УДК 517.984.5

М.В. Кукушкин[1]

О НЕКОТОРЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КИПРИЯНОВА

В данной работе изучены качественные свойства оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова. Взяв за основу концепцию многомерного обобщения оператора дробного дифференцирования в смысле Маршо мы адаптировали раннее известную технику доказательств теорем теории дробного исчисления одной переменной, для оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова. Наряду с ранее известным введенным И.А. Киприяновым определением дробной производной по направлению используется новое определение многомерного дробного интеграла в направлении позволяющее расширить область определения формально сопряженного оператора. Доказан ряд утверждений имеющих аналоги в теории дробного исчисления одной переменной. В частности получены достаточные условия представимости дробным интегралом в направлении. Доказано интегральное тождество результатом которого является построение формально сопряженного оператора определенного на множестве функций представимых дробным интегралом в направлении.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, оператор Маршо, оператор Римана-Лиувилля, дробная производная по направлению, дробный интеграл, энергетическое пространство, формально сопряженный оператор, аккретивный оператор.

1. Предварительные сведения

Свойство положительности операторов дробного дифференцирования, как отмечено в [1], является весьма важным в теории дифференциальных уравнений дробного порядка. Более сильное свойство полуограниченности оператора снизу (аналог свойства сильной аккретивности [2, с. 352] для действительных гильбертовых пространств), является свойством более слабым, чем свойство положительной определенности оператора. Однако к примеру, для весовых энергетических пространств порожденных оператором дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и обладающих специальными структурными свойствами, имеют место аналоги классических теорем теории положительно определенных операторов [3]. В данной работе будет рассмотрен случай когда линейный, плотно определенный, полуограниченный снизу оператор можно симметризовать путем суммирования с формально сопряженным оператором. Полученный таким образом положительно определенный оператор обладает, при некоторых дополнительных условиях, специальными спектральными свойствами, о чем сказано в [4].

Следуя обозначениям [5] будем полагать Ω — выпуклая область n — мерного евклидова пространства, P — фиксированная точка границы $\partial\Omega$, $Q(r,\vec{\mathbf{e}})$ — произвольная точка области Ω; обозначим через $\vec{\mathbf{e}}$ — единичный вектор имеющий направление от P к Q, через r — евклидово расстояние между точками P и Q. Будем рассматривать классы Лебега $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ комплекснозначных функций. В полярных координатах суммируемость f на Ω в степени p — означает, что

$$\int\limits_{\Omega} |f(Q)|^p dQ = \int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_{0}^{d(\vec{\mathbf{e}})} |f(Q)|^p r^{n-1} dr < \infty, \tag{1.1}$$

где $d\chi$ — элемент телесного угла поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве и ω — поверхность этой сферы, $d(\vec{\mathbf{e}}) \overset{\text{def}}{=} d$ — длина отрезка луча, идущего из точки P по направлению $\vec{\mathbf{e}}$ в пределах Ω. В дальнейшем не ограничивая общности будем рассматривать только те направления $\vec{\mathbf{e}}$ для которых внутренний интеграл в правой части равенства (1.1) существует и является конечным, как известно это почти

Кукушкин Максим Владимирович (kukushkinmv@rambler.ru), отдел дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

все направления. Под классом $\operatorname{Lip}\lambda,\ 0<\lambda\leqslant 1$ будем понимать множество функций удовлетворяющих условию Гельдера-Липшица в области $\bar{\Omega}$

$$\operatorname{Lip}\lambda := \left\{\rho(Q):\ |\rho(Q)-\rho(P)|\leqslant Mr^{\lambda},\ P,Q\in\bar{\Omega}\right\}.$$

Пусть

$$f\in W_p^l(\Omega),\ lp\leqslant n,\ 0<\alpha<l-\frac{n}{p}+\frac{n}{q},$$
$$p\leqslant q<\frac{np}{n-lp}, \tag{1.2}$$

тогда согласно [6], дробная производная $f^{(\alpha)}$ определенная в [5], существует и принадлежит $L_q(\Omega\times\Omega)$. В этом случае дробная производная $f^{(\alpha)}$ вычисляется по формуле

$$f^{(\alpha)}(P,Q)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{f(Q)-f(P)}{r^{\alpha}}. \tag{1.3}$$

Формула (1.3), остается справедливой при $(P,Q)\in(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$, при этом для почти всех P принадлежащих границе Γ области Ω, $f^{(\alpha)}$ существует, и рассматриваемая как функция одной лишь точки Q будет принадлежать $L_q(\Omega)$. Пусть P фиксированная точка границы $\partial\Omega$. Рассмотрим совокупность всех функций f из $W_p^l(\Omega)$ для которых функция $f^{(\alpha)}(P,Q)$ определенная в (1.3) суммируема как функция точки Q. На введенной совокупности будем рассматривать оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)=f^{(\alpha)}(P,Q).$$

