УДК 519.999

С.В. Кириченко[1]

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье рассмотрена нелокальная задача для модельного уравнения с доминирующей смешанной производной четвертого порядка. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи, в которой два из четырех условий являются нелокальными и представляют собой интегралы как по пространственной переменной, так и по переменной времени. Для доказательства предложен новый метод, основанный на эквивалентности поставленной задачи и системы уравнений второго порядка.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, доминирующая производная.

Введение

В статье изучается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = 0,$$

которое представляет собой частный случай уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - (bu_x)_x) - au_{xx} = f(x,t) \tag{N}$$

Уравнение (N) принято называть в современной литературе псевдогиперболическим уравнением. Однако его также часто называют уравнением с доминирующей производной. Для уравнения (N) рассматриваются как начально-краевые задачи, так и задачи типа задачи Гурса [1, 2]. В последнее время для уравнения (N) ставятся и изучаются также и нелокальные задачи [3–6], в которых нелокальные условия представлены интегральными либо по пространственной переменной, либо по переменной времени, которые заменяют собой краевые или начальные условия соответственно.

В предлагаемой работе рассмотрена задача с двумя интегральными условиями, причем одно из них — интеграл по пространственной переменной, а другое – интеграл по переменной времени. Заметим, что оба эти условия суть условия I рода, что всегда вызывает трудности при доказательстве разрешимости. В статье предложен метод, позволяющий преодолеть эти трудности.

1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = 0 \tag{1}$$

и поставим для него задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = \psi(x), \tag{4}$$

Кириченко Светлана Викторовна (svkirichenko@mail.ru), кафедра прикладной математики, информатики и информационных систем, Самарский государственный университет путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

$$\int_0^l H(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{5}$$

Функции $K(t), E(t)$ заданы на $[0,T]$, $\varphi(x), \psi(x), H(x)$ на $[0,l]$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$K \in C[0,T], E \in C^2(0,T) \cap C[0,T], \varphi \in C^2[0,l], \psi \in C^2[0,l], H \in C[0,l], \tag{6}$$

а также условиям согласования

$$\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0, E(0) = \int_0^l H(x)\varphi(x)dx, \int_0^l H(x)\psi(x)dx = \int_0^T K(t)E(t)dt. \tag{7}$$

Обозначим

$$\tilde{C}(Q_T) = \{u : u \in C^2(Q_T), \quad u_{xxtt} \in C(Q_T)\}$$

Теорема. Если функции $K(t), E(t), \varphi(x), \psi(x), H(x)$ удовлетворяют в $\overline{Q}_T$ условиям (6), (7), то найдутся такие числа l_0, T_0, что при $l < l_0,\ T < T_0$ существует единственное решение задачи (1–5) $u(x,t) \in \tilde{C}(Q_T)$.

Доказательство.

Сведем поставленную задачу к двум задачам для уравнений второго порядка. Для этого введем новые неизвестные функции $u_{tt} = v(x,t),\ u_{xx} = w(x,t)$.

Пусть $u(x,t)$ — решение поставленной задачи. Так как $u_{xxtt} = u_{tt} - u_{xx}$, то нетрудно видеть, что пара функций (v, w) будет решением системы уравнений

$$w_{tt} + w = v,$$

$$v_{xx} - v = -w,$$

удовлетворяющим условиям

$$w(x,0) = \varphi''(x),$$

$$\int_0^T K(t)w(x,t)dt = \psi''(x),$$

$$v(0,t) = 0,$$

$$\int_0^l H(x)v(x,t)dx = E''(t),$$

которую для дальнейшего нам будет удобно представить в виде двух задач.

Задача 1. Найти функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению

$$w_{tt} + w = v \tag{8}$$

и условиям

$$w(x,0) = \varphi''(x), \tag{9}$$

$$\int_0^T K(t)w(x,t)dt = \psi''(x). \tag{10}$$

Задача 2. Найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению

$$v_{xx} - v = -w \tag{11}$$

и условиям

$$v(0,t) = 0, \tag{12}$$

$$\int_0^l H(x)v(x,t)dx = E''(t). \tag{13}$$

Каждую из этих задач можно рассматривать как нелокальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром.

Решив систему уравнений второго порядка (8) и (11) с условиями (9, 10, 12, 13), мы тем самым решим поставленную задачу (1–5). Для этого сначала покажем их эквивалентность.

Запишем уравнение (11) в виде $v - w - v_{xx} = 0$. Так как $v(x,t) = u_{tt},\ w(x,t) = u_{xx}$, то $v_{xx}(x,t) = u_{xxtt}$. Подставляя в последнее уравнение, приходим к уравнению (1).

Теперь равенство $u_{tt}=v(x,t)$ проинтегрируем дважды по t, тогда получаем

$$u(x,t)-u(x,0)-tu(x,0)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau v(x,\tau')d\tau' d\tau.$$

Подставим $x=0$:

$$u(0,t)-u(0,0)-tu(0,0)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau v(0,\tau')d\tau' d\tau.$$

Так как $v(0,t)=0,\ u(0,0)=0$, то $u(0,t)=0$.

