МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 624.07

А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина[1]

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ УСЛОВИЕМ ЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

В статье рассматривается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний неоднородного стержня, упруго закрепленного на одном конце, а поведение стержня на другом его конце подлежит определению. Условие переопределения задается в виде интеграла по пространственной переменной. В статье получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи в пространстве Соболева. Доказательство существования и единственности решения задачи базируется на полученных в работе априорных оценках.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, обратная задача, интегральное условие переопределения.

Введение

В статье изучается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t),$$

состоящая в определении как ее решения, так и режима на одном из концов интервала изменения пространственной переменной.

Эту задачу можно рассматривать как математическую модель процесса колебаний стержня переменного сечения, способ закрепления одного из концов которого нам известен, а второго — нет.

Колебательные процессы могут возникать в любой механической системе. Причинами их появления для механизмов разнообразных по конструкции и областям применения могут являться как внутренние источники (неуравновешенность сил и моментов, неравномерность вращения, переменная жесткость опор и т. п.), так и внешние (аэродинамические нагрузки, инерционные нагрузки). Конструктивные элементы многих механизмов могут быть представлены как стержни, зачастую переменного сечения. Например, в газотурбинных авиационных двигателях это лопатки компрессора и турбины ([1, с. 291], [2, с. 270]), в самолетостроении – это крылья большого удлинения [3], в металлообрабатывающем оборудовании — это валы приводов подач и главного движения, включая шпиндель ([4, с. 191]), в устройствах ультразвуковой обработки материалов и сборки (разборки) соединений – волноводы (концентраторы) ([5, с. 174]). Поэтому в различных областях техники приходится решать задачи о колебаниях сложных стержневых систем. Для обеспечения надежной работы сложной современной техники (авиационных двигателей, многоцелевых станков с числовым программным управлением, газоперекачивающих агрегатов и т. д.) в процессе ее эксплуатации проводят диагностические процедуры, что позволяет определить текущее техническое состояние и оценить возможность дальнейшей работы на прогнозируемый период времени с помощью неразрушающего контроля. Приборы виброакустической диагностики невозможно установить рядом с непосредственным источником колебаний, к тому же таких источников может быть много. Поэтому анализ результатов измерений и принятие решений по управлению приходится проводить на основе косвенной информации о процессе колебаний, которая обычно поступает в виде некоторого среднего значения. В математической модели такая информация обычно представлена в виде интеграла.

Таким образом, следствия протекания колебательных процессов могут быть различными, как и причины, их вызывающие, поэтому естественно возникает необходимость теоретического изучения колебаний

Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

с целью определения допустимых областей изменения параметров, влияющих на протекание процесса, и качественных свойств решений соответствующих математических задач. Исследованию математических моделей колебательных процессов посвящено значительное количество статей. Отметим здесь некоторые из них, наиболее близкие к тематике нашей статьи [7–10] и обратим внимание на список литературы в них.

В нашей статье рассматривается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения, состоящая в определении как ее решения, так и режима на одном из концов интервала изменения пространственной переменной.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим задачу о колебании стержня, один конец которого, $x = 0$, закреплен упруго, а закон движения второго конца, $x = l$, не задан и подлежит определению. Таким образом, мы приходим к обратной задаче, которая заключается в следующем: найти пару функций $(u(x,t), h(t))$, удовлетворяющих уравнению

$$Lu \equiv u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1.1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$

краевым условиям

$$u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = h(t) \tag{1.3}$$

и условию переопределения, в качестве которого часто задается интегральное среднее искомого решения [11–13]

$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{1.4}$$

Заметим, что однородность начальных данных не ограничивает общности, но упрощает многие преобразования.

Задача (1.1)–(1.4) может быть трактована как задача управления, а именно, как задача определения таких условий на входные данные, которые позволят найти функцию $h(t)$, позволяющую сохранить заданную энергию $E(t)$.

