УДК 511.334

Г.В. Воскресенская[1]

ФУНКЦИИ МАККЕЯ И ТОЧНОЕ РАССЕЧЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ[2]

В статье рассматриваются структурные проблемы в теории модулярных форм. Полностью изучен феномен точного рассечения для пространств $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, где χ — квадратичный характер с условием $\chi(-1)=(-1)^k$. Доказано, что для уровней $N\neq 3,\ 17,\ 19$ рассекающая функция является мультипликативным эта–произведением целого веса. Таблица рассекающих функций приведена в статье. Показано, что пространство рассекающей функции одномерно. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна-Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, дивизор функции, структурные теоремы, формула Коэна-Остерле.

Введение

В настоящей статье мы рассмотрим структурные проблемы пространств модулярных форм. Основные классические определения и обозначения можно найти в книгах [1–4]. Опишем модельную задачу для наших исследований. В классическом случае уровня $N=1$ рассматривается полная модулярная группа $\Gamma=\Gamma(1)=SL_2(\mathbf{Z})$, известен следующий факт: любая параболическая форма четного веса $k\geqslant 12$ $g(z)\in S_k(\Gamma)$ (для меньших весов их нет) является произведением дельта-функции $\Delta(z)$ на модулярную (не обязательно параболическую) форму $h(z)$ веса $k-12$. При $k=12$ пространство $S_{12}(\Gamma)=<\Delta(z)>$. Имеем,

$$S_k(\Gamma)=\Delta(z)\cdot M_{k-12}(\Gamma).$$

Такая ситуация называется *точным рассечением.* Пусть V — линейное пространство, состоящее из функций.

Определение.

Говорят, что имеет место *точное рассечение*, если любая функция из пространства V есть произведение фиксированной функции $g(z)$ на функцию из пространства W, то есть

$$V=g(z)\cdot W,$$

$g(z)$ называется *рассекающей функцией.*

В этой статье мы исследуем ситуацию для уровней $N>1$. В случае четного веса характер рассекающей функции тривиальный, в случае нечетного веса характер χ рассекающей функции квадратичный с условием $\chi(-1)=-1$.

Заметим, что $\Delta(z)=\eta^{24}(z)$, где $\eta(z)$ — эта–функция Дедекинда, коэффициенты Фурье $\Delta(z)$ мультипликативны. Функция $\eta(z)$ не имеет нулей на верхней полуплоскости, это существенно. Всего эта–произведений с мультипликативными коэффициентами целого веса существует ровно двадцать восемь, они были открыты в 1985 году Дж. МакКеем и двумя его коллегами. Их называют *мультипликативными эта–произведениями* или *функциями МакКея.*

Мы покажем, что в рассматриваемых случаях точное рассечение имеет место в том и только том случае, когда рассекающая функция — мультипликативное ета–произведение, если уровень $N\neq 3,17,19$. Исключительные уровни также исследованы.

Теоремы 1–2 в статье цитируются, теоремы 3-6 являются новыми.

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00154А.

Сначала мы приведем известные факты, которые являются основой исследований, а затем доказательства новых результатов.

1. Функции МакКея

Определение.

$\eta-$**частным** называется функция вида: $f(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j \in \mathbf{N},\ t_j \in \mathbf{Z}$. Если $t_j \in \mathbf{N}\ \forall j$, то $f(z)$ называется $\eta-$**произведением.**

Линейная комбинация $\eta-$частных называется $\eta-$полиномом. Приведем мультипликативные эта–произведения целого веса с указанием весов и характеров.

Далее эти функции появятся в наших рассмотрениях в качестве рассекающих функций.

Об их интересных разнообразных свойствах можно прочесть в [5–8].

Таблица 1

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8 z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1

2. Порядок в параболических вершинах

Теорема 1.

Пусть $m,\ n,\ N-$натуральные числа, $n|N,\ \ (m,n)=1$.
Если $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 2, то порядок нуля в параболической вершине $\frac{m}{n}$ равен

$$\frac{N}{24}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n,a_j)^2 t_j}{(n,\frac{N}{n})na_j}.$$

Непосредственно проверяется, что порядок функции МакКея в каждой параболической вершине равен 1.

Эта теорема была доказана А. Биаджиоли в 1990 году [10].

3. Формула размерности

Эта формула была открыта в 1977 французскими математиками Ж. Остерле и А. Коэном [4].