В случае когда в условии (1.2) имеет место строгое неравенство $q>p$, оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова согласно теореме 2 [6], имеет следующее действие

$$\mathfrak{D}^{\alpha}:\overset{0}{W_p^l}(\Omega)\to L_q(\Omega),$$

причем для достаточно малых $\delta>0$ имеет место неравенство

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}f\|_{L_q(\Omega)}\leqslant\frac{K}{\delta^{\nu}}\|f\|_{L_p(\Omega)}+\delta^{1-\nu}\|f\|_{L_p^l(\Omega)}, \tag{1.4}$$

где

$$\nu=\frac{n}{l}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha+\beta}{l}.$$

Постоянная K не зависит от δ, f и точки $P\in\partial\Omega$ по которой построен оператор $\mathfrak{D}^{\alpha}$; β - сколь угодно малое фиксированное положительное число. Следуя терминологии [7] левостороннюю, правостороннюю дробную производную в смысле Римана-Лиувилля на отрезке действительной оси $[a,b]$ порядка $(0<\alpha<1)$ будем обозначать соответственно как $D_{a+}^{\alpha},\ D_{b-}^{\alpha}$; классы функций представимых дробным интегралом на отрезке соответственно обозначим через $I_{a+}^{\alpha}(L_p(a,b)),\ I_{b-}^{\alpha}(L_p(a,b)),\ 1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначим $\operatorname{diam}\Omega=\mathfrak{d}$. Замыкание множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $H_0^1(\Omega)$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено иное, будем использовать обозначения [5–7]. Определим соответственно левосторонний, правосторонний дробный интеграл в направлении $\vec{\mathbf{e}}$ (всюду далее в направлении)

$$\left(\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}\psi\right)(Q):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^r\frac{\psi(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(r-t)^{1-\alpha}}dt,\ \left(\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}\psi\right)(Q):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_r^{d(\vec{\mathbf{e}})}\frac{\psi(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-r)^{1-\alpha}}dt,$$
$$\psi\in L_p(\Omega),\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Классы функций представимых левосторонним, правосторонним дробным интегралом в направлении будем обозначать соответственно через $\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}(L_p),\ \mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}(L_p)$. Определим семейство операторов $\psi_{\varepsilon}^{-},\ \varepsilon>0$ следующим образом

$$\mathfrak{D}(\psi_{\varepsilon}^{-})\subset L_p(\Omega),\ (\psi_{\varepsilon}^{-}f)(Q)=\begin{cases}\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}\frac{f(Q)-f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-r)^{\alpha+1}}dt, & 0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon;\\ \frac{f(Q)}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}-\frac{1}{(d-r)^{\alpha}}\right), & d-\varepsilon<r\leqslant d.\end{cases} \tag{1.5}$$

Следуя [7, с. 181] определим усеченную дробную производную в смысле Маршо

$$(\mathbf{D}_{d-,\varepsilon}^{\alpha}f)(Q)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(Q)(d-r)^{-\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(\psi_{\varepsilon}^{-}f)(Q). \tag{1.6}$$

Правостороннюю производную в смысле Маршо будем понимать как предел по норме пространства $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ усеченных производных

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}f = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}} \mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon}f.$$

Аналогично одномерному случаю см. (13.1) [7, с. 181] определяется оператор ψ^{+}_{ε}, левосторонняя дробная производная в смысле Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{0+}$.

2. Вспомогательные утверждения

Имеет место следующая лемма об ограниченном действии операторов дробного интегрирования в направлении.

Лемма 2.1 Операторы дробного интегрирования в направлении ограниченно действуют в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Докажем, что при предположениях теоремы имеют место оценки

$$\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L_p(\Omega)},\ \|\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L_p(\Omega)},\ C = \mathfrak{d}^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1). \tag{2.1}$$

Докажем первую оценку (2.1), доказательство второй оценки (2.1) полностью аналогично. Используя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}u\|_{L_p(\Omega)}\Gamma(\alpha) = \left(\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{0}^{r}\frac{g(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(r-t)^{1-\alpha}}dt\right|^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{0}^{r}\frac{g(P+(r-\tau)\vec{\mathbf{e}})}{\tau^{1-\alpha}}d\tau\right|^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{\mathfrak{d}}\frac{|g(P+(r-\tau)\vec{\mathbf{e}})|}{\tau^{1-\alpha}}d\tau\right)^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{\mathfrak{d}}\tau^{\alpha-1}d\tau\left(\int\limits_{\Omega}|g(P+(r-\tau)\vec{\mathbf{e}})|^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\mathfrak{d}^{\alpha}}{\alpha}\,\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема об ограниченности оператора дробного интегрирования в направлении.