Многие авторы для доказательства разрешимости обратных задач используют следующую схему: сначала решается прямая задача, в нашем случае это задача (1.1)–(1.3), при этом функция $h(t)$ считается временно известной, а затем применяется условие переопределения. Если, как в рассматриваемой задаче, условие переопределения задано в виде (1.4), то задача сводится к операторному уравнению первого рода относительно неизвестной функции $h(t)$ [11; 12; 14] Этот метод не всегда оказывается эффективным, в частности, когда неизвестная функция входит в краевое условие. Мы применим другой подход, который подробно реализован в следующем разделе статьи.

2. Разрешимость задачи

В этом разделе мы сформулируем и докажем однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.4), но сначала введем определения и обозначения, для чего нам потребуется сделать некоторые предварительные преобразования.

Пусть (u, h) — решение задачи (1.1)–(1.3), $K(l) \neq 0$ и выполняются условия согласования

$$\int\limits_0^l K(x)u(x,0)dx = E(0), \quad \int\limits_0^l K(x)u_t(x,0)dx = E'(0). \tag{2.1}$$

Проинтегрируем равенство (1.1), умноженное на $K(x)$, по промежутку $(0,l)$. Учитывая условия (1.3) и (1.4), получим

$$E''(t) - a(l,t)K(l)h(t) + a(l,t)K'(t)u(l,t) - a(0,t)[\alpha K(0) + K'(0)]u(0,t) -$$
$$- \int\limits_0^l [(aK')_x - Kc]udx = \int\limits_0^l Kfdx. \tag{2.2}$$

Обозначив
$$H(x,t)=\frac{K(x)c(x,t)-(a(x,t)K'(x))_x}{a(l,t)K(l)},\quad \beta(t)=-\frac{a(0,t)(\alpha K(0)+K'(0)}{a(l,t)K(l))},$$
$$\gamma=\frac{K'(l)}{K(l)},\quad g(t)=\frac{E''(t)-\int_0^l Kf dx}{a(l,t)K(l)},$$
перепишем (2.2) так:
$$h(t)=\beta u(0,t)+\gamma u(l,t)+\int\limits_0^l H(x,t)u(x,t)dx+g(t). \tag{2.3}$$

Пусть теперь выполняются (1.1)–(1.3) и (2.3). Проинтегрировав равенство (1.1), умноженное на $K(x)$, по промежутку $(0,l)$, получим
$$\int\limits_0^l K(x)u_{tt}dx-a(l,t)K(l)h(t)+a(l,t)K'(t)u(l,t)-a(0,t)[\alpha K(0)+K'(0)]u(0,t)-$$
$$-\int\limits_0^l [(aK')_x-Kc]udx=\int\limits_0^l Kf dx.$$
Так как по предположению выполняется (2.3), то выполняется и (2.2), но тогда
$$\int\limits_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx=E''(t),$$
что можно переписать в виде уравнения
$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx-E(t)\right]=0.$$
Из условий согласования (2.1) получаем нулевые начальные данные, которым должна удовлетворять искомая функция этого дифференциального уравнения, поэтому решением полученной задачи Коши может быть только нуль, стало быть,
$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx=E(t),$$
что означает выполнение условия (1.4).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма. Если $K(l)\neq 0$ и выполняются условия согласования (2.1), то задачи (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (2.3) эквивалентны.

Доказанная лемма позволяет рассматривать вместо задачи (1.1)–(1.4) задачу (1.1)–(1.3), (2.3), преимущество которой заключается в явном представлении функции $h(t)$ через функцию $u(x,t)$. Возможность такого представления подсказывает выбор метода доказательства разрешимости задачи, что будет продемонстрировано ниже. Не менее существенным является и тот факт, что коэффициенты уравнения (1.1) суть функции, зависящие от обеих переменных и не заданы явно. Произвольность коэффициентов не позволяет применить метод Фурье либо рассчитывать на возможность получения общего решения уравнения. Поэтому изучение вопроса о существовании решения задачи мы начнем с введения определения слабого решения. Для этого получим тождество, на котором это определение будет базироваться, используя стандартную процедуру [15], а именно, проинтегрируем по частям равенство $\int_0^T\int_0^l(Lu-f)vdxdt=0$, где $v\in C^1(\bar Q_T)$ и $v(x,T)=0$ в предположении, что $u(x,t)$ — решение прямой задачи (1.1)–(1.3). Получим
$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt-\alpha\int\limits_0^T a(0,t)u(0,t)v(0,t)dt=$$
$$=\int\limits_0^T a(l,t)h(t)v(l,t)dt+\int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt. \tag{2.4}$$
Обозначим
$$\hat W_2^1(Q_T)=\{v: v\in W_2^1(Q_T),\quad v(x,T)=0,$$

где $W_2^1(Q_T)$ — пространство Соболева.

