1.1), как кольцевом соединении блоков "резонатор — нелинейный усилитель — обратная связь".

Динамическую (инерционную) часть АКС (1.1) представляет резонансный контур с дифференциальным уравнением движения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x(t), \quad (1.2)$$

где $x(t)$ — сигнал возбуждения. Контур (1.2) имеет импульсную характеристику

$$h(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \sin(\omega_0 t).$$

Ее дискретные временные отсчеты, взятые с интервалом Δ , определяют импульсную характеристику ДВ-резонатора:

$$h[n] = \Delta h(t_n) = 2\pi\Omega_0 \alpha^n \sin(2\pi\Omega_0 n). \quad (1.3)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0 \Delta / 2\pi$ — собственная частота контура, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$; $\alpha = \exp(-\pi\Omega_0/Q)$ — параметр диссипации.

Так как частотная характеристика ДВ-системы связана с ее импульсной характеристикой дискретным во времени преобразованием Фурье [5]:

$$H(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \exp(-j2\pi\Omega n),$$

то для (1.3), проведя вычисления, получим

$$H(j\Omega) = H_+(j\Omega) + H_-(j\Omega) = -\frac{j\pi\Omega_0}{1 - \alpha \exp(j2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)} + \frac{j\pi\Omega_0}{1 - \alpha \exp(-j2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)}. \quad (1.4)$$

Частотная характеристика (1.4) соответствует системе разностных уравнений движения вида

$$\begin{aligned} y[n] &= y_+[n] + y_-[n], \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\pi\Omega_0 x[n], \\ y_-[n] &= \alpha Z_0^* y_-[n-1] + j\pi\Omega_0 x[n], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $Z_0 = \exp(j2\pi\Omega_0)$ — множитель поворота. Отметим, что при действительном сигнале $x[n]$ осцилляции $y_-[n]$ комплексно сопряжены по отношению к $y_+[n]$: $y_-[n] = y_+^*[n]$.

В автоколебательной системе с уравнением движения (1.1) роль сигнала возбуждения $x(t)$ играет сигнал на выходе нелинейного усилителя, вход которого через обратную связь взаимодействует с выходом контура $y(t)$:

$$x(t) = \frac{\gamma}{2\pi\Omega_0} (1 - y^2(t)) \dot{y}(t) + \mu y^3(t). \quad (1.6)$$

В этой записи введено обозначение для производной по безразмерному времени: $\dot{y} = \Delta dy/dt$.

С учетом связи (1.6) система разностных уравнений движения (1.5) для ДВ-генератора ван дер Поля – Дюффинга принимает вид

$$\begin{aligned} y[n] &= y_+[n] + y_-[n], \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\frac{\gamma}{2} (1 - y^2[n]) \dot{y}[n] - j\mu\pi\Omega_0 y^3[n], \\ y_-[n] &= \alpha Z_0^* y_-[n-1] + j\frac{\gamma}{2} (1 - y^2[n]) \dot{y}[n] + j\mu\pi\Omega_0 y^3[n]. \end{aligned}$$

Сумма второго и третьего уравнений этой системы с учетом первого дает важное соотношение

$$y[n] = \alpha Z_0 y_+[n-1] + \alpha Z_0^* y_+^*[n-1],$$

указывающее на зависимость значения осциллирующей переменной $y[n]$ в текущий момент дискретного времени n от значения переменной $y_+[n-1]$, взятого в предыдущий момент $n-1$. Такая временная зависимость позволяет построить ДВ-осциллятор в форме итерируемого дискретного отображения вида

$$\begin{aligned} y[n] &= 2\alpha \operatorname{Re}\left(Z_0 y_+[n-1]\right), \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\frac{\gamma}{2}\left(1 - y^2[n]\right)\dot{y}[n] - j\mu\pi\Omega_0 y^3[n]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В отображении (1.7) для связи отсчетов $\dot{y}[n]$ и $y[n]$ предлагается использовать выражение вида

$$\operatorname{sinc}(2\pi\Omega_0)\dot{y}[n] = \cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]. \quad (1.8)$$