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p — максимальную степень, в которой p делит N, через s_p — максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p, s_p, p) = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r' + 1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geqslant r_p \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod 2, \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod 3, \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \pmod 3, \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

Теорема 2.

Если k — целое, χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1) = (-1)^k$, то

$$dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) =$$

$$\frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1 + p^{-1}) - \frac{1}{2} \cdot \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p) + \nu_k \cdot \sum_{x: x^2+1 \equiv 0 (N)} \chi(x) + \mu_k \cdot \sum_{x: x^2+x+1 \equiv 0(N)} \chi(x)$$

Если $k > 2$, то $dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$. Если $k \leqslant 0$, то $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi))$.

Теорема 3.

Пусть $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ — мультипликативное эта–произведение с характером χ.
Тогда имеет место точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi^k) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-1}).$$

Доказательство.

Для мультипликативных эта–произведений χ – квадратичный характер,
$\chi(-1) = -1$. Пусть $g(z) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi^k)$. Тогда $ord_s g(z) \geqslant 1$ для любой параболической вершины s. Если $f(z)$ — мультипликативное эта–произведение с характером χ веса l, тогда

$$h(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \in M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-1}),$$

так как $ord_s h(z) \geqslant 0$. Здесь мы используем тот факт, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — модулярные формы уровня N с характерами χ_1 и χ_2 соответственно, то
$f_1(z) \cdot f_2(z)$ является модулярной формой уровня N с характером $\chi_1 \cdot \chi_2$.

4. Одномерность пространства рассекающей функции

Теорема 4.

Если

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi_1),$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi_2)$, $\quad \chi = \chi_1 \cdot \chi_2$, то $dim\ S_l(\Gamma_0(N), \chi_2) = 1$.

Доказательство.

Для уменьшения громоздкости введем обозначения

$$V = S_k(\Gamma_0(N), \chi), \quad W = M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi_1), \quad U = S_l(\Gamma_0(N), \chi_2).$$

Допустим противное: $dim\ S_l(\Gamma_0(N), \chi_2) > 1$.

Тогда пространство $f(z) \cdot W \subset V$ для любого $f(z) \in U$.

Пусть $h(z) \in W$, и $h(z)$ не является параболической формой, s — такая параболическая вершина, в которой она не обращается в ноль. Пусть $f(z)$ — такая функция из U, что $ord_s(f)$ минимальный. Пусть $g(z)$ такая функция из U, что $ord_s\ g(z) > ord_s\ f(z)$. Имеем, $f(z) \cdot h(z) = g(z) \cdot h_1(z), \quad h(z),\ h_1(z) \in W$. Но это равенство невозможно, так как порядок в s у функции справа больше, чем порядок в s у функции слева. Значит, все параболические формы из W имеют одинаковый порядок в s, но это также невозможно, так как если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — нормированные формы из W, то $f_1(z) - f_2(z)$ имеет больший порядок в s. Полученные противоречия доказывают теорему.

5. Интерпретация компонент формулы размерности

Известно, что индекс $\mu_0(N) = |\Gamma : \Gamma_0(N)| = N \cdot \prod_{p|N}(1+p^{-1})$. Поэтому первое слагаемое в сумме справа равно $\frac{k-1}{12} \cdot \mu_0(N)$.

Второе слагаемое обозначим через $\frac{1}{2} \cdot D_1 = \frac{1}{2} \cdot \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p)$.

Покажем, что D_1 равно количеству $\mu_0(N)$ параболических вершин относительно $\Gamma_0(N)$ [4]. Известно, что

$$\mu_\infty(N) = \sum_{d|N} \phi((d, \frac{N}{d})).$$

Сначала покажем, что $\mu_\infty(N)$ — мультипликативная функция. Пусть N и M — взаимно простые натуральные числа, тогда $\forall d|N,\ \delta|M$ числа $(d, \frac{N}{d})$ и $(\delta, \frac{N}{\delta})$ взаимно просты; когда d пробегает все делители N, δ пробегает все делители M, $d\delta$ пробегает все делители NM. Получаем,

$$\mu_\infty(N) \cdot \mu_\infty(M) = \sum_{d|N} \phi((d, \frac{N}{d})) \cdot \sum_{\delta|M} \phi((\delta, \frac{M}{\delta})) =$$

$$\sum_{d|N} \sum_{\delta|M} \phi((d, \frac{N}{d})) \cdot \phi((\delta, \frac{M}{\delta})) = \sum_{d|N} \sum_{\delta|M} \phi((d, \frac{N}{d}) \cdot (\delta, \frac{M}{\delta})) =$$

$$\sum_{d|N} \sum_{\delta|M} \phi((d\delta, \frac{NM}{d\delta})) = \sum_{\tilde{d}|MN} \phi((\tilde{d}, \frac{NM}{\tilde{d}})) = \mu_\infty(NM).$$

