МЕХАНИКА

УДК 539.4

Л.В. Степанова, Р.М. Жаббаров[1]

МЕТОД КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВСЕСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе получено приближенное решение задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести методом квазилинеаризации. С помощью метода квазилинеаризации найдены четыре приближения решения задачи. Показано, что построенные приближения сходятся к предельному численному решению задачи. Интересной особенностью данной задачи является тот факт, что максимальное значение тангенциального напряжения достигается не на круговом контуре, а во внутренней точке пластины. Показано, что метод квазилинеаризации является эффективным методом решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: метод квазилинеаризации, всестороннее растяжение пластины, поле напряжений в окрестности вершины трещины, нелинейные задачи, степенной закон Бейли-Нортона, аналитическое решение.

Введение

Современные компьютерные технологии обеспечивают быстрое и точное численное решение сложных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем не менее, задача построения аналитических приближенных решений нелинейных задач становится еще более актуальной в настоящее время [1–10]. По всей видимости, разумное сочетание компьютерных технологий и приближенных решений или редукций нелинейных систем дифференциальных уравнений дает перспективный путь исследования физических, экономических, биологических проблем и других задач естествознания. В этом отношении перспективным представляется метод квазилинеаризации, в рамках которого решение строится посредством искусных комбинаций методов линейного приближения и использования возможностей современных вычислительных систем. Последовательные приближения строятся таким образом, чтобы добиться быстрой сходимости, а по возможности и монотонности процесса [3; 5]. Более того, зачастую интерес для приложений представляют именно приближенные аналитические решения, а не численные решения [3–5]. Например, в работах [7–10] разработан эффективный метод идентификации параметров сферической полости или сферического включения, основанный на применении инвариантных интегралов. Авторы вводят в рассмотрение инвариантные интегралы взаимодействия, которые можно аналитически вычислить, ибо имеется решение задачи об одноосном растяжении изотропного линейно упругого пространства со сферической полостью. Инвариантные интегралы сохраняют свое свойство независимости от пути интегрирования и для нелинейных сред, например, для сред со степенными определяющими уравнениями, и, следовательно развитый в [7; 8] метод может быть обобщен и на нелинейные среды при наличии приближенного, но аналитического решения задачи о растяжении пространства со сферической полостью или сферическим включением. Поэтому особенно важными являются методы построения аналитических решений нелинейных задач [6].

В блестящей книге [2] отмечается, что вопросы, связанные с существованием и единственностью решений нелинейных дифференциальных уравнений, весьма сложны и тонки, и в этой области есть много белых пятен. Для того чтобы иметь аналитический фундамент для построения решения нелинейного дифференциального уравнения (например, двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения) и разработать алгоритмы численного решения, необходимо прибегнуть к методике аппроксимаций. В этом отношении метод квазилинеаризации позволяет получить решение нелинейного дифферен-

Степанова Лариса Валентиновна (stepanovalv@samsu.ru), *Жаббаров Рамиль Муритович* (were-wolff@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

циального уравнения как предел последовательности решений линейных дифференциальных уравнений. Каждое из этих уравнений нетрудно решить численно.

Поэтому целью настоящей работы является приближенное решение задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести с помощью метода квазилинеаризации.

Физическая постановка задачи и метрод квазилинеаризации

Рассмтривается пластина с круговым отверстием (рис. 1), поведение материала которой характеризуется степенным законом Бейли-Нортона

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\sigma_e^{n-1}S_{ij},$$

где $\sigma_e^2 = \sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2$ – интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ – компоненты девиатора тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера. Целью задачи является определение напряженно-деформированного состояния в пластине с центральным круговым отверстием в условиях ползучести.