Оно является точным для дискретных гармонических колебаний с частотой Ω_0 . Как приближенное, предлагается распространить его и на квазигармонические автоколебания. С учетом (1.8) отображение (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} y[n] &= 2\alpha \operatorname{Re}\left(Z_0 y_+[n-1]\right), \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\gamma \frac{\pi\Omega_0}{\sin(2\pi\Omega_0)}\left(1 - y^2[n]\right) \times \\ &\quad \times \left(\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]\right) - j\mu\pi\Omega_0 y^3[n]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Сформированное таким образом нелинейное разностное уравнение (1.9) представляет собой комплексную форму дискретного отображения (уравнения движения) генератора ван дер Поля – Дюффинга. Если ввести в рассмотрение эквивалентные параметры $\gamma_e = \gamma\left(\pi\Omega_0/\sin(2\pi\Omega_0)\right)$ и $\mu_e = \mu\pi\Omega_0$, то запись отображения (1.9) можно сделать более компактной:

$$\begin{aligned} y[n] &= 2\alpha \operatorname{Re}\left(Z_0 y_+[n-1]\right), \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\gamma_e\left(1 - y^2[n]\right)\left(\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]\right) - j\mu_e y^3[n]. \end{aligned}$$

Для перехода к действительной форме отображения осциллятора ван дер Поля – Дюффинга дроби в формуле частотной характеристики (1.4) приведем к общему знаменателю. В результате получим выражение

$$H(j\Omega) = \frac{2\pi\Omega_0\alpha \sin(2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)}{1 - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega) + \alpha^2 \exp(-j4\pi\Omega)}. \quad (1.10)$$

Частотная характеристика (1.10) описывает линейный ДВ-резонатор с разностным уравнением движения

$$y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = 2\pi\Omega_0\alpha \sin(2\pi\Omega_0)x[n-1]. \quad (1.11)$$

Теперь, охватив резонатор (1.11) цепью обратной связи с уравнением (1.6), получим дискретное отображение генератора ван дер Поля – Дюффинга в виде

$$y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = 2\pi\Omega_0\alpha F\left(y[n-1], y[n-2]\right) \quad (1.12)$$

с нелинейной в правой частью

$$F\left(y[n-1], y[n-2]\right) = \gamma\left(1 - y^2[n-1]\right)\left(\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] - y[n-2]\right) + \mu \sin(2\pi\Omega_0)y^3[n-1].$$

То обстоятельство, что при переходе от (1.9) к (1.12) не было сделано никаких приближений, указывает на эквивалентность этих форм дискретных отображений генератора ван дер Поля – Дюффинга.

При рассмотрении дискретного отображения (1.12) в качестве самостоятельного объекта нелинейной динамики его запись можно упростить, введя эквивалентные параметры $\gamma_e = 2\pi\Omega_0\alpha\gamma$ и $\mu_e = 2\pi\Omega_0\alpha \sin(2\pi\Omega_0)\mu$. В таком случае отображение (1.12) принимает более компактный вид:

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] &= \\ = \gamma_e\left(1 - y^2[n-1]\right)\left(\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] - y[n-2]\right) + \mu_e y^3[n-1]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

2. Метод ММА для ДВ-генератора ван дер Поля

Отображение (1.9) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики аналоговой томсоновской АКС (1.1). Это нетрудно показать цифровым анализом генерируемых по алгоритму (1.9) временных рядов, но мы воспользуемся здесь широко распространенным в теории нелинейных колебаний

методом медленно меняющихся амплитуд (методом ММА) [9]. Рассмотрение проведем для осциллятора ван дер Поля, положив в (1.1) и (1.9) $\mu = 0$.