Пусть $N = p^{2r'}$. Тогда

$$\mu_\infty(N) = 2(\phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + ... + \phi(p^{r'-1})) + \phi(p^{r'}) =$$
$$2(1 + p - 1 + p^2 - p + ... + p^{r'-1} - p^{r'-2}) + p^{r'} - p^{r'-1} = p^{r'} + p^{r'-1}.$$

Пусть $N = p^{2r'+1}$. Тогда

$$\mu_\infty(N) = 2(\phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + ... + \phi(p^{r'})) = 2p^{r'}.$$

Теперь из формулы для $\lambda(r_p, s_p, p)$ следует, что $D_1 = \mu_0(N)$. Также получим: если число n свободно от квадратов, $(n, m) = 1$, то

$$\mu_\infty(n \cdot m^2) = \prod_{p^{2l+1}\|n} 2 \cdot p^{l_p} \cdot \prod_{p^{2l+1}\|m} p^{l_p} + p^{l_p - 1}.$$

Обозначим через $D_{2,\chi} = \sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)} \chi(x)$. Если χ — тривиальный характер, то $D_{2,\chi} = D_2$. Если N делится на 4 или на простое $p \equiv 3(4)$, то $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

Если $N = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ или $N = 2p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$, где $p_i \equiv 1(4)$, то $D_2 = 2^s$ — количество делителей числа $\tilde{N} = p_1...p_s$. Далее будет показано, что если χ — квадратичный характер с условием $\chi(-1) = -1$, то $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

Обозначим через $D_{3,\chi} = \sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)} \chi(x)$. Если χ — тривиальный характер, то $D_{3,\chi} = D_3$. Если N делится на 2, 9 или на простое $p \equiv 2(3)$, то $D_3 = 0$.

Если $N = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ или $N = 3p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$, где $p_i \equiv 1(3)$, то $D_3 = 2^s$ — количество делителей числа $\tilde{N} = p_1...p_s$.

Параметр $D_{3,\chi}$ даст нетривиальный вклад в результат наших исследований.
Сейчас мы докажем формулу, которая станет основой нашей техники.

Теорема 5.

Пусть n свободно от квадратов, $(n, m) = 1$, тогда

$$\frac{\mu_0(n \cdot m^2)}{\mu_\infty(n \cdot m^2)} = m \cdot \prod_{p^{2l_p+1} \| n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2}.$$

Доказательство.

Проведем преобразования:

$$\frac{\mu_0(n \cdot m^2)}{\mu_\infty(n \cdot m^2)} = \frac{n \cdot m^2 \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p^{2l_p+1} \| n} 2 \cdot p^{l_p} \cdot \prod_{p^{l_p} \| m} p^{l_p} + p^{l_p - 1}} =$$
$$n \cdot m \cdot \frac{\prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p^{l_p} \| m} p^{l_p} + p^{l_p-1}}{\prod_{p^{2l_p+1} \| n} 2 \cdot p^{l_p} \cdot \prod_{p^{l_p} \| m} p^{l_p} + p^{l_p-1}} =$$
$$n \cdot m \cdot \prod_{p^{2l_p+1} \| n} \frac{p+1}{2 \cdot p^{l_p+1}} = m \cdot \prod_{p^{2l_p+1} \| n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2}.$$

Формула получена.

6. Свойства характеров

В этом параграфе мы докажем некоторые свойства квадратичных характеров χ с условием $\chi(-1) = -1$, которые существенно используются в доказательствах.

Утверждение 1.

Если $N = p^l$, $l \geqslant 2$, p — нечетное простое число, то не существует квадратичного характера со свойством $\chi(-1) = -1$ по модулю N.

Доказательство.

Пусть g — первообразный корень по модулю p^l, $\chi(g) = -1$, иначе характер был бы тривиальным. Имеем,

$$-1 \equiv g^{\frac{p^{l-1}(p-1)}{2}} (mod\ p^l), \quad \chi(-1) = \chi(g) \cdot \chi(g)^{\frac{p-1}{2}} = -\chi(g)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Если $p \equiv 3 (mod\ 4)$, то $\chi(-1) = 1$, если $p \equiv 1 (mod\ 4)$, то $-1 \equiv h^2 (mod\ p^l)$, $h = g^{\frac{p^{l-1}(p-1)}{4}}$, следовательно $\chi(-1) = 1$.