Далее из условия (13) имеем:

$$\int\limits_0^l H(x)vdx=\int\limits_0^l H(x)u_{tt}dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\int\limits_0^l H(x)udx)=E''(t).$$

Тогда,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\int\limits_0^l H(x)udx-E(t))=0\Rightarrow\int\limits_0^l H(x)udx-E(t)=At+B.$$

Подставим $t=0$, получим

$$\int\limits_0^l H(x)u(x,0)dx-E(0)=B\Rightarrow\int\limits_0^l H(x)\varphi(x)dx-E(0)=B.$$

В силу условий согласования следует, что $B=0$.

Умножим равенство $\int\limits_0^l H(x)udx-E(t)=At$ на функцию $K(t)$ и проинтегрируем по t

$$\int\limits_0^T K(t)\int\limits_0^l H(x)udxdt-\int\limits_0^T K(t)E(t)dt=A\int\limits_0^T K(t)tdt.$$

Поменяем пределы интегрирования в первом слагаемом, а ко второму слагаемому применим условия (7):

$$\int\limits_0^l H(x)\int\limits_0^T K(t)udtdx-\int\limits_0^l H(x)\psi(x)dxt=A\int\limits_0^T K(t)tdt.$$

Если выполняются условия (4), то левая часть последнего равенства обращается в нуль. Следовательно, $A=0$. В результате приходим к равенству $\int\limits_0^l H(x)udx=E(t))$.

Перейдем к решению задач 1 и 2.

Решая уравнение (8) методом вариации постоянной, получим:

$$w(x,t)=A(x)cost+B(x)sint+\int\limits_0^t v(x,\tau)sin(t-\tau)d\tau.$$

Применяя условия (8), (9), находим

$$A(x)=\varphi''(x),$$

$$B(x)=\frac{\psi''(x)-\varphi''(x)\int\limits_0^T K(t)costdt-\int\limits_0^T v(x,\tau)\int\limits_\tau^T K(t)sin(t-\tau)dtd\tau}{\int\limits_0^T K(t)sintdt}.$$

Введем обозначения:

$$æ(\tau)=\int\limits_\tau^T K(t)sin(t-\tau)dt,$$

$$b(x,t) = (æ(0))^{-1} sint[\psi''(x) - \varphi''(x) \int\limits_0^T K(t)costdt] + \varphi''(x)cost.$$

Тогда

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x,\tau)sin(t-\tau)d\tau - \frac{sint}{æ(0)} \int\limits_0^T æ(\tau)v(x,\tau)d\tau + b(x,t). \tag{14}$$

Решая аналогично задачу 2, получаем

$$v(x,t) = \frac{E''(t)shx}{h(0)} - \int\limits_0^x w(\xi,t)sh(x-\xi)d\xi + \frac{shx}{h(0)} \int\limits_0^l h(\xi)w(\xi,t)d\xi, \tag{15}$$

где

$$h(\xi) = \int\limits_\xi^l H(x)sh(x-\xi)dx.$$

Введем обозначения:

$$V(\xi,t) = \int\limits_0^t v(\xi,\tau)sin(t-\tau)d\tau - \frac{sint}{æ(0)} \int\limits_0^T æ(\tau)v(\xi,\tau)d\tau,$$

$$Gv = \int\limits_0^x sh(x-\xi)V(\xi,t)d\xi + \frac{shx}{h(0)} \int\limits_0^l h(\xi)V(\xi,t)d\xi, \tag{16}$$

$$F(x,t) = \frac{E''(t)shx}{h(0)} - \int\limits_0^x b(\xi,t)sh(x-\xi)d\xi + \frac{shx}{h(0)} \int\limits_0^l h(\xi)b(\xi,t)d\xi.$$

Подставляя (14) в (15), получим:

$$v(x,t) = Gv + F(x,t). \tag{17}$$

Рассмотрим полученное уравнение (17) и докажем, что оно однозначно разрешимо. Для этого покажем, что оператор $z(v) = Gv + F$ сжимающий.

Расстояние зададим формулой $\rho(v_1,v_2) = \max\limits_{Q_T} |v_1 - v_2|$.

Рассмотрим теперь $|z(v_1) - z(v_2)| = |Gv_1 - Gv_2|$.

$$|Gv_1 - Gv_2| \leqslant |\int\limits_0^x sh(x-\xi)(V_1 - V_2)d\xi| + |\frac{shx}{h(0)}| \cdot |\int\limits_0^l h(\xi)(V_1 - V_2)d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant |V_1 - V_2|(|\int\limits_0^x sh(x-\xi)d\xi| + |\frac{shx}{h(0)}| \cdot |\int\limits_0^l h(\xi)d\xi|).$$

Оценим теперь $|V_1 - V_2|$:

$$|V_1 - V_2| \leqslant |\int\limits_0^t (v_1 - v_2)sin(t-\tau)d\tau| + |\frac{sint}{æ(0)}| \cdot |\int\limits_0^T æ(\tau)(v_1 - v_2)d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant |v_1 - v_2|(|\int\limits_0^t sin(t-\tau)d\tau| + |\frac{sint}{æ(0)}| \cdot |\int\limits_0^T æ(\tau)d\tau|).$$

Преобразуем следующие интегралы

$$\int\limits_0^l h(\xi)d\xi = \int\limits_0^l \int\limits_\xi^l H(x)sh(x-\xi)dxd\xi = \int\limits_0^l H(x) \int\limits_0^x sh(x-\xi)d\xi dx = \int\limits_0^l H(x)(chx - 1)dx;$$

$$\int\limits_0^T æ(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \int\limits_\tau^T K(t)sin(t-\tau)dtd\tau = \int\limits_0^T K(t) \int\limits_0^t sin(t-\tau)d\tau dt = \int\limits_0^T K(t)(1 - cost)dt.$$

Окончательно получаем:

$$|Gv_1 - Gv_2| \leqslant |v_1 - v_2|\cdot [|chx - 1| + \frac{|shx| \int\limits_0^l |H(x)|\cdot |chx - 1| dx}{|\int\limits_0^l H(x) shx dx|}]\cdot$$

$$\cdot [|1 - cost| + \frac{\int\limits_0^T |K(t)|(1 - cost) dt}{|\int\limits_0^T K(t) sint dt|}].$$

Найдем такие значения переменных x и t, чтобы неотрицательная постоянная

$$C = [|chx - 1| + \frac{|shx| \int\limits_0^l |H(x)|\cdot |chx - 1| dx}{|\int\limits_0^l H(x) shx dx|}]\cdot [|1 - cost| + \frac{\int\limits_0^T |K(t)|(1 - cost) dt}{|\int\limits_0^T K(t) sint dt|}] \leqslant 1.$$

Неравенство $C \leqslant 1$ будет верным, если положим:

$$|chx - 1| + \frac{|shx| \int\limits_0^l |H(x)|\cdot |chx - 1| dx}{|\int\limits_0^l H(x) shx dx|} \leqslant 1$$

и

$$|1 - cost| + \frac{\int\limits_0^T |K(t)|(1 - cost) dt}{|\int\limits_0^T K(t) sint dt|} \leqslant 1.$$

Решая эти два неравенства, получаем, что они верны, если $x < 0,95$, $t < 57$.

В результате получаем, что оператор Gv, определяемый формулой (16), является сжимающим, поэтому функция $v(x,t)$ однозначно определяется из уравнения (17). В силу условий теоремы и эквивалентности задач следует существование единственного решения поставленной задачи (1–5).

Литература

[1] Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. Минск. 1999. 13с. Деп. в ВИНИТИ. 28.06.99 № 2059–В99.

[2] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. о-во, 2001. 226 с.

[3] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарский университет, 2012. 196 с.

[4] Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2008. № 2. С. 22–28.

[5] Кириченко С.В. Задача с нелокальным интегральным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. 2014. № 3. С. 42–51.

[6] Юлдашев Т.К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2016. Вып. 1(47). С. 119–127.

References

[1] Utkina E.A. *Ob odnom uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka* [About one partial equation of the fourth order]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], Minsk, 1999, 13 p. VINITI. 28.06.99 № 2059–B99 [in Russian].

[2] Zegalov V.I., Mironov A.N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential equations with the senior partial derivatives]. Kazan: Kazanskoe matem. o-vo, 2001, 226 p. [in Russian].

[3] Pulkina L.S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with nonclassical conditions for the hyperbolic equations]. Samara: Samarskii universitet, 2012, 196 p. [in Russian].

[4] Beylina N.V. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal task with integral conditions for the pseudo-hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2008, no. 2, pp. 22–28 [in Russian].

[5] Kirichenko S.V. *Zadacha s nelokal'nym integral'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia chetvertogo poriadka* [Task with a nonlocal integral condition for the pseudo-hyperbolic equation of the fourth order]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3, pp. 42–51 [in Russian].

[6] Uldashev T.K. *Ob odnom smeshannom differentsial'nom uravnenii chetvertogo poriadka* [About one mixed differential equation of the fourth order]. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University], 2016, Issue 1(47), pp. 119–127 [in Russian].

S.V. Kirichenko[2]

ABOUT ONE NONLOCAL TASK FOR THE EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH THE DOMINATING MIXED DERIVATIVE

In the article the nonlocal task for the model equation from the dominating mixed derivative of the fourth order is considered. The unique solubility of an objective in which two of four conditions are nonlocal is proved and represent integrals both on a space variable, and on time variable. For the proof the new method based on equivalence of an objective and set of equations of the second order is offered.

Key words: pseudo-hyperbolic equation, nonlocal task, integral conditions, dominating derivative.

Статья поступила в редакцию 10/*VII*/2017.
The article received 10/*VII*/2017.

[2] *Kirichenko Svetlana Viktorovna* (svkirichenko@mail.ru), Department of Applied Mathematics, Informatics and Information Systems, Samara State University of Railway Transport, 18, 1-st Besymanniy per., Samara, 443066, Russian Federation.