Следуя им, генерируемый отображением (1.9) временной ряд (ДВ-автоколебания) представим в виде

$$y_+[n] = \frac{1}{2}A[n]Z_0^n,$$

где $A[n] = a[n] \exp(j\varphi[n])$ — комплексная амплитуда автоколебаний, $a[n]$ и $\varphi[n]$ — действительные амплитуда и фаза. Тогда первое из уравнений (1.9) можно записать как

$$y[n] = \frac{\alpha}{2}A[n-1]Z_0^n + \frac{\alpha}{2}A^*[n-1]Z_0^{-n}, \quad (2.1)$$

Нелинейную функцию

$$F(y[n], y[n-1]) = \left(1 - y^2[n]\right) \left(\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]\right) \quad (2.2)$$

в правой части отображения (1.9) в рамках метода ММА заменим первой гармоникой ряда Фурье:

$$F(y[n], y[n-1]) \approx \frac{1}{2}F_1(A[n])Z_0^n + \frac{1}{2}F_1^*(A[n])Z_0^{-n}$$

с комплексной амплитудой

$$F_1(A[n]) = j \sin(2\pi\Omega_0) \left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right) A[n-1].$$

Отметим также, что в рамках используемой здесь методики ММА в нелинейности (2.2) считаем $A[n-2] = A[n-1]$ и $\alpha = 1$.

Используя в (1.9) представленные разложения и проведя очевидные математические преобразования, получим

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \pi\Omega_0\gamma \left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right) A[n-1] + \pi\Omega_0\gamma \left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right) A^*[n-1]Z_0^{-2n}.$$

Последнее слагаемое здесь описывает высокочастотное воздействие (с периодом $T_0 = 1/\pi\Omega_0$) на медленный процесс изменения (с характерным временем релаксации $T_r = Q/\pi\Omega_0$) комплексной амплитуды $A[n]$. Пренебрегая этим воздействием, приходим к укороченному уравнению для комплексной амплитуды ДВ-автоколебаний

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \pi\Omega_0\gamma \left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right) A[n-1]. \quad (2.3)$$

Полученное разностное уравнение (2.3) сопоставим с укороченным уравнением для комплексной амплитуды автоколебаний в исходной аналоговой модели АКС (1.1). Нетрудно показать, что для автоколебаний вида

$$y(t) = \frac{1}{2}A(t) \exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2}A^*(t) \exp(-j\omega_0 t)$$

уравнение движения (1.1) методом ММА сводится к дифференциальному укороченному уравнению

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}A(t) + \frac{\omega_0}{2}\gamma \left(1 - \frac{1}{4}a^2(t)\right)A(t).$$

При переходе к безразмерному времени $\tau = t\Delta^{-1}$ это уравнение принимает вид

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = -\pi\frac{\Omega_0}{Q}A(\tau) + \pi\Omega_0\gamma \left(1 - \frac{1}{4}a^2(\tau)\right)A(\tau). \quad (2.4)$$

Учитывая разложение параметра диссипации высокодобротного контура в ряд по обратным степеням добротности

$$\alpha = \exp\left(-\pi\frac{\Omega_0}{Q}\right) \approx 1 - \pi\frac{\Omega_0}{Q},$$

приходим к выводу о том, что разностное укороченное уравнение ДВ-генератора ван дер Поля (2.3) реализует алгоритм Эйлера для укороченного уравнения (2.4) аналоговой АКС. Так подтверждается сделанное нами ранее утверждение о том, что отображения (1.9) и (1.12) воспроизводят в дискретном времени основные динамические характеристики томсоновской АКС (1.1).

Для полного ДВ-генератора ван дер Поля – Дюффинга аналогичным образом удастся получить укороченное уравнение вида

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \pi\Omega_0 \left[\gamma \left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right) - j\frac{3}{4}\mu a^2[n-1] \right] A[n-1]. \quad (2.5)$$

3. Некоторые результаты анализа динамики отображений

Приведем ряд результатов, полученных для дискретного отображения генератора ван дер Поля – Дюффинга.

На рис. 1 точками приведены отсчеты ДВ-автоколебаний $y[n]$, генерируемых отображением (1.9) со значениями $\Omega_0 = 0.2$, $Q = 13$ и $\mu = -0.057$. Обратная связь с параметром $\gamma = 0.2$ включается на интервале времени $11 \leq n \leq 200$. Пунктирной линией на рисунке показан график временной зависимости амплитуды автоколебаний, рассчитанный по укороченному уравнению (2.5). Как видно из графиков, зависимость $a[n] = |A[n]|$ с хорошим приближением воспроизводит амплитуду автоколебаний.