Утверждение 2.

Если $N = p_1^{l_1} ... p_s^{l_s}$, $l_j \geqslant 2$, p_j — нечетные простые числа, то не существует квадратичного характера со свойством $\chi(-1) = -1$ по модулю N.

Доказательство.

Такой характер должен представляться в виде произведения $\chi = \chi_1 ... \chi_s$ характеров χ_j по модулю $p_j^{l_j}$, среди которых хотя бы один χ_j таков, что $\chi_j(-1) = -1$. Но такого характера нет в силу утверждения 1.

Утверждение 3.

Не существует нетривиального квадратичного характера со свойством
$\chi(-1) = -1$ по модулю 2.

Доказательство.

Это следует из того, что $1 \equiv -1 (mod\ 2)$.

Утверждение 4.

Не существует нетривиального квадратичного характера со свойством $\chi(-1) = -1$ по модулю простого числа $p \equiv 1 (mod\ 4)$.

Доказательство.

Пусть g — первообразный корень по модулю p.
Имеем,

$$-1 \equiv h^2 (mod\ p), \quad h = g^{\frac{p-1}{4}}, \quad \chi(-1) = 1.$$

Из этого следует, что если χ — нетривиальный характер, то $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.
Из доказанных утверждений получаем очевидное следствие.

Следствие.

Не существует квадратичного характера со свойством $\chi(-1) = -1$ по модулю N, если
1) $N = p_1^{l_1} ... p_s^{l_s}, \quad l_j \geqslant 2, \quad p_j$ — нечетные простые числа;
2) $N = 2p_1^{l_1} ... p_s^{l_s}, \quad l_j \geqslant 2, \quad p_j$ — нечетные простые числа;
3) $N = p_1 ... p_s, \quad p_j \equiv 1 (mod\ 4), \ p_j$ — нечетные простые числа;
4) $N = 2p_1 ... p_s, \quad p_j \equiv 1 (mod\ 4), \ p_j$ — нечетные простые числа;
5) $N = p_1^{k_1} ... p_s^{k_s} \cdot q_1^{l_1} ... q_t^{l_t}, k_j \geqslant 1, l_j \geqslant 2, \quad p_j \equiv 1 (mod\ 4), \ q_j \equiv 3 (mod\ 4), \ p_j \ q_j$ — нечетные простые числа;
6) $N = 2p_1^{k_1} ... p_s^{k_s} \cdot q_1^{l_1} ... q_t^{l_t}, \quad k_j \geqslant 1, l_j \geqslant 2, \quad p_j \equiv 1 (mod\ 4), \ q_j \equiv 3 (mod\ 4), \ p_j \ q_j$ — нечетные простые числа.

7. Формулировка основной теоремы

Доказательство этой теоремы образуют рассуждения следующих пунктов 8 и 9 вместе с результатом теоремы 3.

Теорема 6.

Пусть χ — квадратичный характер по модулю $N \neq 3, \ 17, \ 19$ такой, что $\chi(-1) = -1, \ k, l$ — положительные числа. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi^k) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-l}),$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi^l)$ тогда и только тогда $f(z)$ — мультипликативное эта–произведение.
При $N = 3, \ 17, \ 19$ точное рассечение также имеет место, рассекающая функция не является эта–произведением. Причем должны выполняться условия
$N = 17, \ k \equiv 2(4), k \geqslant 6, \ l = 2; \ N = 19, \ k \equiv 2(6), k \geqslant 8, \ l = 2.$
Здесь χ^l — тривиален, если l — четно.

8. Рассечение функциями нечетного веса с характерами

Как мы уже отмечали в этом случае $D_2 = 0$. Разберем сначала случай, когда $D_3 = 0, \quad D_1 = D_{1,\chi}$.

8.1. Рассечение функциями веса 1 при $D_3 = 0, \quad D_1 = D_{1,\chi}$

Если $dim\ S_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$, то $dim\ S_2(\Gamma_0(N)) = dim\ M_1(\Gamma_0(N), \chi)$.
Вычислим эти размерности и получим уравнение.
$dim\ M_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(N)$,
$dim\ S_2(\Gamma_0(N)) = 1 + \frac{N}{12} \cdot \mu_0(N) - \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(N)$.
Отсюда получим

$$\frac{\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} = 12.$$

Это условие является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным. Учитывая теорему 5 , получим для $N = m^2 \cdot n, \quad (m,n) = 1, \quad n$ свободно от квадратов.

$$m \cdot \prod_{p^{2l_p+1} \| n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2} = 12.$$

Проанализировав это равенство элементарными методами, получим

$N = 23,\ 33,\ 35,\ 42,\ 44,\ 56,\ 60,\ 63,\ 80,\ 96,\ 108,\ 128,\ 144.$

Для $N = 23,\ 44,\ 63,\ 80,\ 108,\ 128,\ 144$ существуют одномерные пространства $S_1(\Gamma_0(N), \chi) = < f(z) >$, порожденные мультипликативными эта–произведениями, указанными в таблице 1. Далее, пусть $g(z) \in S_1(\Gamma_0(N), \psi)$.

Тогда $\frac{g(z)}{f(z)} \in M_0(\Gamma_0(N), \psi \cdot \chi^{-1})$, так как порядок $f(z)$ в каждой параболической вершине равен 1. Это возможно лишь при условии, что $\psi \cdot \chi^{-1}$ — тривиальный характер, пространство $M_0(\Gamma_0(N), \psi \cdot \chi^{-1})$ состоит из констант. То есть $\psi = \chi$.

Покажем теперь, что для уровней $N = 33,\ 35,\ 42,\ 56,\ 60,\ 96$ не существует параболических форм веса 1 с характером χ. Пусть N — один из этих уровней, кроме 42. Для каждого из этих уровней существует параболическая форма $g_N(z)$ веса 2 уровня N с тривиальным характером, у которой все нули сосредоточены в параболических вершинах и имеют порядок 2, первый коэффициент этой формы равен 1.

Имеем

$$deg(div\ \ g_N(z)) = 2\mu_\infty(N).$$

Если $f(z) \in S_1(\Gamma_0(N), \chi)$, то порядок этой формы в каждой параболической вершине не менее 1,

$$deg(div\ \ g_N(z)) = deg(div\ \ f^2(z)).$$

Следовательно, функция $f(z)$ в каждой параболической вершине имеет ноль порядка 1, других нулей нет. Если считать, что первый коэффициент функции $f(z)$ равен 1, то $g_N(z) = f^2(z)$. Но анализ первых коффициентов функции $g_N(z)$ показывает, что она не является квадратом другого ряда Фурье.

Выпишем эти функции явно:

$g_{33}(z) = \eta(33z)\eta(11z)\eta(3z)\eta(z)$,

$g_{35}(z) = \eta(35z)\eta(7z)\eta(5z)\eta(z)$,

$g_{56}(z) = \eta(28z)\eta(14z)\eta(4z)\eta(2z)$,

$g_{60}(z) = \eta(30z)\eta(10z)\eta(6z)\eta(2z)$,

$g_{96}(z) = \eta(24z)\eta(12z)\eta(8z)\eta(4z)$.

Для уровня $N = 42$ ситуация аналогична. Контрольная функция имеет вес 4 $g_{42}(z) = \eta(42z)\eta(21z)\eta(14z)\eta(7z)\eta(6z)\eta(3z)\eta(2z)\eta(z)$, ее ряд Фурье не является четвертой степенью другого ряда Фурье.

Теперь рассмотрим рассекающие функции веса 3. Из условия $dim\ \ S_3(\Gamma_0(N),\ \chi) = 1$ получим

$$\frac{2\mu_0(N)}{12} = \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(N) + 1.$$

Пусть l — четное. Из условия $dim\ \ S_{l+3}(\Gamma_0(N),\ \chi) = dim\ \ M_l(\Gamma_0(N))$, получаем

$$\frac{3\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} = 12.$$

Из этих двух равенств получим $\mu_\infty(N) = 6$. Если $N = m^2 \cdot n$, то

$$\mu_\infty(N) = \prod_{p^{2l_p+1} \| n} 2 \cdot p^{l_p} \cdot \prod_{p^{l_p} \| m} p^{l_p} + p^{l_p - 1} = 6.$$

Получим $N = 16$ или $N = 4p$, p — нечетное. Размерность $dim\ \ S_3(\Gamma_0(4p),\ \chi) = 1$ только для $p = 3$. Для $N = 12,\ 16$ существуют мультипликативные эта–произведения $f(z)$, порождающие $S_3(\Gamma_0(N),\ \chi)$. Как и выше можно показать, что характер определяется однозначно.

Далее, если бы точное рассечение обеспечивалось параболической формой веса $k \geqslant 5$, то выполнялось бы условие

$$\frac{k\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} = 12.$$

При нечетном $k \geqslant 5$ это невозможно.

8.2. Рассечение при условии $D_3 = 0, \quad D_{1,\chi} < D_1$

Пусть $N = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$, так как характер χ нетривиален, то $k_j = 1$, но в этом случае $r_{p_j} = 1$, $2s_{p_j}$ может равняться 0 или 2, но в обоих случаях $D_{1,\chi} = D_1$. Учитывая свойства характеров, доказанные в пункте , получаем, что $4|N$.

8.2.1. Уровни 4 и 8

Пусть $\tilde{\chi}$ — характер по модулю 2^α, тогда $\tilde{\chi}$ определяется значениями $\tilde{\chi}(-1)$ и $\tilde{\chi}(5)$, числа - 1 и 5 — образующие $(\mathbf{Z}/\mathbf{2}^\alpha\mathbf{Z})^*$. [9].

Пространство $M_0(\Gamma_0(4))$ двумерно, его базис образуют функции $\frac{\eta^8(4z)}{\eta^4(2z)}$, $\frac{\eta^8(2z)}{\eta^4(4z)}$.

Рассмотрим характер

$$\chi_4(d) = \begin{cases} 1, & d \equiv 1 \quad (4), \\ -1, & d \equiv 3 \quad (4). \end{cases}$$

Здесь $D_1 = 3$, $D_{1,\chi} = 2$. Пространство $S_5(\Gamma_0(4), \ \chi_4)$ одномерно и порождено мультипликативным эта–произведением $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$. Пространство $S_3(\Gamma_0(4), \ \chi_4)$ одномерно и порождено мультипликативным эта–произведением $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$.

Имеем $\tilde{\chi}(-1) = -1$. Если $\tilde{\chi}(d) = -1$, при $d \equiv 5 \ (8)$, то $D_1 = D_{1,\chi}$. Такую ситуацию мы сейчас не рассматриваем.

Остается единственный вариант

$$\tilde{\chi} = \begin{cases} -1, & d \equiv 3 \quad (8), \\ 1, & d \equiv 5 \quad (8), \\ -1, & d \equiv 7 \quad (8). \end{cases}$$

В этом случае $\tilde{\chi} = \chi_4$.

8.2.2. Анализ других уровней $N : 4|N$

Проанализируем условие $dim \ S_k(\Gamma_0(N), \ \chi) = 1$, $4|N$, $D_{1,\chi} < D_1$.

Используя формулу размерности, получим оценку

$$2 \leqslant \frac{k\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} \leqslant 11.$$

В явном виде

$$2 \leqslant k \cdot m \cdot \prod_{p^{2l_p+1}\|n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2} \leqslant 11.$$

Проведя анализ элементарными методами, получим значения
$k = 1$, $N = 4, \ 8, \ 16, \ 20, \ 24, \ 28, \ 32, \ 36, \ 40, \ 64, \ 72, \ 100$;
$k = 3$, $N = 4, \ 8$;
$k = 5$, $N = 4$.

Покажем, что реализуются только два варианта, которые мы рассмотрели в предыдущем пункте:
$k = 3$, $N = 8$;
$k = 5$, $N = 4$.

Пусть N равняется одному из уровней $N = 36, \ 32 \ 24, \ 20$. Если пространство $S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ одномерно и порождено $g_N(z)$, то $g_N^2(z) \in S_2(\Gamma_0(N)$, но пространство $S_2(\Gamma_0(N)$ для этих уровней одномерно и порождено мультипликативными эта–произведениями. Если первый коэффициент функции $g_N(z)$ равен 1, то получим
$g_{36}^2(z) = \eta^4(6z)$,
$g_{32}^2(z) = \eta^2(8z)\eta^2(4z)$,
$g_{24}^2(z) = \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$,
$g_{20}^2(z) = \eta^2(10z)\eta^2(2z)$.

Но если $f(z)$ — мультипликативное эта–произведение, и $f(z) = g^2(z)$, то $g(z)$ модулярной формой не является.

Пусть $N = 40, \ 64, \ 72$.

Пусть $S_1(\Gamma_0(N), \chi) = < g(z) >$. Тогда функция $g(z) \in S_1(\Gamma_0(2N), \chi)$, но для каждого такого $2N$ пространство $S_1(\Gamma_0(2N), \psi)$ порождается мультипликативным эта–произведением с характером ψ, тогда

$$\frac{g(z)}{f(z)} \in M_0(\Gamma_0(2N), \chi \cdot \psi^{-1}).$$

Если характер $\chi \cdot \psi^{-1}$ — тривиальный, то $g(z) = c \cdot f(z)$, что невозможно, так как у $g(z)$ уровень N, а если этот характер нетривиален, то пространство $M_0(\Gamma_0(2N), \chi \cdot \psi^{-1})$ должно быть нулевым, но $g(z)$ — ненулевая функция.

Рассмотрим уровни $N = 4,\ 8,\ 16$.

Если $S_1(\Gamma_0(N), \chi) = < g(z) >$, то $g^2(z) \in S_2(\Gamma_0(32))$, но это пространство порождено $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, и корень из этой функции не является модулярной формой.

Пусть теперь $N = 100$.

Если N_1 — нечетно, и модуль χ не делится на 2, то в формуле для размерности $dim\ S_k(\Gamma_0(2^\alpha N_1, \chi))$ имеет место равенство $D_1 = D_{1,\chi}$ в силу того, что значения $r_2 = 2,\ s_2;\ r_5 = 0, 1, 2,\ s_5 = 2$.

В заключение заметим, что так как $S_3(\Gamma_0(8), \chi_4)$ одномерно, то $S_3(\Gamma_0(8), \chi_4) = \{0\}$, так как оно было бы собственным подпространством.

9.3. Условие $D_3 \neq 0$.

В этом параграфе мы изучаем только нечетные уровни. Рассмотрим сначала уровень $N = 3$. Пространство $S_k(\Gamma_0(3), (\frac{d}{3}))$ одномерно только при $k = 7$. Вычисления размерностей показывают, что имеет место точное рассечение параболической формой веса 7 с указанным характером, которая, однако, не является эта–частным.

Далее $D_3 \neq 0$ в случае $N = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$ или $N = 3 \cdot p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$, где $p_j \equiv 1(3)$. Если x — решение сравнения $x^2 + x + 1 \equiv 0(N)$, то $x^3 \equiv 1(N),\ x \not\equiv 1(N)$. Тогда $\chi(x) = 1$, иначе $\chi(1) = -1$, что невозможно. Учитывая информацию о характерах, получим $N = p_1...p_s$ или $N = 3 \cdot p_1...p_s$. В этом случае $D_1 = D_{1,\chi}$, так как уровень не делится на 4. Вычисляем $D_1 = D_3 = D_{3,\chi} = 2^s$.

Если имеет место точное рассечение и $dim\ S_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$, то

$$dim\ S_3(\Gamma_0(N), \chi) = dim\ M_2(\Gamma_0(N)) \neq 0.$$

$$dim\ M_2(\Gamma_0(N)) = \frac{\mu_0(N)}{12} + \frac{1}{2} \cdot D_1 - \frac{1}{3} \cdot D_3,$$

$$dim\ S_3(\Gamma_0(N, \chi)) = \frac{2\mu_0(N)}{12} - \frac{1}{2} \cdot D_1 + \frac{1}{3} \cdot D_3,$$

получаем равенство

$$\frac{\mu_0(N)}{12} = 2^s - \frac{2}{3} \cdot 2^s = \frac{2^s}{3}.$$

$$\mu_0(N) = N \cdot \prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p}) = 2^{s+2}.$$

Это равенство приводит к условию $(p_1+1)...(p_s+1) = 2^{s+2}$, или $4(p_1+1)...(p_s+1) = 2^{s+2}$. Это реализуется только при $s = 1, p = 7$.

Но на самом деле этот уровень соответствует другой ситуации: $dim\ S_3(\Gamma_0(N), (\frac{d}{7})) = 1$. В этом случае имеет место точное рассечение мультипликативным эта–произведением $\eta^3(7z)\eta^3(z)$. Пространства меньших весов уровня 7 — нулевые.

Пусть далее $k \geqslant 5, \quad k \equiv 1(3)$.

$$dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)(p_1 - 1)...(p_s - 1) - 2^{s-1} = 1.$$

$$(k-1)(p_1 - 1)...(p_s - 1) - 2^{s-1} = 1 + 2^{s-1}.$$

Получаем неравенство из условия $p_j \geqslant 7$.

$$(k-1) \cdot 6^s \leqslant 1 + 2^{s-1}.$$

$$(k-1) \cdot 3^s \leqslant \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2} \leqslant 1.$$

Получим противоречие. Аналогично исследуются остальные случаи:
$k \equiv 0,\ 2(3)$ и $N \equiv 3 \cdot p_1...p_s$. возможностей точного рассечения здесь также нет.

9. Рассечение функциями четного веса

Известно, что $dim\ S_{12}(\Gamma) = 1$. Значит, $\forall N > 1,\ dim\ S_k(\Gamma_0(N)) > 1$. Следовательно, достаточно проверить веса $l \leqslant 12$. Если $dim\ S_2(\Gamma_0(p)) > 1$, то $dim\ S_k(\Gamma_0(N)) > 1,\ \forall k \geqslant 2$ и уровня N, делящегося на p. Поэтому для точного рассечения необходимым условием является $dim\ S_2(\Gamma_0(p)) \leqslant 1$, где p — простой делитель уровня N. Это условие выполняется для $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 17,\ 19$. Далее в таблице мы укажем все четные l и уровни N такие, что $dim\ S_l(\Gamma_0(N)) = 1$, и $dim\ S_k(\Gamma_0(N)) = 0$ при $k < l$. Если N_1 делится на N, $N_1 > N$, то $dim\ S_l(\Gamma_0(N_1)) > 1$, и точное рассечение невозможно. Поэтому все приведенные в таблице случаи исчерпывают все возможности точного рассечения параболическими формами четного веса с тривиальным характером. Во всех случаях, кроме $N = 17, 19$ рассекающая функция — мультипликативное эта–произведение. Для уровней $N = 17, 19$ точное рассечение имеет место только для весов, указанных в теореме 6. Таким образом, все случаи рассмотрены, и теорема 6 доказана.

Таблица 2

N	$Min\ l$
11, 12, 14,15, 17, 19, 20, 27, 36	2
5, 8,9	4
3,4,7	6
2	8
1	12

Литература

[1] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[2] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.

[3] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence. 2004. 216 p.

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[6] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

[7] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // LNM. 1976. V. 627. P. 69–78.

[8] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат.обз. 2017. Т. 136. С. 103–137.

[9] Чудаков Н.Г. Введение в теорию L — функций Дирихле. М.: Гостехиздат, 1947. 204 с.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

References

[1] Koblitz N. *Vvedenie v ellipticheskie krivye i moduliarnye formy* [Introduction in elliptic curves and modular forms]. M.:Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[2] Knapp A. *Ellipticheskie krivye* [Elliptic curves]. M.: Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[3] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. *L.N.M.*, 1987, Vol. 1395, pp. 173–200 [in English].

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence, 2004, 216 p. [in English].

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98 [in English].

[6] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262 [in English].

[7] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. *LNM*, 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].

[8] Voskresenskaya G.V. *Eta-funktsiia Dedekinda v sovremennykh issledovaniiakh* [Dedekind's eta–function in modern investigations]. *Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovrem. mat. i ee pril. Temat.obz.* [Journal of Mathematical Sciences], 2017, Vol. 136, pp. 103–137 [in Russian].

[9] Chudakov N.G. *Vvedenie v teoriiu L — funktsii Dirikhle* [Introduction in Dirichlet L —functions]. M.:Gostekhizdat, 1947, 204 p. [in Russian].

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV, no. 4, pp. 273–300 [in Russian].

G.V. Voskresenskaya[3]

MACKAY FUNCTIONS AND EXACT CUTTING IN SPACES OF MODULAR FORMS[4]

In the article we consider structure problems in the theory of modular forms. The phenomenon of the exact cutting for the spaces $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, where χ is a quadratic character with the condition $\chi(-1) = = (-1)^k$. We prove that for the levels $N \neq 3,\ 17,\ 19$ the cutting function is a multiplicative eta–product of an integral weight. In the article we give the table of the cutting functions. We prove that the space of an cutting function is one–dimensional. Dimensions of the spaces are calculated by the Cohen-Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, divisor of function, structure theorems, Cohen-Oesterle formula.

Статья поступила в редакцию 29/*VI*/2017.
The article received 29/*VI*/2017.

[3] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (galvosk@mail.ru), Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Samara, Russian Federation.

[4]The work is performed with the financial support of the grant of the Russian Foundation for Basic Research 16-01-00154A.