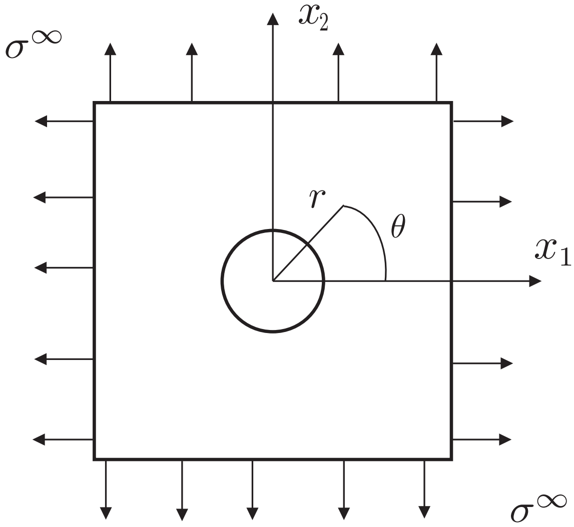

Рис. 1. Пластина с центральным круговым отверстием

Систему уравнение данной задачи формирует уравнение равновесия, условие совместности деформаций и определяющие уравнения степенного закона ползучести. Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) \tag{1.1}$$

Условие совместности деформаций принимает форму:

$$\frac{d\dot{\varepsilon}_\theta}{dr} = \frac{1}{r}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) \tag{1.2}$$

Определяющие уравнения задачи для рассматриваемого нагружения принимает вид:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta\right) = F_r(\sigma_r, \sigma_\theta), \tag{1.3}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e}\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r\right) = F_\theta(\sigma_r, \sigma_\theta). \tag{1.4}$$

Граничные условия для данной задачи выглядят следующим образом:

$$\sigma_r(r = a) = 0, \quad \sigma_r(r = \infty) = \sigma^\infty,$$

где σ^∞ — приложенные напряжения.

Система из уравнений (1.1)–(1.4) представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \sigma_r, \sigma_\theta$. Найти аналитическое решение сформулированной системы не удается. Однако можно построить приближенное аналитическое решение задачи с помощью метода квазилинеаризации. Данный метод является итерационным и на каждой итерации вычисляется приближенное решение $(\sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)})$, где $k = 0, 1, 2...$ - номер итерации. В соответствии с методом, требуется провести линеаризацию определяющих соотношений (1.3), (1.4) путем их разложения в ряд Тейлора в окрестности $(k-1)$-ого приближения и определяющие уравнения заменяются на:

$$\dot{\varepsilon}_r = a_r + b_{rr}\sigma_r + b_{r\theta}\sigma_\theta, \tag{1.5}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = a_\theta + b_{\theta r}\sigma_r + b_{\theta\theta}\sigma_\theta, \tag{1.6}$$

где $b_{ij}(i, j = r, \theta)$ — коэффициенты разложения, $a_i(i = r, \theta)$ — свободные члены. При этом значения коэффициентов вычисляются по формулам, где компоненты тензора напряжений берутся из $(k-1)$-го прибижения. Коэффициенты a_i, b_{ij} вычисляются по текущему приближению:

$$a_r = F_r - \sigma_r \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$a_\theta = F_\theta - \sigma_r \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{rr} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r}, \qquad b_{r\theta} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{\theta r} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r}, \qquad b_{\theta\theta} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta}.$$

Уравнения (1.5)–(1.6) могут быть представлены в форме (1.7) – (1.8):

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{b_{\varphi\varphi}}(\dot{\varepsilon}_\varphi - b_{\varphi r}\sigma_r - a_\varphi), \tag{1.7}$$

$$\dot{\varepsilon}_r = a_r - \frac{b_{r\varphi}}{b_{\varphi\varphi}}a_\varphi + \frac{b_{r\varphi}}{b_{\varphi\varphi}}\dot{\varepsilon}_\varphi + \left(b_{rr} - \frac{b_{r\varphi}b_{\varphi r}}{b_{\varphi\varphi}}\right)\sigma_r. \tag{1.8}$$

В качестве примера было приведено было построено решение для степенного закона $f(\sigma_e) = B\sigma^n$. Предварительно был осуществлен переход к безразмерным величинам. Скомбинировав уравнения (1.1), (1.2), с (1.7) и (1.8), получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для получения k-го приближения:

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \dot{\varepsilon}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{r} - \dfrac{b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\dfrac{1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{b_{\theta\theta}} \\ \dfrac{1}{r}\left(b_{rr} - \dfrac{b_{r\theta}b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\right) & -\dfrac{1}{r} + \dfrac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}\dfrac{1}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \dot{\varepsilon}_\theta \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} -\dfrac{a_\theta}{b_{\theta\theta}}\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{1}{r}\left(a_r - \dfrac{b_{r\theta}a_\theta}{b_{\theta\theta}}\right) \end{pmatrix}.$$

Результаты решения

С помощью метода квазилинеаризации получено решение задачи о всестороннем растяжении неупругой пластины с центральным круговым отверстием. Целью решения являлось получение распределений компонент тензора напряжений и компонент тензора скоростей деформаций ползучести. Результаты решения для $n = 5$ представлены на графиках (рис. 2–5). На рис. 2 и 3 проиллюстрированы графики компонент тензора напряжений σ_r и σ_θ, полученных с помощью метода квазилинеаризации для $k = 1..4$, где k – номер итерации, а также нулевые приближения. На рис. 4 и 5 изображены сравнения 4-го приближения компонент тензора напряжений с решениемиями, полоченными с помощью метода Рунге-Кутта-Фельберга и пакета Simulia ABAQUS. Можно отметить интересную особенность распределения компоненты σ_θ. Максимальное значение компоненты достигается не на контуре кругового отверстия, а на некотором расстоянии от него.

Результаты решения в пакете Simulia ABAQUS Student Edition

В многоцелевом программном комплексе Simulia ABAQUS с целью проверки достоверности полученного приближенного решения было получено численное решение задачи методом конечного элемента. На рис. 6–9 показаны результаты конечно-элементного решения.

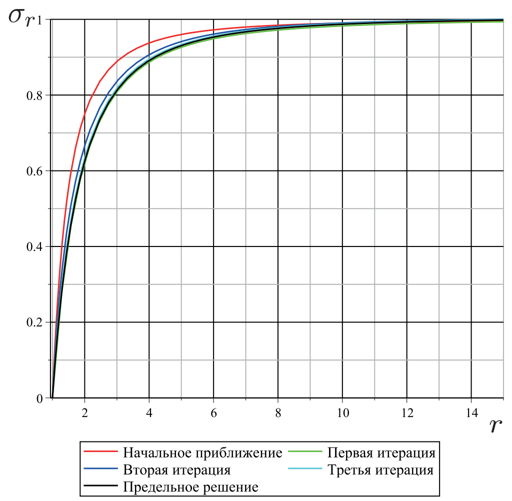

Рис. 2. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r

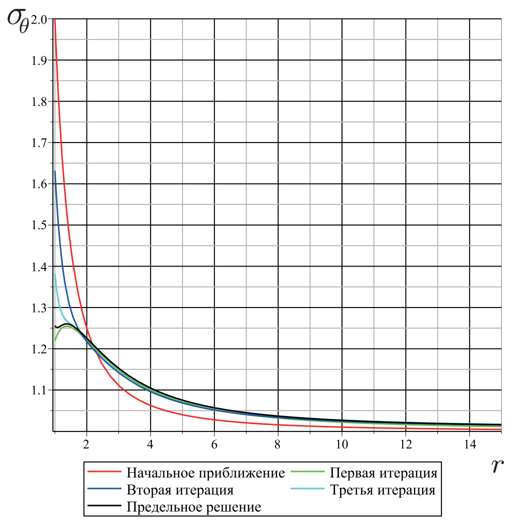

Рис. 3. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ

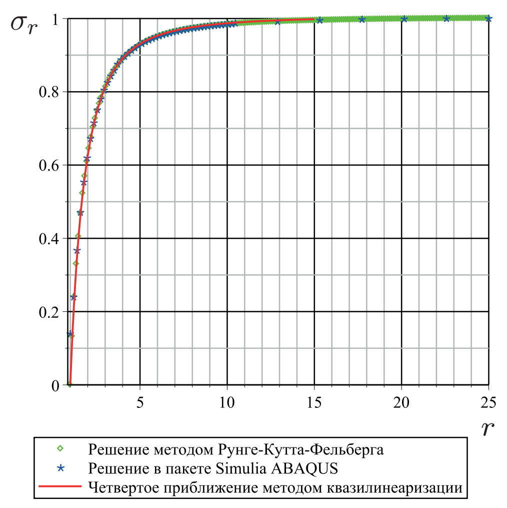

Рис. 4. Численное решение. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r

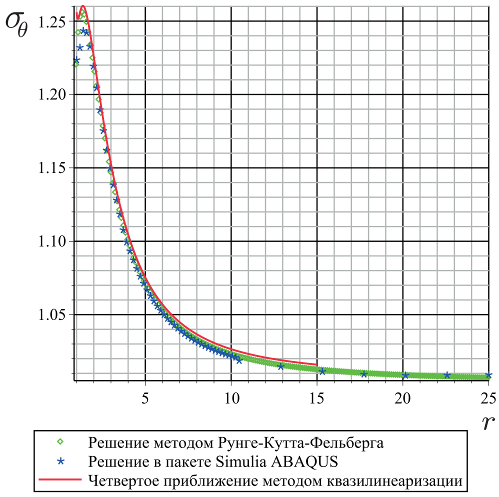

Рис. 5. Численное решение. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ

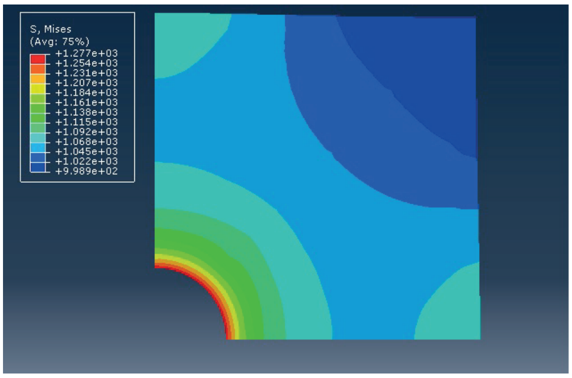

Рис. 6. Распределение интенсивности напряжений

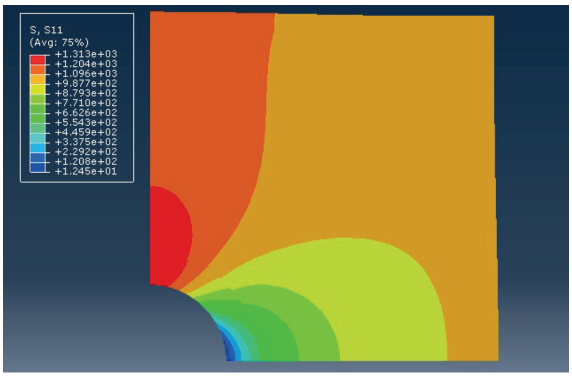

Рис. 7. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11}

Выводы

•На примере задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием рассмотрена процедура метода квазилинеаризации. Данная задача является удобным примером, ибо для нее можно построить численное решение методом Рунге-Кутта-Фельберга.

•Показано, что четыре итерации сходятся к предельному решению задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести.

•Показано, что метод квазилинеаризации является эффективным методом решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

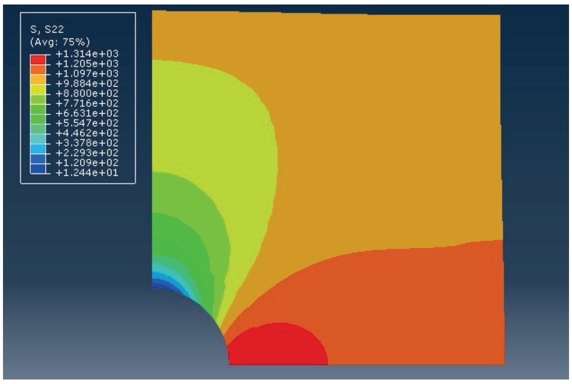

Рис. 8. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22}

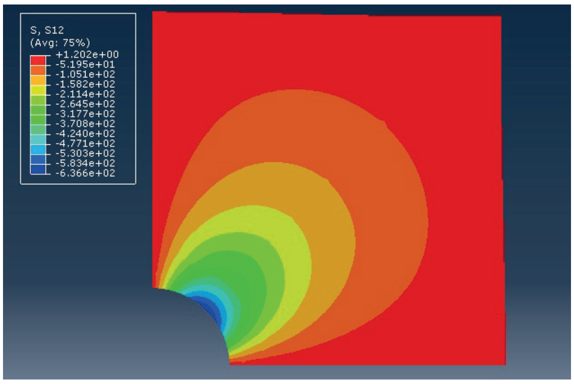

Рис. 9. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{12}

Литература

[1] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2010. 368 с.

[2] Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. 2013. 276 с.

[3] Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.

[4] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Самарский университет, 2006. 242 с.

[5] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.

[6] Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium // Comptes Rendus – Mechanique. 2008. № 1–2. P. 232–237.

[7] Shifrin E.I. Symmetry properties of the recipricity gap functional in the linear elasticity // International Journal of Fracture. 2009. Т. 159. № 2. С. 209–218.

[8] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // Inverse problems. 2010. Т. 26. № 5. С. 055001.

[9] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // International Journal of Solids and Structures. 2013. Т. 50. № 22–23. С. 3707–3716.

[10] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Reconstruction of an ellipsoidal defect an anisotropic elastic solid, using results of one static test // Inverse Problems in Science and Egineering. 2013. Т. 21. № 5. С. 781–800.

References

[1] Kudryashov N.A. *Metody nelineinoi matematicheskoi fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Izdatel'skii dom "Intellekt", 2010, 368 p. [in Russian].

[2] Andrianov I., Avreytsevich Ya. *Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelineinoi dinamike i mekhanike deformiruemogo tverdogo tela*, 2013, 276 p. [in Russian].

[3] Bellman R.E., Kalaba R.E. *Kvazilinearizatsiia i nelineinye kraevye zadachi* [Quazilinearization and nonlinear boundary-value problems]. M.: Mir, 1968, 184 p. [in Russian].

[4] Stepanova L.V. *Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniia* [Mathematical methods of fracture mechanics]. Samara: Samarskii universitet, 2006, 242 p. [in Russian].

[5] Boyle J.T., Spence J. *Analiz napriazhenii v konstruktsiiakh pri polzuchesti* [Stress analysis for creep]. M.: Mir, 1986, 360 p. [in Russian].

[6] Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium. *Comptes Rendus – Mechanique*, 2008, №1–2, pp. 232–237 [in English].

[7] Shifrin E.I. Symmetry properties of the recipricity gap functional in the linear elasticity //*International Journal of Fracture*, 2009, Vol. 159, no. 2, pp. 209–218 [in English].

[8] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional //*Inverse problems*, 2010, Vol. 26, no. 5, p. 055001 [in English].

[9] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements //*International Journal of Solids and Structures*, 2013, Vol. 50, no. 22-23, pp. 3707–3716 [in Russian].

[10] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Reconstruction of an ellipsoidal defect an anisotropic elastic solid, using results of one static test //*Inverse Problems in Science and Egineering*, 2013, Vol. 21, no. 5, pp. 781–800 [in English].

L.V. Stepanova, R.M. Zhabbarov[2]

QUAZILINEARIZATION METHOD FOR THE SOLUTION TO THE PROBLEM OF PLATE WITH THE CENTRAL CIRCULAR HOLE UNDER CREEP REGIME

The approximation solution of the problem for an infinite plate with the circular hole under creep regime is obtained by the quazilinearization method. Four approximations of the solution of the nonlinear problems are found. It is shown that with increasing of the number of approximations the solution converges to the limit numerical solution. It is worth to note that the tangential stress reaches its maximum value not at the circular hole but at the internal point of the plate. It is also shown that quazilinearization method is an effective method for nonlinear problems.

Key words: quazilinearization method, plate comprehensively stretching, stress field in the neighborhood of crack tips, nonlinear problems, Beyley-Norton's power law, analytical solution.

Статья поступила в редакцию 29/*VI*/2017.
The article received 29/*VI*/2017.

[2] *Stepanova Larisa Valentinovna* (stepanovalv@samsu.ru), *Zhabbarov Ramil Muritovich* (were-wolff@yandex.ru), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.