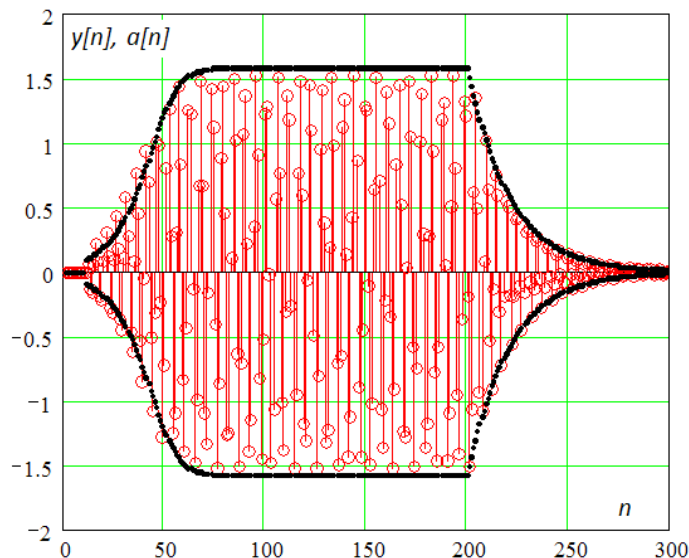


Рис. 1. Дискретные отсчеты мгновенных значений автоколебаний и амплитуды их первой гармоники

На рис. 2 показан амплитудный спектр сигнала $y[n]$, рассчитанный по отрезку реализации установившихся автоколебаний в 512 отсчетов. Отображение имеет те же параметры, что и для предыдущего рисунка, за исключением того, что $\gamma = 0.2$ для всех $n \geq 11$. Символами gk на рисунке обозначены спектральные линии k -ых гармоник. Таким образом, спектр демонстрирует неустраняемый эффект подмены частот в нелинейных ДВ-системах. В работе [10] показано, что при определенных условиях эффект приводит к существенным особенностям в динамике ДВ-АКС.

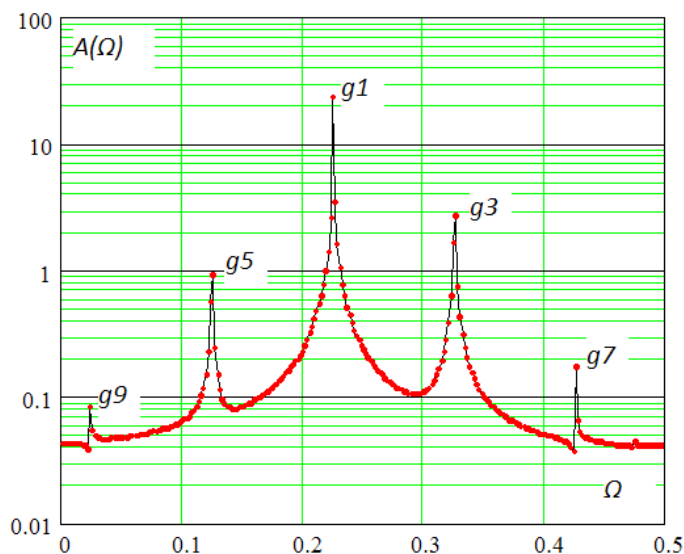


Рис. 2. Амплитудный спектр автоколебаний

При высоких уровнях возбуждения отображение генератора ван дер Поля – Дюффинга (1.13), в отличие от аналогового прототипа, демонстрирует режимы генерации динамического хаоса. Хаотизация автоколебаний возникает из-за подмены частот гармоник и неизохронности автоколебательной системы. На рис. 3 и рис. 4 показаны отрезок реализации и фазовый портрет (в координатах $(y[n], v[n] = \dot{y}[n])$) хаотических автоколебаний, генерируемых отображением (1.13) с параметрами $\Omega_0 = 0.205$, $\gamma_e = 0.25$, $Q = 15$ и $\mu_e = -0.09$. Фазовый портрет имеет ярко выраженную фрактальную структуру со значением корреляционного показателя 1.29 ± 0.04 , что является одним из эвристических признаков хаоса [11].