Определение. Пару функций $(u(x,t),h(t))$ будем называть слабым решением задачи (1.1)–(1.3), (2.3), если $u \in W_2^1(Q_T)$, $u(x,0)=0$ и удовлетворяет тождеству (2.4) для всех функций $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, а функция $h(t)$ удовлетворяет (2.3) в смысле равенства функций из $L_2(0,T)$.

Теорема. Пусть выполняются условия

$$a, c \in C(Q_T),\ \ a_t \in C(Q_T), f \in L_2(Q_T),$$

$$K \in C[0,T],\ \ K(l) \neq 0,\ \ K'(l)=0,\ \ \alpha K(0) - K'(0) = 0,$$

$$E \in C^2[0,T], \quad \alpha > 0,$$

а также условия согласования (2.1). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1.1)–(1.3), (2.3).

Доказательство. Аппроксимируем слабое решение $(u(x,t),h(t))$, положив $u^0=0$ и определив (u^m,h^m) равенствами

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t^m v_t + a u_x^m v_x + c u^m v)dxdt - \alpha\int_0^T a(0,t)u^m(0,t)v(0,t)dt =$$

$$= \int_0^T a(l,t)h^m(t)v(l,t)dt + \int_0^T\int_0^l fvdxdt, \tag{2.5}$$

$$h^m(t) = \int_0^l H(x,t)u^{m-1}dx + g(t). \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что функция u^m, удовлетворяющая тождеству (2.5), является слабым решением прямой задачи (1.1)–(1.3), которая представляет собой частный случай задачи для многомерного гиперболического уравнения, рассмотренной в монографии О.А. Ладыженской ([15, с. 225]). Условия теоремы позволяют воспользоваться сформулированным в [15] результатом об однозначной разрешимости этой задачи в слабом смысле. Для дальнейшего нам потребуется оценка этого решения, вывод которой мы кратко продемонстрируем. Будем рассматривать уравнение (1.1) при $f=0$. Объяснение этого выбора будет очевидно ниже.

Для построения аппроксимаций $u^{mN}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N c_k(t)w_k(x)$ слабого решения $u^m(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) выбирается базис $\{w_k\}$ из $W_2^1(Q_T)$, а $c_k(t)$ находятся из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^{mN}w_j + a u_x^{mN}w_j' + c u^{mN}w_j)dx + \alpha a(0,t)u^{mN}(0,t)w_j(0) = a(l,t)h^m(t)w_j(l).$$

Умножив каждое из этих соотношений на $c_j'(t)$, просуммировав по j от 1 до N, а затем проинтегрировав по $(0,\tau)$, $\tau \in [0,T]$, получим

$$\int_0^\tau\int_0^l (u_{tt}^{mN}u_t^{mN} + a u_x^{mN}u_{xt}^{mN} + c u^{mN}u_t^{mN})dxdt+$$

$$+\alpha\int_0^\tau a(0,t)u^{mN}(0,t)u_t^{mN}(0,t)dt = \int_0^\tau a(l,t)h(t)u_t^{mN}(l,t)dt.$$

Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\int_0^l [(u_t^{mN}(x,\tau))^2 + a(u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx + \alpha a(0,\tau)(u^{mN}(0,\tau))^2 =$$

$$= \int_0^\tau\int_0^l a_t(u^{mN})^2dxdt - 2\int_0^\tau\int_0^l c u^{mN}u_t^{mN}dxdt + \alpha\int_0^\tau a_t(0,t)(u^{mN}(0,t))^2dt -$$

$$-2\int_0^\tau a(l,t)h_t(t)u^{mN}(l,t)dt + 2\int_0^\tau a_t(l,t)h(t)u^{mN}(l,t)dt. \tag{2.7}$$