Теорема 2.1. Для того чтобы функция $f(Q)$ была представима в виде $\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi$, $\varphi \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ достаточно, чтобы $f \in L_p(\Omega)$ и чтобы существовал предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi^{-}_{\varepsilon}u$ в смысле нормы $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_p(\Omega)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi^{-}_{\varepsilon}f = \psi$. Рассмотрим функцию

$$(\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{f(Q)}{(d-r)^{\alpha}} + \alpha(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\right\}.$$

Учитывая (1.5) подстановкой убеждаемся в том, что $\varphi^{-}_{\varepsilon}f \in L_p(\Omega)$. Из фундаментальности последовательности $\{\varphi^{-}_{\varepsilon}f\}$ следует, что существует предел $\varphi^{-}_{\varepsilon}f \to \varphi \in L_p(\Omega)$. В силу доказанного в лемме 1 свойства непрерывности оператора $\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}$ в $L_p(\Omega)$, достаточно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f = f$. Имеем для $0 \leqslant r \leqslant d-\varepsilon$

$$(\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} =$$

$$= \int\limits_{r}^{d-\varepsilon}\frac{f(P+y\vec{\mathbf{e}})}{(y-r)^{1-\alpha}(d-y)^{\alpha}}dy + \alpha\int\limits_{r}^{d-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}dy\int\limits_{y+\varepsilon}^{d}\frac{f(P+y\vec{\mathbf{e}})-f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-y)^{\alpha+1}}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{d-\varepsilon}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy.$$

Осуществив преобразования во втором слагаемом, имеем

$$(\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-$$

$$-\alpha\int\limits_{r}^{d-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}dy\int\limits_{y+\varepsilon}^{d}\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-y)^{\alpha+1}}dt.$$

Сделаем замену переменной, изменим порядок интегрирования, затем сделаем обратную замену переменной вернувшись к прежним обозначениям

$$(\Im^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\alpha\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}(y-\varepsilon-r)^{\alpha-1}dy\int\limits_{y}^{d}\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-y+\varepsilon)^{\alpha+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\alpha\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}f(P+t\vec{\mathbf{e}})dt\int\limits_{r+\varepsilon}^{t}\frac{(y-\varepsilon-r)^{\alpha-1}}{(t-y+\varepsilon)^{\alpha+1}}dy=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\alpha\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}f(P+t\vec{\mathbf{e}})dt\int\limits_{r}^{t-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}(t-y)^{-\alpha-1}dy. \tag{2.2}$$

Осуществим следующие замены во внутреннем интеграле второго слагаемого правой части последнего равенства: $y_1=-y$, $r_1=-r$, $t_1=-t$, воспользуемся формулой (13.18) [7, с. 184] затем сделав обратную замену получим

$$\int\limits_{r}^{t-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}(t-y)^{-\alpha-1}dy=\int\limits_{t_1+\varepsilon}^{r_1}(r_1-y_1)^{\alpha-1}(y_1-t_1)^{-\alpha-1}dy_1=$$

$$=\frac{1}{\alpha\varepsilon^{\alpha}}\frac{(r_1-\varepsilon-t_1)^{\alpha}}{r_1-t_1}=\frac{1}{\alpha\varepsilon^{\alpha}}\frac{(t-\varepsilon-r)^{\alpha}}{t-r}.$$

Перепишем (2.2) с учетом полученного равенства, затем преобразуем и сделаем замену $t=\varepsilon\tau+r$

$$(\Im^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\left\{\int\limits_{r}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})(t-\varepsilon-r)^{\alpha}}{t-r}dt\right\}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})\left[(t-r)^{\alpha}_{+}-(t-\varepsilon-r)^{\alpha}_{+}\right]}{t-r}dt=$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{0}^{\frac{d-r}{\varepsilon}}\frac{t^{\alpha}_{+}-(t-1)^{\alpha}_{+}}{t}f(P+[\varepsilon t+r]\vec{\mathbf{e}})dt,\ t_{+}=\begin{cases}t,\ t\geqslant 0;\\ 0,\ t<0.\end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\mathcal{K}$ определенную в [7, с. 105] и имеющую следующие свойства

$$\mathcal{K}(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{t^{\alpha}_{+}-(t-1)^{\alpha}_{+}}{t}\in L_p(\mathbb{R}^1),\ \int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}(t)dt=1,\ \mathcal{K}(t)>0. \tag{2.4}$$

С учетом (2.3), (2.4), считая функцию f продолженной нулем за пределы области Ω, имеем

$$(\Im^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)-f(Q)=\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}(t)\left\{f(P+[\varepsilon t+r]\vec{\mathbf{e}})-f(P+r\vec{\mathbf{e}})\right\}dt. \tag{2.5}$$

Если же $d-\varepsilon<r\leqslant d$, то согласно (1.5) после замены переменной

$$(\Im^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)-f(Q)=$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-r)^{1-\alpha}}dt-f(Q)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}\frac{f[P+(d-t+r]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}}dt-f(Q). \tag{2.6}$$

Разобьем поверхность $\omega=\omega_1\cup\omega_2$, где ω_1 — множество всех точек ω для которых $d>\varepsilon$, ω_2 — множество всех точек ω для которых $d\leqslant\varepsilon$. С учетом (2.5), (2.6)

$$\|(\Im^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)-f\|^{p}_{L_p(\Omega)}=\int\limits_{\omega_1}d\chi\int\limits_{0}^{d-\varepsilon}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}(t)[f(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})-f(Q)]dt\right|^{p}r^{n-1}dr+$$

$$
+\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} \left| \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt - f(Q) \right|^{p} r^{n-1}dr+
$$

$$
+\int\limits_{\omega_2} d\chi \int\limits_{0}^{d} \left| \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt - f(Q) \right|^{p} r^{n-1}dr = I_1+I_2+I_3. \tag{2.7}
$$

Оценим I_1 используя обобщенное неравенство Минковского

$$
I_1^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{K}(t) \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{0}^{d-\varepsilon} |f(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})-f(Q)|^p r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt,
$$

введем обозначение

$$
\mathcal{K}(t) \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{0}^{d-\varepsilon} |f(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})-f(Q)|^p r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt = h(\varepsilon,t),
$$

имеем следующую оценку

$$
|h(\varepsilon,t)| \leqslant 2\mathcal{K}(t)\|f\|_{L_p(\Omega)},\ \forall\varepsilon>0. \tag{2.8}
$$

В силу свойства непрерывности в среднем в пространстве $L_p(\Omega)$, для любого фиксированного $0<t<\infty$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon,t) = 0. \tag{2.9}
$$

С учетом (2.8), (2.9), в силу мажорантной теоремы Лебега, имеем

$$
I_1 \to 0,\ \ \varepsilon\to 0.
$$

Используя неравенство Минковского оценим I_2

$$
I_2^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} \left| \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt \right|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} +
$$

$$
+\left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} |f(P+r\vec{\mathbf{e}})|^p\, r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} = I_{21}+I_{22}.
$$

С помощью обобщенного неравенства Минковского оценим I_{21}

$$
I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} \left| \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt \right|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \left\{ \int\limits_{\omega_1} \left[\int\limits_{d-\varepsilon}^{d} (d-t)^{\alpha-1} \left(\int\limits_{d-\varepsilon}^{t} |f(Q+(d-t)\vec{\mathbf{e}})|^p r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt \right]^{p} d\chi \right\}^{\frac{1}{p}}.
$$

Сделав замену переменной в интеграле, повторно применим обобщенное неравенство Минковского

$$
I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \left\{ \int\limits_{\omega_1} \left[\int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left(\int\limits_{d-\varepsilon}^{d-t} |f(Q+t\vec{\mathbf{e}})|^p r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt \right]^{p} d\chi \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d-t} |f(Q+t\vec{\mathbf{e}})|^p r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt.
$$

Оценим последнее выражение, представив в следующем виде

$$
I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left\{ \int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d-t} |f(P+[r+t]\vec{\mathbf{e}})|^p (r+t)^{n-1} \left(\frac{r}{r+t}\right)^{n-1} dr \right\}^{\frac{1}{p}} dt \leqslant
$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d+t-\varepsilon}^{d} |f(Q)|^p r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p}} dt \leqslant \frac{1}{\alpha} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} |f(Q)|^p r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Мы показали, что

$$I_{21} \leqslant \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} |f(Q)|^p r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \|f\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}.$$

Поскольку из предположений относительно области Ω сделанных в водной части следует $\operatorname{mess}\Omega_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$, то $I_{21}, I_{22} \to 0$. Следовательно $I_2 \to 0$. Применяя полностью аналогичные рассуждения убеждаемся в том, что $I_3 \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть $f = \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\psi$, $\psi \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{d-} f = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon} f = \psi.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$f(Q) - f(Q + \tau\vec{\mathbf{e}}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{d-r} \frac{\psi(Q + t\vec{\mathbf{e}})}{t^{1-\alpha}} dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\tau}^{d-r} \frac{\psi(Q + t\vec{\mathbf{e}})}{(t-\tau)^{1-\alpha}} dt =$$

$$= \tau^{\alpha-1} \int\limits_{0}^{d-r} \psi(Q + t\vec{\mathbf{e}}) k\left(\frac{t}{\tau}\right) dt, \ k(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}, \ 0 < t < 1; \\ t^{\alpha-1} - (t-1)^{\alpha-1}, \ t > 1. \end{cases}$$

Следовательно при $0 \leqslant r \leqslant d - \varepsilon$

$$(\psi^{-}_{\varepsilon} f)(Q) = \int\limits_{\varepsilon}^{d-r} \frac{f(Q) - f(Q + \tau\vec{\mathbf{e}})}{\tau^{\alpha+1}} d\tau = \int\limits_{\varepsilon}^{d-r} \tau^{-2} d\tau \int\limits_{0}^{d-r} \psi(Q + t\vec{\mathbf{e}}) k\left(\frac{t}{\tau}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{d-r} \psi(Q + t\vec{\mathbf{e}}) dt \int\limits_{\varepsilon}^{d-r} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \tau^{-2} d\tau = \int\limits_{0}^{d-r} \psi(Q + t\vec{\mathbf{e}}) t^{-1} dt \int\limits_{t/(d-r)}^{t/\varepsilon} k(s) ds.$$

Используя формулу (6.12) [7, с.106], получим

$$(\psi^{-}_{\varepsilon} f)(Q) \cdot \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} = \int\limits_{0}^{d-r} \psi(Q + t\vec{\mathbf{e}}) \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{K}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{d-r} \mathcal{K}\left(\frac{t}{d-r}\right) \right] dt,$$

поскольку в соответствии с (2.4)

$$\mathcal{K}\left(\frac{t}{d-r}\right) = [\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)]^{-1} \left(\frac{t}{d-r}\right)^{\alpha-1},$$

то

$$(\psi^{-}_{\varepsilon} f)(Q) \cdot \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} = \int\limits_{0}^{(d-r)/\varepsilon} \mathcal{K}(t) \psi(Q + \varepsilon t\vec{\mathbf{e}}) dt - \frac{f(Q)}{\Gamma(1-\alpha)(d-r)^{\alpha}}.$$

Без ограничения общности считаем функцию $\psi(Q)$ продолженной нулем за границу области Ω. Тогда с учетом (1.6), (2.4)

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon} f)(Q) - \psi(Q) = \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{K}(t) \left[\psi(Q + \varepsilon t\vec{\mathbf{e}}) - \psi(Q)\right] dt, \ 0 \leqslant r \leqslant d - \varepsilon.$$

Для значений $d - \varepsilon < r \leqslant d$ согласно (1.5), имеем

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon} f)(Q) - \psi(Q) = \frac{f(Q)}{\varepsilon^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} - \psi(Q).$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим оценку

$$\|(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon} f)(Q) - \psi(Q)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{K}(t) \ \|\psi(Q + \varepsilon t\vec{\mathbf{e}}) - \psi(Q)\|_{L_p(\Omega)} dt +$$

$$+\frac{1}{\alpha\Gamma(1-\alpha)}\|f\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}+\|\psi\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}.$$

Все три слагаемых правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, как это было показано для правой части (2.7). Теорема доказана.

3. Основные результаты

Следующая лемма может представлять интерес как самостоятельное утверждение.

Лемма 3.1. Имеет место вложение $H_0^1(\Omega)\subset\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}(L_2)$.

Доказательство. Вначале допустим, что $f\in C_0^\infty(\Omega)$. Рассмотрим

$$\|\psi_{\varepsilon_1}^- f-\psi_{\varepsilon_2}^- f\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^{d-\varepsilon_1}\left|\int\limits_{r+\varepsilon_1}^{r+\varepsilon_2}\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}+$$

$$+\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_{d-\varepsilon_1}^{d-\varepsilon_2}\left|\int\limits_{r+\varepsilon_1}^{d}\frac{f(Q)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt-\int\limits_{r+\varepsilon_2}^{d}\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}+$$

$$+\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_{d-\varepsilon_2}^{d}\left|\int\limits_{r+\varepsilon_1}^{d}\frac{f(Q)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt-\int\limits_{r+\varepsilon_2}^{d}\frac{f(Q)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Заметим, что поскольку $f\in C_0^\infty(\Omega)$ то для достаточно малого ε_1, $f(Q)=0,\, r>d-\varepsilon_1$. Из чего следует $I_2+I_3=0$. Осуществим замену переменной в I_1

$$I_1=\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^{d}\left|\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}[t+r])}{t^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}.$$

Используем обобщенное неравенство Минковского

$$I_1\leqslant\int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}t^{-\alpha-1}\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^{d}|f(Q)-f(Q+\vec{\mathbf{e}}t)|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}dt\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}t^{-\alpha}dt\leqslant\frac{C}{1-\alpha}\left(\varepsilon_1^{1-\alpha}-\varepsilon_2^{1-\alpha}\right),\; C>0.$$

Следовательно в силу теоремы 2.1 имеем $C_0^\infty(\Omega)\subset\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}(L_2)$. Пусть теперь $f\in H_0^1(\Omega)$, тогда существует последовательность $\{f_n\}\subset C_0^\infty(\Omega)$, $f_n\xrightarrow{H_0^1}f$. В силу доказанного $f_n=\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}\varphi_n$, $\{\varphi_n\}\in L_2(\Omega)$, таким образом

$$\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}\varphi_n\xrightarrow{L_2}f. \tag{3.1}$$

Покажем, что существует $\varphi\in L_2(\Omega)$, $\varphi_n\xrightarrow{L_2}\varphi$. Из теоремы 2.2 следует $\mathbf{D}_{b-}^{\alpha}u_n=\varphi_n$, введем обозначение $f_{n+m}-f_n=c_{n,m}$, будем иметь

$$\|\varphi_{n+m}-\varphi_n\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^{d}\left|\int\limits_{r}^{d}\frac{c_{n,m}(Q)-c_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^{d}\left|\frac{c_{n,m}(Q)}{(d-r)^{\alpha}}\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}=I_1+I_2.$$

Оценим I_1 используя обобщенное неравенство Минковского, затем выразим подынтегральную функцию через производную по направлению $\vec{\mathbf{e}}$

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}I_1=\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^d\left|\int\limits_0^{d-r}\frac{c_{n,m}(Q)-c_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}t)}{t^{\alpha+1}}dt\right|^2r^{n-1}dr\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\mathfrak{d}}t^{-\alpha-1}\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^d\left|c_{n,m}(Q)-c_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}t)\right|^2r^{n-1}dr\right)^{\frac12}dt=$$

$$=\int\limits_0^{\mathfrak{d}}t^{-\alpha-1}\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^d\left|\int\limits_0^t c'_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}\tau)d\tau\right|^2r^{n-1}dr\right)^{\frac12}dt.$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского, теоремой Фубини

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}I_1\leqslant\int\limits_0^{\mathfrak{d}}t^{-\alpha-1}\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^d r^{n-1}dr\int\limits_0^t\left|c'_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}\tau)\right|^2d\tau\int\limits_0^t d\tau\right)^{\frac12}dt=$$

$$=\int\limits_0^{\mathfrak{d}}t^{-\alpha-1/2}\left(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega}\left|c'_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}\tau)\right|^2dQ\right)^{\frac12}dt\leqslant\frac{\mathfrak{d}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\|c'_{n,m}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Рассмотрим I_2, выразим подынтегральную функцию через производную по направлению $\vec{\mathbf{e}}$

$$\Gamma(1-\alpha)I_2=\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^d\left|c_{n,m}(Q)\right|^2(d-r)^{-2\alpha}r^{n-1}dr\right)^{\frac12}=$$

$$=\left(\int\limits_{\omega}d\chi\int\limits_0^d(d-r)^{-2\alpha}\left|\int\limits_r^d c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)dt\right|^2r^{n-1}dr\right)^{\frac12}.$$

Используем обобщенное неравенство Минковского, затем оценим

$$\Gamma(1-\alpha)I_2\leqslant\left\{\int\limits_{\omega}\left[\int\limits_0^d c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)\left(\int\limits_0^t(d-r)^{-2\alpha}r^{n-1}dr\right)^{\frac12}dt\right]^2d\chi\right\}^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{\omega}\left[\int\limits_0^d c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{(n-1)/2}\left(\int\limits_0^t(d-r)^{-2\alpha}dr\right)^{\frac12}dt\right]^2d\chi\right\}^{\frac12}.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского получим

$$\Gamma(1-\alpha)I_2\leqslant\left\{\int\limits_{\omega}\left[\int\limits_0^d|c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)|^2t^{n-1}dt\int\limits_0^d d\tau\int\limits_0^{\tau}(d-r)^{-2\alpha}dr\right]d\chi\right\}^{\frac12}=$$

$$=\left\{\int\limits_{\omega}\left[\int\limits_0^d|c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)|^2t^{n-1}dt\int\limits_0^d(d-r)^{1-2\alpha}dr\right]d\chi\right\}^{\frac12}\leqslant\frac{\mathfrak{d}^{2(1-\alpha)}}{\sqrt{2(1-\alpha)}}\,\|c'_{n,m}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из очевидного факта фундаментальности последовательности $\{c'_{n,m}\}$ в смысле нормы $L_2(\Omega)$ следует $I_1,I_2\to0$. Следовательно последовательность $\{\varphi_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ существует ее предел некоторая функция $\varphi\in L_2(\Omega)$. Поскольку в силу леммы 2.1 оператор дробного интегрирования ограниченно действует в пространстве $L_2(\Omega)$, то

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi_n\xrightarrow{L_2}\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi.$$

Из чего следует с учетом (3.1) $f = \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)dQ = \int\limits_{\Omega} v(Q)(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u)(Q)dQ, \quad u,v \in H^1_0(\Omega). \tag{3.2}$$

Доказательство. Полагая $u,v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, осуществим следующие преобразования

$$\int\limits_0^d u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)r^{n-1}dr = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d r^{n-1}dr\int\limits_0^r \frac{(uv)(Q)-u(Q)v(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\frac{t^{n-1}}{r^{n-1}}dt+$$

$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d u(Q)v(Q)r^{n-1-\alpha}dx = I_1+I_2=I,$$

законность осуществленных преобразований вытекает из принадлежности u,v классу $C_0^{\infty}(\Omega)$. Применяя теорему Фубини, затем осуществив несложные преобразования, имеем

$$I_1 = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d r^{n-1}dr\int\limits_0^r \frac{(uv)(Q)-u(Q)v(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\frac{t^{n-1}}{r^{n-1}}dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{(uv)(Q)-u(Q)v(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d v(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{u(P+\vec{\mathbf{e}}t)-u(P+\vec{\mathbf{e}}r)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr+$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{(uv)(Q)-(uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr.$$

Рассмотрим теперь I_2. Заметим, что в силу леммы 3.1 $uv = \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\psi,\ \psi \in L_2(\Omega)$. Используя теорему Фубини, имеем

$$\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d (\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\psi)(Q)r^{n-1-\alpha}dr = \frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d \psi(P+\vec{\mathbf{e}}t)dt\int\limits_0^t \frac{r^{n-1-\alpha}}{(t-r)^{1-\alpha}}dr.$$

Используем формулу дробного интегрирования степенной функции (2.44) [7, с.47]

$$\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d \psi(P+\vec{\mathbf{e}}t)dt\int\limits_0^t \frac{r^{n-1-\alpha}}{(t-r)^{1-\alpha}}dr = \int\limits_0^d \psi(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt.$$

С учетом теоремы 2.2 имеем формулу

$$\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d (uv)(Q)r^{n-1-\alpha}dr = \int\limits_0^d (\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt. \tag{3.3}$$

Из последнего равенства следует

$$I_2 = \int\limits_0^d (\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{(uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)-(uv)(Q)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d u(Q)v(Q)r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr.$$

Сходимость интеграла во втором слагаемом последнего равенства имеет место поскольку $u,v \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Принимая во внимание вышесказанное

$$I_1+I_2 = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d v(P+\vec{\mathbf{e}}r)r^{n-1}dr\int\limits_r^d \frac{u(P+\vec{\mathbf{e}}r)-u(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d u(Q)v(Q)r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr=\int\limits_0^d v(Q)(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u)(Q)r^{n-1}dr.$$

Интегрируя по мере телесного угла имеем

$$\int\limits_{\Omega} u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)dQ=\int\limits_{\Omega} v(Q)(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u)(Q)dQ,\ u,v\in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{3.4}$$

Распространим последнее равенство. Положим $u,v\in H_0^1(\Omega)$, тогда существуют последовательности $\{u_k\},\{v_k\}\subset C_0^{\infty}(\Omega)$ сходящиеся в смысле нормы пространства $H_0^1(\Omega)$ соответственно к u и v. Используя неравенство Коши-Буняковского, неравенство (1.4) несложно показать

$$\int\limits_{\Omega} u_k(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v_k\right)(Q)dQ\to\int\limits_{\Omega} u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)dQ,\ k\to\infty. \tag{3.5}$$

В ходе доказательства леммы 3.1 было показано, что $\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u_k\xrightarrow{L_2}\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u\in L_2(\Omega)$. Полностью аналогично (3.5) убеждаемся в том, что

$$\int\limits_{\Omega} v_k(Q)(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u_k)(Q)dQ\to\int\limits_{\Omega} v(Q)(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u)(Q)dQ,\ k\to\infty. \tag{3.6}$$

Осуществляя предельный переход в левой и правой части равенства (3.4) с учетом (3.5),(3.6), получим интегральное тождество (3.2). Лемма доказана.

Симметризуем стандартным способом оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова. Рассмотрим оператор

$$\mathrm{D}^{\alpha}:H_0^1(\Omega)\to L_2(\Omega),\ \mathrm{D}^{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}+\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}\right),$$

имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Оператор D^{α} положительно определенный.

Доказательство. Положим f вещественнозначной. Для $f\in C_0^{\infty}(\Omega)$, оценим следующую разность

$$f(Q)(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}f^2\right)(Q)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{f^2(Q)-f(Q)f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+$$

$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}|f(Q)|^2r^{-\alpha}dr-\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{f^2(Q)-f^2(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt-$$

$$-\frac{(n-1)!}{2\Gamma(n-\alpha)}|f(Q)|^2r^{-\alpha}dr=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{[f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)]^2}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+$$

$$+\frac{(n-1)!}{2\Gamma(n-\alpha)}|f(Q)|^2r^{-\alpha}dr\geqslant 0.$$

Следовательно

$$f(Q)(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)\geqslant\frac{1}{2}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}f^2\right)(Q).$$

Далее используя теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_0^d f(Q)(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)r^{n-1}dr\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^d(\mathfrak{D}^{\alpha}f^2)(Q)r^{n-1}dr=$$

$$=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d dr\int\limits_0^r\frac{f^2(Q)-f^2(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}t^{n-1}dt+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d|f(Q)|^2r^{n-1-\alpha}dr=$$

$$=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d\frac{f^2(Q)-f^2(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d|f(Q)|^2r^{n-1-\alpha}dr=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^d(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}f^2)(Q)r^{n-1}dr+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d|f(Q)|^2r^{n-1-\alpha}dr+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d |f(Q)|^2 r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr = I_1,$$

В силу леммы 3.1 имеет место $f^2 \in \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}(L_2)$. Преобразуем первое слагаемое выражения I_1 по формуле (3.3). Суммируя после преобразования слагаемые в I_1, имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d |f(Q)|^2 r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr \geqslant \frac{\mathfrak{d}^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d |f(Q)|^2 r^{n-1}dr.$$

Интегрируя левую и правую части последнего неравенства по мере телесного конуса ω имеем

$$\langle f, \mathfrak{D}^{\alpha} f\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\|f\|^2_{L_2(\Omega)},\ f \in C_0^{\infty}(\Omega),$$
$$\lambda^2 = 2\Gamma(1-\alpha)\mathfrak{d}^{\alpha}.$$

Предположим теперь, что $f \in H_0^1(\Omega)$, существует последовательность $\{f_k\} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что

$$f_k \xrightarrow{H_0^1} f.$$

Из леммы 3.2, существования пределов (3.5), (3.6), следует

$$\langle f, \mathrm{D}^{\alpha} f\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\|f\|^2_{L_2(\Omega)},\ f \in H_0^1(\Omega).$$

Таким образом нами доказана полуограниченность снизу оператора D^{α}. Поскольку справедливо интегральное тождество (3.2), то оператор D^{α} симметричен. В силу того, что $\mathfrak{D}(\mathrm{D}^{\alpha}) \subset C_0^{\infty}(\Omega)$, оператор D^{α} плотно определен. Следовательно положительно определен. Теорема доказана.

Выводы

Таким образом, в данной работе доказан ряд утверждений имеющих аналоги в теории дробного исчисления одной переменной. В частности получены достаточные условия представимости дробным интегралом в направлении. Доказано интегральное тождество результатом которого является построение формально сопряженного оператора определенного на множестве функций представимых дробным интегралом в направлении. Доказана положительная определенность оператора полученного в результате суммирования оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова с формально сопряженным оператором.

Литература

[1] Нахушев А.М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101–109.

[2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва. Мир, 1972. 740 с.

[3] Кукушкин М.В. О весовых пространствах дробно-дифференцируемых функций // Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. 2016. Т. 227. Вып. 42. № 6. С. 60–69.

[4] Кукушкин М.В. Оценка собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах // Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. 2017. Т. 255. Вып. 46. № 6. С. 29–35.

[5] Киприянов И.А. О пространствах дробно-дифференцируемых функций // Изв. АН. СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 865–882.

[6] Киприянов И.А. Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 131. № 2. С. 238–241.

[7] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

References

[1] Nakhushev A.M. *O polozhitel'nosti operatorov nepreryvnogo i diskretnogo differentsirovaniia i integrirovaniia, ves'ma vazhnykh v drobnom ischislenii i v teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the positiveness of operators of continuous and discrete differentiation and integration that are very important in fractional calculus and in the theory of equations of a mixed type]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1998, Vol. 34, no. 1, pp. 101–109 [in Russian].

[2] Kato T. *Teoriia vozmushchenii lineinykh operatorov* [Perturbation theory for linear operators]. M.: Mir, 1972, 740 p. [in Russian].

[3] Kukushkin M.V. *O vesovykh prostranstvakh drobno-differentsiruemykh funktsii* [On the weighted spaces of fractionally differentiable functions]. *Nauchnye vedomosti BelGU, Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics], 2016, Vol. 227, Issue 42, no. 6, pp. 60–69 [in Russian].

[4] Kukushkin M.V. *Otsenka sobstvennykh znachenii zadachi Shturma-Liuvillia dlia differentsial'nogo operatora vtorogo poriadka s drobnymi proizvodnymi v mladshikh chlenakh* [Evaluation of the eigenvalues of Sturm-Liouville problem for a differential operator of the second order with fractional derivative in lower terms].*Nauchnye vedomosti BelGU, Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics], 2017, Vol. 255, Issue 46, no. 6, pp. 29–35 [in Russian].

[5] Kipriyanov I.A. *O prostranstvakh drobno-differentsiruemykh funktsii* [On the spaces of fractionally differentiable functions]. *Izv. An. SSSR. Ser. Matem.* [Proceedings of the Academy of Sciences: Mathematics], 1960, Vol. 24, Issue 6, pp. 865–882 [in Russian].

[6] Kipriyanov I.A. *Operator drobnogo differentsirovaniia i stepeni ellipticheskikh operatorov* [Operator of fractional differentiation and degrees of elliptic operators]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1960, Vol. 131, no. 2, pp. 238–241 [in Russian].

[7] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. [in Russian].

M.V. Kukushkin[2]

ON SOME QUALITATIVE PROPERTIES OF THE OPERATOR OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION IN KIPRIYANOV SENSE

In this paper we investigated the qualitative properties of the operator of fractional differentiation in Kipriyanov sense. Based on the concept of multidimensional generalization of operator of fractional differentiation in Marchaud sense we have adapted earlier known techniques of proof theorems of one-dimensional theory of fractional calculus for the operator of fractional differentiation in Kipriyanov sense. Along with the previously known definition of the fractional derivative in the direction we used a new definition of multidimensional fractional integral in the direction of allowing you to expand the domain of definition of formally adjoint operator. A number of theorems that have analogs in one-dimensional theory of fractional calculus is proved. In particular the sufficient conditions of representability of a fractional integral in the direction are received. Integral equality the result of which is the construction of the formal adjoint operator defined on the set of functions representable by the fractional integral in direction is proved.

Key words: fractional differentiation, operator of Marchaud, operator of Riemann-Liouville, fractional derivative in the direction, fractional integral, energetic space, formally conjugated operator, accretive operator.

Статья поступила в редакцию $30/\,VI/2017$.
The article received $30/\,VI/2017$.

[2] *Kukushkin Maksim Vladimirovich* (kukushkinmv@rambler.ru), Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automatization, 89a, Shortanova street, Nalchik, 360000, Russian Federation.