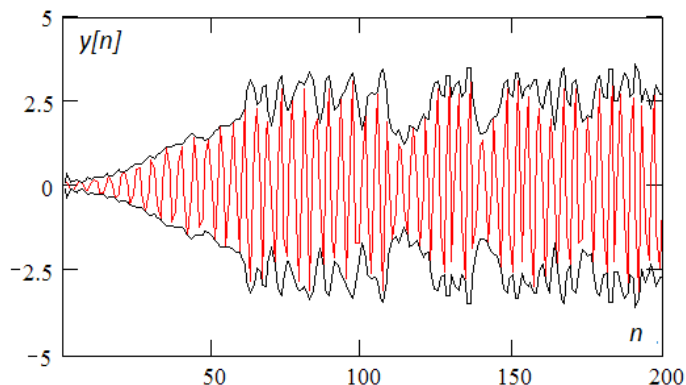


Рис. 3. Реализация хаотических автоколебаний

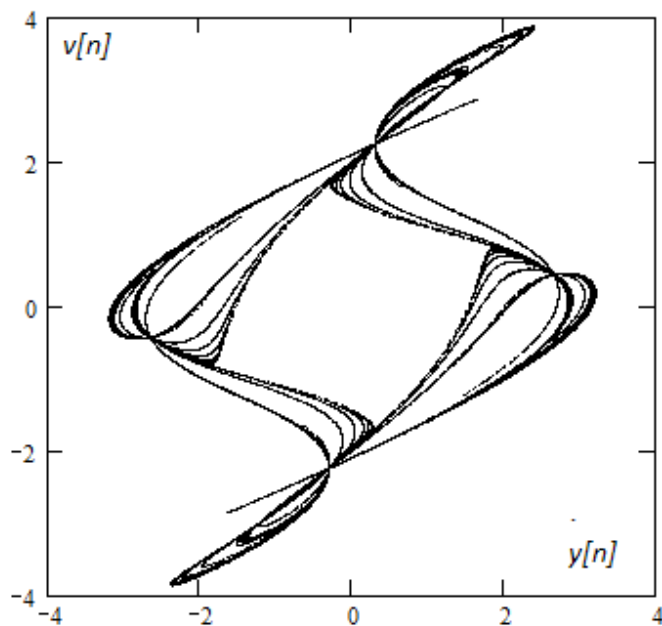


Рис. 4. Фазовый портрет хаотических автоколебаний

На генерацию динамического хаоса указывает также широкий амплитудный спектр автоколебаний, представленный на рис. 5. Оценка спектра проведена с использованием периодограмм Бартлетта с 512-точечным дискретным преобразованием Фурье по реализации в 65536 отсчетов.

Детальный анализ временных зависимостей огибающей и фазы автоколебаний $y[n]$ указывает на причину уширения центральной части спектральной линии — хаотическую диффузию фазы, что полностью соответствует общим положениям теории формы спектра автоколебаний [12]. Асимметрия линии обусловлена корреляцией фазового и амплитудного хаоса. Последний формирует также пьедестал спектральной линии.