Оценим правую часть последнего равенства. В силу условий теоремы и гиперболичности уравнения (1.1) всюду в $\bar{Q}_T$ найдутся такие положительные числа a_0, a_1, c_0, p такие, что

$$a(x,t) \geqslant a_0, \max_{\bar{Q}_T}\{|a|, |a_t|\} \leqslant a_1, \max_{\bar{Q}_T}|c| \leqslant c_0, \;\; p^2 = \max_{[0,T]}\int_0^l H^2(x,t)dx.$$

Применив теперь неравенства Коши и "Коши с ε", получим

$$\Big|\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^{mN})^2dxdt\Big| \leqslant a_1\int_0^\tau\int_0^l(u^{mN})^2dxdt;$$

$$\Big|-2\int_0^\tau\int_0^l cu^{mN}u_t^{mN}dxdt\Big| \leqslant c_0\int_0^\tau\int_0^l[(u^{mN})^2+(u^{mN})^2]dxdt;$$

$$\Big|\int_0^\tau a_t(0,t)(u^{mN}(0,t))^2dt\Big| \leqslant a_1\int_0^\tau(u^{mN}(0,t))^2dt;$$

$$\Big|-2\int_0^\tau a(l,t)h_t(t)u^{mN}(l,t)dt\Big| \leqslant a_1\varepsilon\int_0^\tau(h_t^m(t))^2dt+\frac{a_1}{\varepsilon}\int_0^\tau(u^{mN}(l,t))^2dt;$$

$$\Big|2\int_0^\tau a_t(l,t)h(t)u^{mN}(l,t)dt\Big| \leqslant a_1\varepsilon\int_0^\tau(h^m(t))^2dt+\frac{a_1}{\varepsilon}\int_0^\tau(u^{mN}(l,t))^2dt.$$

Для оценки интегралов, содержащих следы искомого решения на боковой границе воспользуемся неравенствами

$$u^2(0,t) \leqslant 2l\int_0^l u_x^2dx+\frac{2}{l}\int_0^l u^2dx, \qquad u^2(l,t) \leqslant 2l\int_0^l u_x^2dx+\frac{2}{l}\int_0^l u^2dx,$$

которые вытекают из представлений

$$u(0,t)=\int_x^0 u_\xi d\xi+u(x,t), \qquad u(l,t)=\int_x^l u_\xi d\xi+u(x,t)$$

и доказаны, например, в [16]. Тогда из (2.7) следует неравенство

$$\int_0^l[(u_t^{mN}(x,\tau))^2+a(u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx+\alpha a(0,\tau)(u^{mN}(0,\tau))^2 \leqslant$$

$$\leqslant P\int_0^\tau\int_0^l[(u^{mN})^2+(u_t^{mN})^2+(u_x^{mN})^2]dxdt+a_1\varepsilon\int_0^\tau[(h^m)^2+(h_t^m)^2]dt,$$

где постоянная P выражается через $a_1, c_0, l, \varepsilon^{-1}$. К обеим частям полученного неравенства прибавим неравенство

$$\int_0^l(u^{mN}(x,\tau))^2dx \leqslant \tau\int_0^\tau\int_0^l(u_t^{mN})^2dxdt,$$

которое является следствием представления $u^{mN}(x,\tau)=\int_0^\tau u_t^{mN}dt$, что приводит нас к следующему неравенству

$$m_0\int_0^l[(u_t^{mN}(x,\tau))^2+(u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx \leqslant$$

$$\leqslant M_0\int_0^\tau\int_0^l[(u^{mN})^2+(u_t^{mN})^2+(u_x^{mN})^2]dxdt+a_1\varepsilon\int_0^\tau[(h^m)^2+(h_t^m)^2]dt, \tag{2.8}$$

где

$$m_0=\min\{1,a_0\}, \quad M_0=\max\{\frac{4a_1(1+\varepsilon)+c_0\varepsilon}{l\varepsilon}, c_0+1, 4a_1l\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\}.$$

Применив к последнему неравенстве лемму Гронуолла, получаем

$$\int_0^l [(u_t^{mN}(x,\tau))^2 + (u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx \leqslant \frac{a_1}{m_0}\varepsilon e^{\frac{M_0}{m_0}\tau}\int_0^T [(h^m)^2 + (h_t^m)^2]dt,$$

и после интегрирования по $\tau \in [0,T]$ наша оценка готова:

$$||u^{mN}||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}||h^m||_{W_2^1(0,T)}.$$

Здесь мы обозначили $C^2 = \frac{a_1}{M_0}(e^{\frac{M_0}{m_0}T} - 1)$. Так как в полученной оценке C не зависит от N, то и

$$||u^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}||h^m||_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.9}$$

Вернемся к построению аппроксимаций (u^m, h^m). Так как $u^0 = 0$, то из (2.6) находим h^1. На следующем шаге из (2.5) находим u^1 как решение прямой задачи. Продолжая этот процесс, получим последовательность приближенных решений (u^m, h^m). Покажем, что эта последовательность сходится.

Обозначим $z^m = u^m - u^p$, $\quad r^m = h^m - h^p$. Тогда справедливы соотношения, вытекающие из (2.5) и (2.6) соответственно

$$\int_0^T\int_0^l (-z_t^m v_t + az_x^m v_x + cz^m v)dxdt - \alpha\int_0^T a(0,t)z^m(0,t)v(0,t)dt =$$

$$= \int_0^T a(l,t)h^m(t)v(l,t)dt, \tag{2.10}$$

$$h^m(t) = \int_0^l H(x,t)z^{m-1}dx. \tag{2.11}$$

Из (2.9) следует оценка

$$||z^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}||r^m||_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.12}$$

Из равенства (2.11)

$$(r^m(t))^2 \leqslant k^2\int_0^l (z^{m-1}(x,t))^2dx, \quad (r_t^m(t))^2 \leqslant k^2\int_0^l (z_t^{m-1}(x,t))^2dx,$$

где $k^2 = \max\limits_{[0,T]}\int\limits_0^l H^2(x,t)dx$, вытекает

$$||r^m||_{W_2^1(0,T)} \leqslant k\sqrt{\varepsilon}||z^{m-1}||_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.13}$$

Комбинируя (2.12) и (2.13), получаем

$$||z^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant Ck\sqrt{\varepsilon}||z^{m-1}||_{W_2^1(Q_T)}, \tag{2.14}$$

$$||r^m||_{W_2^1(0,T)} \leqslant Ck\sqrt{\varepsilon}||r^{m-1}||_{W_2^1(0,T)} \tag{2.15}$$

для $m = 1, 2, ...$ Выберем теперь ε так, чтобы $Ck\sqrt{\varepsilon} < 1$. Тогда из (2.14) и (2.15) сразу же следует, что последовательности $\{||z^m||_{W_2^1(Q_T)}\}$ и $\{||r^m||_{W_2^1(0,T)}\}$ являются бесконечно убывающими геометрическими, что влечет за собой фундаментальность последовательностей $(\{u^m\}, h^m)$. Но тогда в силу полноты пространств $W_2^1(Q_T)$ и $W_2^1(0,T)$ существует единственная пара функций (u, h) таких, что

$u^m \to u$ в $W_2^1(Q_T)$, $h^m \to h$ в $W_2^1(0,T)$.

Так как из сильной сходимости следует слабая, то, переходя к пределам в (2.5) и (2.6) убеждаемся в том, что пара функций (u, h) является искомым решением задачи (1.1)–(1.3), (2.3), а в силу доказанной эквивалентности и поставленной задачи (1.1)–(1.4).

Литература

[1] Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

[2] Биргер И.А., Б.Ф. Шорр, Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.

[3] Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределенными параметрами: учеб. пособие. Самара: Самар. Госуд. Аэрокосмич. Ун-т, 2002. 80 с.

[4] Вейц В.Л., Дондошанский В.К., Чиряев В.И. Вынужденные колебания в металлорежущих станках. М-Л.: Машгиз, 1959. 288 с.

[5] Кумабэ Д. Вибрационное резание. М.: Машиностроение, 1985. 424 с.

[6] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992. 431 с.

[7] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // Докдады РАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.

[8] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. № 3(114). 2014. С. 9–19.

[9] Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях упруго закрепленного нагруженного стержня. Вестник Самарского гос. Тех. Ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 2. С. 249–258.

[10] Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратых задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сибирский мат. журнал. 1993. Т. 34. № 5.

[11] Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. 94(2). С. 207–217.

[12] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems. 1988. № 4. P. 35–45.

[13] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1.

[14] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[15] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74-–83.

References

[1] Babakov I.M. *Teoriia kolebanii* [Theory of vibrations]. M.: Nauka, 1968, 560 p. [in Russian].

[2] Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. *Raschet na prochnost' detalei mashin: Spravochnik* [Valculation of stress of machine elements: Reference book]. M.: Mashinostroenie, 1993, 640 p. [in Russian].

[3] Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniia sistem s raspredelennymi parametrami: ucheb. posobie* [Mechanical oscillations of systems with distributed parameters: textbook]. Samara, Samar. Gosud. Aerokosmich. Un-t, 2002, 80 p. [in Russian].

[4] Veitz V.L., Dondoshanskii V.K., Chiriaev V.I. Vynuzhdennye kolebaniia v metallorezhushchikh stankakh [Forced oscillations in cutting machines]. M-L.: Mashgiz, 1959, 288 p. [in Russian].

[5] Kumabe D. *Vibratsionnoe rezanie* [Vibration Cutting]. M.: Mashinostroenie, 1985, 424 p. [in Russian].

[6] Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration.* N.Y.: Wiley, 1992, 431 p. [in Russian].

[7] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia* [Theory of free and forced vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *Doklady RAN* [Dokladyi Akademii nauk], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].

[8] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A Problem on Longitudinal Vibration in a Short Bar with Dynamical Boundary Conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 9–19.

[9] Beylin A.B. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh uprugo zakreplennogo nagruzhennogo sterzhnia* [The problem of longitudinal oscillations of an elastically fixed loaded rod]. *Vestnik Samarskogo gos. Tekh. Un-ta. Seriia: Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2016, Vol. 20, no. 2, pp. 249–258 [in Russian].

[10] Prilepko A.I., Kostin A.B. Ob obratnykh zadachakh opredeleniia koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii. II [On inverse problems of determining of a coefficient in a parabolic equation. II]. *Sibirskii mat. zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1993, Vol. 34, no. 5 [in Russian].

[11] Kamynin V.L. *Obratnaia zadacha opredeleniia mladshego koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabliudeniia* [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equation with integral observation]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 2013, **94**,(2), pp. 205–213 [in Russian].

[12] Cannon J.R., Lin Y. *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems*, 1988, no. 4, pp. 35–45 [in Russian].

[13] Denisov A.M. *Obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nym kraevym usloviem, soderzhashchim zapazdyvaiushchii argument* [The inverse problem for a hyperbolic equation with nonlocal boundary condition involving retarding argument]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN], 2012, Vol. 18, No. 1 [in Russian].

[15] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [The boundary value problems in mathematical physics]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

[16] Pulkina L.S. Kraevye zadachi dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nymi usloviiami I i II roda [Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2012, no. 4, pp. 74–83 [in Russian].

A.B. Beylin, L.S. Pulkina[2]

A PROBLEM ON VIBRATION OF A BAR WITH UNKNOWN BOUNDARY CONDITION ON A PART OF THE BOUNDARY

In this paper, we study an inverse problem for hyperbolic equation. This problem arises when we consider vibration of a nonhomogeneous bar if one endpoint is fixed by spring but behavior of the other is unknown and is the subject to find. Overdetermination is given in the form of integral with respect to spacial variable. Unique solvability of this problem is proved under some conditions on data. The proof is based on a priori estimates in Sobolev space.

Key words: hyperbolic equation, inverse problem, integral overdetermination.

Статья поступила в редакцию 5/*VII*/2017.
The article received 5/*VII*/2017.

[2] *Beylin Alexander Borisovich* (abeilin@mail.ru), Department of Automated Machining and Tool Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeiskaya str., Samara, 443010, Russian Federation.

Pulkina Ludmila Stepanovna (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federstion.