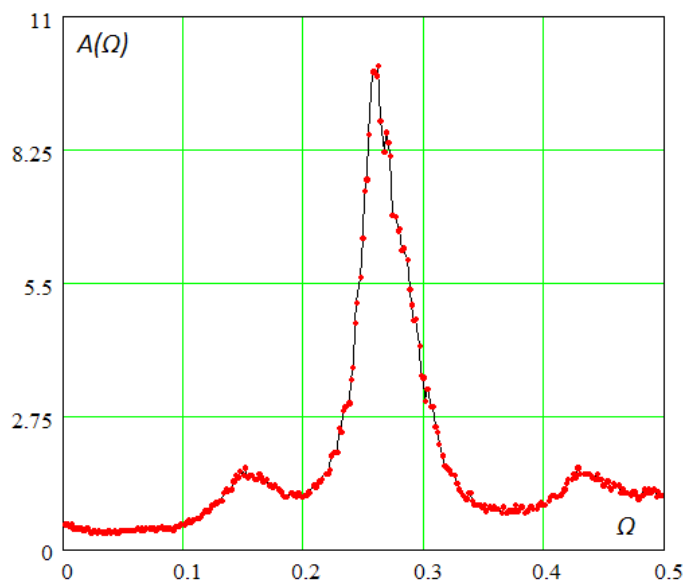


Рис. 5. Усредненный амплитудный спектр хаотических автоколебаний

Заключение

Представленные здесь дискретные отображения нелинейных осцилляторов (1.9), (1.12) расширяют круг объектов нелинейной динамики в дискретном времени со свойствами аналоговых автоколебательных систем. В то же время они могут демонстрировать и аномальное поведение, отличающее их от аналоговых систем-прототипов.

Практические применения предложенных отображений весьма разнообразны. В режимах регулярных автоколебаний предложенные отображения могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [13]. Сообщается также о применении осцилляторов подобного типа в моделях колебательно-волновых процессов в пространственно распределенных системах [14]. Хаотические автоколебания ДВ-осциллятора ван дер Поля – Дюффинга можно использовать в качестве несущего модулируемого сигнала в системах скрытной передачи информации [15].

Литература

- [1] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 292 с.
- [2] Феномен уравнения ван дер Поля / А.П. Кузнецов [и др.] // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22. № 4. С. 3–42.
- [3] Кальянов Э.В., Кислов В.Я. Автоколебательные системы с хаотической динамикой на основе уравнений ван дер Поля – Дюффинга // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. № 1. С. 65–73.
- [4] Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля – Дюффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 1. № 4. С. 101–136.
- [5] Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
- [6] Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
- [7] Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17. № 6. С. 139–158.
- [8] Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М. – Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
- [9] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [10] Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов – ПНД. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–44.

- [11] Многоликий хаос / Е.Ф. Мищенко [и др.]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 432 с.
- [12] Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968. 660 с.
- [13] Зайцев В.В., Карлов А.В. Дискретное отображение осциллятора с нелинейной диссипацией и частотное детектирование ДВ-сигналов // Радиотехника. 2014. № 4. С. 50–54.
- [14] Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. Особенности многоволновой самосогласованной динамики ансамбля автогенераторов и поля в прямоугольной области // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 7. С. 691–698.
- [15] Жалнин А.Ю. Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22. № 5. С. 3–12.

References

- [1] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. *Nelineinye kolebaniia* [Nonlinear oscillations]. M.: FIZMATLIT, 2005, 292 p. [in Russian].
- [2] Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskov D.I., Turukina L.V. *Fenomen uravneniia van der Polia* [Phenomenon of van der Pol equation]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2014, Vol. 22, no. 4, pp. 3–42 [in Russian].
- [3] Kalyanov E.V., Kislov V.Ya. *Avtokolebatel'nye sistemy s khaoticheskoi dinamikoi na osnove uravnenii van der Polia – Diuffinga* [Self-oscillatory systems with chaotic dynamics on the basis of van der Pol – Dyuffing equations]. *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 2006, Vol. 51, no. 1, pp. 65–73 [in Russian].
- [4] Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. *Sviazannye ostsillatory van der Polia i van der Polia – Diuffinga: Fazovaia dinamika i komp'iuternoe modelirovanie* [Coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators: dynamics of phase and computer simulation]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2008, Vol. 1, no. 4, pp. 101–136 [in Russian].
- [5] Oppenheim A., Schaffer R. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital signal processing]. M.: Tekhnosfera, 2006, 856 p. [in Russian].
- [6] Zaslavsky G.M. *Gamil'tonov khaos i fraktal'naia dinamika* [Hamiltonian chaos and fractional dynamics]. M.; Izhevsk: NITs RKhD; Izhevskii institut komp'iuternykh issledovaniy, 2010, 472 p. [in Russian].
- [7] Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V. *Bifurkatsiia Bogdanova – Takensa: ot nepreryvnoi k diskretnoi modeli* [Bogdanov–Takens bifurcation: from flows to discrete systems]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2009, Vol. 17, no. 6, pp. 139–158 [in Russian].
- [8] Morozov A.D. *Rezonansy, tsikly i khaos v kvazikonservativnykh sistemakh* [Resonances, cycles and chaos in quasiconservative systems]. M.–Izhevsk: NITs RKhD; Izhevskii institut komp'iuternykh issledovaniy, 2005, 424 p. [in Russian].
- [9] Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. *Teoriia kolebanii v radiotekhnike* [The theory of oscillations in radio engineering]. M.: Nauka, 1984, 320 p. [in Russian].
- [10] Zaitsev V.V., Stulov I.V. *O vliianii podmenennykh garmonik na dinamiku avtokolebanii v diskretnom vremeni* [About influence of the changed harmonics on dynamics of self-oscillations in discrete time]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2015, Vol. 23, no. 6, pp. 40–44 [in Russian].
- [11] Mishchenko E.F., Sadovnichii V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. *(Mnogolikii khaos)* [Many-sided chaos]. M.: FIZMATLIT, 2013, 432 p. [in Russian].
- [12] Malakhov A.N. *Fluktuatsii v avtokolebatel'nykh sistemakh* [Fluctuations in self-oscillations systems]. M.: Nauka, 1968, 660 p. [in Russian].
- [13] Zaitsev V.V., Karlov Ar.V. *Diskretnoe otobrazhenie ostsillatora s nelineinoi dissipatsiei i chastotnoe detektirovanie DV-signalov* [Discrete mapping of the oscillator with nonlinear dissipation and frequency detecting]. *Radiotekhnika* [Radioengineering], 2014, no. 4, pp. 50–54 [in Russian].
- [14] Kornienko V.N., Privezentsev A.P. *Osobennosti mnogovolnovoi samosoglasovannoi dinamiki ansambliia avtogeneratorov i polia v priamougol'noi oblasti* [Features of the multimode self-consistent dynamics of an ensemble of self-oscillators and the field in a rectangular domain]. *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 2013, Vol. 58, no. 7, pp. 691–698 [in Russian].
- [15] Jalnina A.Yu. *Novaia skhema peredachi informatsii na osnove fazovoi moduliatsii nesushchego khaoticheskogo signala* [A new information transfer scheme based on phase modulation of a carrier chaotic signal]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2014, Vol. 22, no. 5, pp. 3–12 [in Russian].

*V.V. Zaitsev, A.N. Shilin*²

THE MAPPINGS OF VAN DER POL — DYUFFING GENERATOR IN DISCRETE TIME

In the work transition to discrete time in the equation of movement of van der Pol – Dyuffing generator is described. The transition purpose—to create mappings of the generator as subjects of the theory of nonlinear oscillations (nonlinear dynamics) in discrete time. The method of sampling is based on the use of counting of the pulse characteristic of an oscillatory contour as the sampling series for a signal in a self-oscillating ring "active nonlinearity – the resonator – feedback". The choice of the consecutive scheme of excitement of a contour allows to receive the iterated displays in the form of recurrent formulas. Two equivalent forms of discrete displays of the generator of van der Pol – Dyuffing—complex and valid are presented. In approximation of method of slow-changing amplitudes it is confirmed that the created discrete mappings have dynamic properties of an analog prototype. Also within the numerical experiment it is shown that in case of the high power of generation the effect of changing of frequencies of harmonicas of the generated discrete signal significantly influence dynamics of the self-oscillators. In particular, in the discrete generator of van der Pol – Dyuffing the chaotic self-oscillations are observed.

Key words: self-oscillatory system, pulse characteristic, discrete mapping, method of slow-changing amplitudes, chaotic self-oscillations.

Статья поступила в редакцию 12/V/2017.
The article received 12/V/2017.

²*Zaitsev Valeriy Vassilievich (zaitsev@samsu.ru), Shilin Aleksandr Nikolaevich (shilax@mail.ru)*, Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation.