УДК 517+531.01

М.В. Шамолин[1]

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[2]

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного четырехмерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного четырехмерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи). Указаны нетривиальные механические и топологические аналогии.

Ключевые слова: четырехмерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный трехмерный круговой диск $\mathcal{D}^3$ с центром в точке D, гиперплоскость которого в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^4$ перпендикулярна державке OD. Диск жестко закреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O, и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает (ср. с [1; 2]).

Предположим, что суммарная сила $\mathbf{S}$ воздействия потока среды на диск перпендикулярна диску $\mathcal{D}^3$, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}_D$ точки D относительно потока и державкой OD, углами β_1, β_2, измеряемыми в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^3$ (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — (обобщенные) сферические координаты конца вектора $\mathbf{v}_D$), а также тензором приведенной угловой скорости $\tilde{\omega} \cong l\tilde{\Omega}/v_D$, $v_D = |\mathbf{v}_D|$ (l — длина державки, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости маятника). Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [3; 4].

Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ определяет ориентацию державки. Тогда $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, где $s(\alpha) = s_1(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$, где коэффициент сопротивления $s_1 \geqslant 0$ зависит лишь от угла атаки α. В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2x_3x_4$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 имеет направляющий вектор $\mathbf{e}$, а оси Dx_2, Dx_3 и Dx_4 лежат в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^3$.

Углами (ξ, η_1, η_2) мы определим положение державки OD в четырехмерном пространстве $\mathbf{E}^4$. При этом угол ξ будем измерять между державкой и направлением набегающего потока. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска $\mathcal{D}^3$ на трехмерной сфере постоянного радиуса OD.

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является трехмерная сфера

$$\mathbf{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^3: \ 0 \leqslant \xi, \eta_1 \leqslant \pi, \ \eta_2 \mod 2\pi\}, \tag{1.1}$$

а фазовым пространством — касательное расслоение трехмерной сферы

$$T_*\mathbf{S}^3\{(\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^6: \ 0 \leqslant \xi, \eta_1 \leqslant \pi, \ \eta_2 \mod 2\pi\}. \tag{1.2}$$

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

Тензор (второго ранга) $\tilde\Omega$ угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ будем определять через кососимметрическую матрицу

$$\tilde\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde\Omega \in \mathrm{so}(4). \tag{1.3}$$

Расстояние от центра D диска $\mathcal{D}^3$ до центра давления (точки N) будет иметь вид $|\mathbf{r}_N| = r_N = DN\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, l\Omega/v_D\right)$, где $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в двумерном и трехмерном случаях, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по тензору угловой скорости маятника (см. также [5; 6]). Анализ задачи об обобщенном сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных четырехмерных тел.

2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли so(4)

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ находится под воздействием некоторого неконсервативного поля сил (а именно, это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства $\mathbf{E}^4$). Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \tag{2.1}$$

либо вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}$. В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, ось Dx_1 — ось динамической симметрии тела), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbf{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс) $\mathbf{R}^n \times \mathrm{SO}(n)$ и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости четырехмерного твердого тела (а он является терзором второго ранга [7; 8; 9]), $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли* so(4), имеет следующий вид [8; 9]:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{2.2}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли so(4), $[.,.]$ — коммутатор в so(4). Кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ будем представлять в виде (1.3), где ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли so(4). При этом, очевидно, выполнены следующие равенства: $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4)$, переводящее пару векторов $(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ из $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли so(4), где $\mathbf{DN} = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}$, $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело. При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда правая часть системы (2.2) примет вид

$$M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\} =$$

$$= \{x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, -x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1, -x_{2N}F_1\},$$

где $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5,\ M_6$ — компоненты тензора момента внешней силы в проекциях на координаты в алгебре Ли so(4),

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -M_6 & M_5 & -M_3 \\ M_6 & 0 & -M_4 & M_2 \\ -M_5 & M_4 & 0 & -M_1 \\ M_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (2.1). Тогда динамическая часть уравнений его движения примет следующий вид:

$$\begin{gathered} (I_1+I_2)\dot\omega_1 = 0,\ \ (I_1+I_2)\dot\omega_2 = 0, \\ 2I_2\dot\omega_3 + (I_1-I_2)(\omega_2\omega_6+\omega_1\omega_5) = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v\right)s(\alpha)v^2, \\ (I_1+I_2)\dot\omega_4 = 0, \\ 2I_2\dot\omega_5 + (I_1-I_2)(\omega_4\omega_6-\omega_1\omega_3) = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v\right)s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot\omega_6 + (I_2-I_1)(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3) = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v\right)s(\alpha)v^2, \end{gathered} \tag{2.3}$$

поскольку момент силы воздействия среды определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2, 0, 0, 0\}$ — разложение силы $\mathbf{S}$ воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

Поскольку размерность алгебры Ли so(4) равна 6, система уравнений (2.3) и составляет группу динамических уравнений на so(4).

Видно, что в правую часть системы уравнений (2.3) входят, прежде всего, углы α, β_1, β_2, поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли so(4) присоединить несколько групп кинематических уравнений.

2.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (2.3), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \tag{2.4}$$

обладает тремя циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const},\ \ \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const},\ \ \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \tag{2.5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \tag{2.6}$$

При условиях (2.4)–(2.6) система (2.3) примет вид незамкнутой системы трех уравнений:

$$\begin{gathered} 2I_2\dot\omega_3 = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v\right)s(\alpha)v^2,\ \ 2I_2\dot\omega_5 = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v\right)s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot\omega_6 = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v\right)s(\alpha)v^2. \end{gathered} \tag{2.7}$$

3. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска $\mathcal{D}^3$) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D\cdot\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\beta_2) = \tilde\Omega\mathbf{l} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi,\eta_1,\eta_2),\ \ \mathbf{l} = \{l,0,0,0\}, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Равенство (3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

Действительно, в левой части равенства (3.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\beta_2)$ — единичный вектор вдоль оси вектора $\mathbf{v}_D$. Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\beta_2)$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1,\alpha,\beta_1,\beta_2)$, определяющие разложение (3.2).

В правой части равенства (3.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{l} = \mathbf{OD} = \{l, 0, 0, 0\}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

На втором слагаемом правой части равенства (3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, 0, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \eta_2)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{gathered} v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi, \;\; v_D \sin\alpha \cos\beta_1 = l\omega_6 + v_\infty \sin\xi \cos\eta_1, \\ v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 = -l\omega_5 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \cos\eta_2, \\ v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 = l\omega_3 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2. \end{gathered} \tag{3.3}$$

4. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \xi, \eta_1, \eta_2$ фазового пространства (1.2) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2; \xi, \eta_1, \eta_2\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n, n = 4$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных $\omega_3, \omega_5, \omega_6$, через новые переменные z_1, z_2, z_3 (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы η_1, η_2:

$$\begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_2) \circ T_{2,3}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$T_{2,3}(\eta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta_1 & -\sin\eta_1 \\ 0 & \sin\eta_1 & \cos\eta_1 \end{pmatrix}, \;\; T_{1,2}(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos\eta_2 & -\sin\eta_2 & 0 \\ \sin\eta_2 & \cos\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T_{2,3}(-\eta_1) \circ T_{1,2}(-\eta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{gathered} z_1 = \omega_3 \cos\eta_1 + \omega_5 \sin\eta_2, \;\; z_2 = -\omega_3 \cos\eta_1 \sin\eta_2 + \omega_5 \cos\eta_1 \cos\eta_2 + \omega_6 \sin\eta_1, \\ z_3 = \omega_3 \sin\eta_1 \sin\eta_2 - \omega_5 \sin\eta_1 \cos\eta_2 + \omega_6 \cos\eta_1. \end{gathered}$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$z_3 = \dot{\xi}, \;\; z_2 = -\dot{\eta}_1 \frac{\sin\xi}{\cos\xi}, \;\; z_1 = \dot{\eta}_2 \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1. \tag{4.2}$$

Таким образом, две группы уравнений (4.1) и (4.2) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{gathered} \omega_3 = \dot{\xi} \sin\eta_1 \sin\eta_2 + \dot{\eta}_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \cos\eta_1 \sin\eta_2 + \dot{\eta}_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \cos\eta_2, \\ \omega_5 = -\dot{\xi} \sin\eta_1 \cos\eta_2 - \dot{\eta}_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \cos\eta_1 \cos\eta_2 + \dot{\eta}_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \sin\eta_2, \\ \omega_6 = \dot{\xi} \cos\eta_1 - \dot{\eta}_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Видно, что три группы соотношений (2.7), (3.3), (4.3) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D}\right), \;\; x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D}\right), \;\; x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D}\right), \;\; s(\alpha).$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α, а функции x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} могут зависеть, наряду с углами α, β_1, β_2, вообще говоря, и от приведенного тензора угловой скорости $l\tilde{\Omega}/v_D$.

5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного динамически симметричного (случай (2.1)) четырехмерного твердого тела с передним торцом (круговым трехмерным диском $\mathcal{D}^3$) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [10; 11] с той же моделью воздействия среды.

Если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты вектора скорости центра D диска $\mathcal{D}^3$, лежащего на оси симметрии тела, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости тела (см. (1.3)) в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска, $I_1,\ I_2,\ I_3 = I_2,\ I_4 = I_2,\ m$ — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{gathered}
\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\
-\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) = \frac{F_1}{m}, \\
\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\
+\omega_6 v\cos\alpha - \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) - \sigma\dot{\omega}_6 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\
-\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_5 v\cos\alpha + \omega_4 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \\
-\sigma(-\omega_1\omega_2 + \omega_4\omega_6) + \sigma\dot{\omega}_5 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \\
+\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_3 v\cos\alpha - \omega_2 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \\
+\sigma(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) - \sigma\dot{\omega}_3 = 0, \\
(I_1 + I_2)\dot{\omega}_1 = 0,\ \ (I_1 + I_2)\dot{\omega}_2 = 0, \\
2I_2\dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \\
(I_1 + I_2)\dot{\omega}_4 = 0,\ \ 2I_2\dot{\omega}_5 + (I_1 - I_2)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \\
2I_2\dot{\omega}_6 + (I_2 - I_1)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered} \tag{5.1}$$

где $F_1 = -S,\ \ S = s(\alpha)v^2,\ \ \sigma = CD,$ при этом

$$\left(0, x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right), x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right), x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)\right)$$

— координаты точки N приложения силы $\mathbf{S}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом.

Первые четыре уравнения системы (5.1) описывают движение центра масс в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^4$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$. Вторые же шесть уравнений системы (5.1) получены из (2.2).

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (5.1) десятого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^3 \times \mathrm{so}(4)$ четырехмерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(4)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (5.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [12, 13]).

5.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \tag{5.2}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \mathrm{const},\ \ \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \mathrm{const},\ \ \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}. \tag{5.3}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \tag{5.4}$$

5.2. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{5.5}$$

то в системе (5.1) вместо F_1 будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.5). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (5.1), получим при $\cos\alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = m\sigma(\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2) + s(\alpha)v^2\left[1 - \frac{m\sigma}{2I_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)\right],$$

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\sin\beta_2 +$$
$$+ x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\cos\beta_2 + x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1. \tag{5.6}$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (5.1) в результате действий порождает независимую систему шестого порядка следующего вида:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \omega_6 v\cos\alpha - \sigma\dot\omega_6 = 0,\\
\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_5 v\cos\alpha + \sigma\dot\omega_5 = 0,\\
\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 +\\
+\omega_3 v\cos\alpha - \sigma\dot\omega_3 = 0,\\
2I_2\dot\omega_3 = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
2I_2\dot\omega_5 = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\ \ 2I_2\dot\omega_6 = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}\tag{5.7}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (5.7) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha + v\cos\alpha\left[\omega_6\cos\beta_1 - \omega_5\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_3\sin\beta_1\sin\beta_2\right] +\\
+\sigma\left[-\dot\omega_6\cos\beta_1 + \dot\omega_5\sin\beta_1\cos\beta_2 - \dot\omega_3\sin\beta_1\sin\beta_2\right] = 0,\\
\dot\beta_1 v\sin\alpha - v\cos\alpha\left[\omega_5\cos\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6\sin\beta_1 - \omega_3\cos\beta_1\sin\beta_2\right] +\\
+\sigma\left[\dot\omega_5\cos\beta_1\cos\beta_2 + \dot\omega_6\sin\beta_1 - \dot\omega_3\cos\beta_1\sin\beta_2\right] = 0,\\
\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 + v\cos\alpha\left[\omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2\right] + \sigma\left[-\dot\omega_3\cos\beta_2 - \dot\omega_5\sin\beta_2\right] = 0,\\
\dot\omega_3 = \frac{v^2}{2I_2}x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_5 = -\frac{v^2}{2I_2}x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\ \ \dot\omega_6 = \frac{v^2}{2I_2}x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered}\tag{5.8}$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{pmatrix}\omega_3\\ \omega_5\\ \omega_6\end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_2)\circ T_{2,3}(\beta_1)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$T_{2,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta_1 & -\sin\beta_1\\ 0 & \sin\beta_1 & \cos\beta_1\end{pmatrix},\ \ T_{1,2}(\beta_2) = \begin{pmatrix}\cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & 0\\ \sin\beta_2 & \cos\beta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix} = T_{2,3}(-\beta_1)\circ T_{1,2}(-\beta_2)\begin{pmatrix}\omega_3\\ \omega_5\\ \omega_6\end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

т.е.

$$\begin{gathered} z_1 = \omega_3 \cos\beta_1 + \omega_5 \sin\beta_2, \\ z_2 = -\omega_3 \cos\beta_1 \sin\beta_2 + \omega_5 \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \omega_6 \sin\beta_1, \\ z_3 = \omega_3 \sin\beta_1 \sin\beta_2 - \omega_5 \sin\beta_1 \cos\beta_2 + \omega_6 \cos\beta_1. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Как видно из (5.8), на многообразии

$$O_1 = \left\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\omega_3,\omega_5,\omega_6) \in \mathbf{R}^6 : \ \alpha = \frac{\pi}{2}k, \ \ \beta_1 = \pi l, \ \ k,l \in \mathbf{Z}\right\} \tag{5.13}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\dot\beta_2$. Формально, таким образом, на многообразии (5.13) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любом l неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\beta_2)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (5.8) вырождается.

Из этого следует, что система (5.7) вне и только вне многообразия (5.13) эквивалентна системе

$$\begin{gathered} \dot\alpha = -z_3 + \frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right), \\ \dot z_3 = \frac{v^2}{2I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\ -\frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_2\Delta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) + \frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_1\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right), \\ \dot z_2 = -\frac{v^2}{2I_2}s(\alpha)\Delta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) + z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ +\frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_3\Delta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) - \frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}z_1\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right), \\ \dot z_1 = \frac{v^2}{2I_2}s(\alpha)\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) + z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -\frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_3\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) + \frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}z_2\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right), \\ \dot\beta_1 = z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right), \\ \dot\beta_2 = -z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{2I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right), \end{gathered} \tag{5.14}$$

$$\begin{gathered} \Delta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\sin\beta_2 + \\ +x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\cos\beta_2 - x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1, \end{gathered} \tag{5.15}$$

$$\begin{gathered} \Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_2 - \\ -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_2, \end{gathered} \tag{5.16}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v)$ представляется в виде (5.6).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1/v,z_2/v,z_3/v)$ в силу (5.12).

Нарушение теоремы единственности для системы (5.8) на многообразии (5.13) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.13) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (5.8), пересекая многообразие (5.13) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы.

5.3. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \tag{5.17}$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс), то в системе (5.1) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = s(\alpha)v^2, \;\; \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{5.18}$$

Случай (5.18) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы четвертого порядка после некоторого преобразования системы (5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{6} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)\omega_i\omega_j = T_1\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \;\; \omega_0 = v.$$

Введем для начала новые квазискорости (5.9)–(5.11).

Систему (5.1) в случаях (5.2)–(5.4) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\dot v + \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\cos\alpha - \sigma\frac{v^2}{2I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = \\
= \frac{T_1\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \\
\dot\alpha v + z_3 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\sin\alpha - \sigma\frac{v^2}{2I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = \\
= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \\
\dot\beta_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha - \frac{\sigma v}{2I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = 0. \\
\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_1\cos\alpha - \frac{\sigma v}{2I_2}s(\alpha)\cdot\Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = 0. \\
\dot\omega_3 = \frac{v^2}{2I_2}x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\omega_5 = -\frac{v^2}{2I_2}x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \;\; \dot\omega_6 = \frac{v^2}{2I_2}x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered} \tag{5.19}$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, 2, 3$, $<\cdot> = n_1 v <'>$, $n_1 > 0$, $n_1 = \mathrm{const}$, система (5.19) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \tag{5.20}$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -Z_3 + \sigma n_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\sin\alpha + \frac{\sigma}{2I_2 n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\
-\frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha,
\end{gathered} \tag{5.21}$$

$$\begin{gathered}
Z_3' = \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2}\cdot\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1}Z_2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\
+\frac{\sigma}{2I_2 n_1}Z_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_3\cdot\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z),
\end{gathered} \tag{5.22}$$

$$\begin{gathered}
Z_2' = -\frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2}\cdot\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_2 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\
+Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1}Z_3\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\
-\frac{\sigma}{2I_2 n_1}Z_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_2\cdot\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z),
\end{gathered} \tag{5.23}$$

$$\begin{gathered}
Z_1' = \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2}\cdot\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_1 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\
-Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\cdot\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) \times \\
\times[Z_3\sin\beta_1 - Z_2\cos\beta_1] - Z_1\cdot\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z),
\end{gathered} \tag{5.24}$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \cdot \Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z\right), \tag{5.25}$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1} \cdot \Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z\right), \tag{5.26}$$

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha)\sin\alpha \cdot \Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,n_1 Z\right) + \\ + \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{5.27}$$

а функции $\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)$, $\Delta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)$, $\Theta_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)$ представляются в виде (5.6), (5.15), (5.16), соответственно.

Видно, что в системе седьмого порядка (5.20)–(5.26) может быть выделена независимая подсистема шестого порядка (5.21)–(5.26), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем шестимерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (5.18) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы шестого порядка также возможен.

6. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

6.1. Введение зависимости от угловой скорости

Данная работа посвящена динамике четырехмерного твердого тела в четырехмерном пространстве. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на трехмерный диск $\mathcal{D}^3$, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ от тензора угловой скорости Ω лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [3, 10].

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q+R$, где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ — вектор-функция, содержащая тензор угловой скорости Ω. При этом зависимость функции R от тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь (h_1, h_2, h_3, h_4) — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = Q_2 - h_1\omega_6/v_D$, $x_{3N} = Q_3 + h_1\omega_5/v_D$, $x_{4N} = Q_4 - h_1\omega_3/v$.

Таким образом, функция $\mathbf{r}_N$ выбирается в следующем виде (диск $\mathcal{D}^3$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D}\tilde{\Omega}h, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2\right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

(см. (1.3), (3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \sin\beta_1\sin\beta_2 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Таким образом, выполнены равенства $x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1 - h_1\omega_6/v_D$, $x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2 + h_1\omega_5/v_D$, $x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2 - h_1\omega_3/v_D$, убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от тензора угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ \ s(\alpha) = B\cos\alpha,\ \ A, B > 0. \tag{6.4}$$

6.2. Приведенные системы

Теорема 6..1 *Совместные уравнения (2.3), (3.3), (4.3) при выполнении условий (2.4)–(2.6), (6.1), (6.4) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (1.2) трехмерной сферы (1.1).*

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0,\ \ n_0^2 = \frac{AB}{2I_2},\ \ H_{1*} = \frac{h_1 B}{2I_2 n_0},\ \ <\cdot>= n_0 v_\infty <'>, \tag{6.5}$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
\xi'' + (b_* - H_{1*})\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - [\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1]\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\
\eta_1'' + (b_* - H_{1*})\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \eta_2'^2\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,\\
\eta_2'' + (b_* - H_{1*})\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\tfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\tfrac{\cos\eta_1}{\cos\eta_1} = 0,\ \ b_* > 0,\ \ H_{1*} > 0.
\end{gathered} \tag{6.6}$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (4.2)) к промежуточным безразмерным переменным $z_k = n_0 v_\infty(1+b_*H_{1*})Z_k,\ k = 1, 2,\ z_3 = n_0 v_\infty(1+b_*H_{1*})Z_3 - n_0 v_\infty b_*\sin\xi$, система (6.6) будет эквивалентна системе

$$\xi' = (1 + b_*H_{1*})Z_3 - b_*\sin\xi, \tag{6.7}$$

$$Z_3' = -\sin\xi\cos\xi + (1 + b_*H_{1*})(Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}Z_3\cos\xi, \tag{6.8}$$

$$Z_2' = -(1 + b_*H_{1*})Z_2 Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (1 + b_*H_{1*})Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + H_{1*}Z_2\cos\xi, \tag{6.9}$$

$$Z_1' = -(1 + b_*H_{1*})Z_1 Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + (1 + b_*H_{1*})Z_1 Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + H_{1*}Z_1\cos\xi, \tag{6.10}$$

$$\eta_1' = -(1 + b_*H_{1*})Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.11}$$

$$\eta_2' = (1 + b_*H_{1*})Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.12}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^3\{(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^6:\ \ 0 \leqslant \xi, \eta_1 \leqslant \pi,\ \ \eta_2 \mod 2\pi\} \tag{6.13}$$

трехмерной сферы $\mathbf{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^3:\ \ 0 \leqslant \xi, \eta_1 \leqslant \pi,\ \ \eta_2 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (6.7)–(6.12) по причине цикличности переменной η_2 выделяется независимая подсистема пятого порядка (6.7)–(6.11), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем пятимерном многообразии.

6.3. Полный список первых интегралов

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (6.7)–(6.12) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (6.7)–(6.12) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_3 = -Z_3,\ \ w_2 = \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2},\ \ w_1 = \frac{Z_2}{Z_1}, \tag{6.14}$$

система (6.7)–(6.12) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{gathered}
\xi' = -(1 + b_*H_{1*})w_3 - b_*\sin\xi,\\
w_3' = \sin\xi\cos\xi - (1 + b_*H_{1*})w_2^2\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}w_3\cos\xi,\\
w_2' = (1 + b_*H_{1*})w_2 w_3\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}w_2\cos\xi,
\end{gathered}\right\} \tag{6.15}$$

$$w_1' = d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\ \ \eta_1' = d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \tag{6.16}$$

$$\eta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \tag{6.17}$$

$$d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = -(1 + b_* H_{1*}) Z_2(w_3, w_2, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} = \mp \tfrac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi},$$
$$d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \\ = (1 + b_* H_{1*}) Z_1(w_3, w_2, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1} = \pm \tfrac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1}, \tag{6.18}$$

при этом $Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1)$, $k = 1, 2, 3,$ — функции в силу замены (6.14).

Видно, что в системе шестого порядка (6.15)–(6.17) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.15), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (6.16) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_2) уравнение (6.17) на η_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.15)–(6.17) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.15), один — для системы (6.16) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.17) (*т.е. всего четыре*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.15) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_3}{d\xi} = \frac{\sin\xi \cos\xi - (1+b_* H_{1*}) w_2^2 \cos\xi / \sin\xi + H_{1*} w_3 \cos\xi}{-(1+b_* H_{1*}) w_3 - b_* \sin\xi},$$
$$\frac{dw_2}{d\xi} = \frac{(1+b_* H_{1*}) w_2 w_3 \cos\xi / \sin\xi + H_{1*} w_2 \cos\xi}{-(1+b_* H_{1*}) w_3 - b_* \sin\xi}.$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем ее в алгебраическом виде

$$\frac{dw_3}{d\tau} = \frac{\tau - (1 + b_* H_{1*}) w_2^2/\tau + H_{1*} w_3}{-(1 + b_* H_{1*}) w_3 - b_* \tau}, \quad \frac{dw_2}{d\tau} = \frac{(1 + b_* H_{1*}) w_2 w_3/\tau + H_{1*} w_2}{-(1 + b_* H_{1*}) w_3 - b_* \tau}. \tag{6.19}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $w_3 = u_2 \tau$, $w_2 = u_1 \tau$, приводим систему (6.19) к следующему виду:

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{(1+b_* H_{1*})(u_2^2 - u_1^2) + (b_* + H_{1*}) u_2 + 1}{-(1+b_* H_{1*}) u_2 - b_*}, \quad \tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1+b_* H_{1*}) u_1 u_2 + (b_* + H_{1*}) u_1}{-(1+b_* H_{1*}) u_2 - b_*}. \tag{6.20}$$

Сопоставим системе второго порядка (6.20) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})(u_1^2 - u_2^2) + (b_* + H_{1*}) u_2}{2(1 + b_* H_{1*}) u_1 u_2 + (b_* + H_{1*}) u_1}, \tag{6.21}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*}) u_2 + 1}{u_1} \right) = 0.$$

Итак, уравнение (6.21) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*}) u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{6.22}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_3, w_2; \xi) = \\ = \frac{(1 + b_* H_{1*})(w_3^2 + w_2^2) + (b_* + H_{1*}) w_3 \sin\xi + \sin^2\xi}{w_2 \sin\xi} = C_1 = \text{const}. \tag{6.23}$$

Замечание 6..1 *Рассмотрим систему (6.15) с переменной диссипацией с нулевым средним, становящейся консервативной при $b_* = H_{1*}$:*

$$\xi' = -(1 + b_*^2) w_3 - b_* \sin\xi, \quad w_3' = \sin\xi \cos\xi - (1 + b_*^2) w_2^2 \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} + b_* w_3 \cos\xi,$$
$$w_2' = (1 + b_*^2) w_2 w_3 \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} + b_* w_2 \cos\xi. \tag{6.24}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b_*^2)(w_3^2 + w_2^2) + 2b_* w_3 \sin\xi + \sin^2\xi = C_1^* = const, \tag{6.25}$$

$$w_2 \sin\xi = C_2^* = const. \tag{6.26}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.25), (6.26) также является первым интегралом системы (6.24). Но при $b_* \neq H_{1*}$ каждая из функций

$$(1 + b_* H_{1*})(w_3^2 + w_2^2) + (b_* + H_{1*}) w_3 \sin\xi + \sin^2\xi \tag{6.27}$$

и (6.26) по отдельности не является первым интегралом системы (6.15). Однако отношение функций (6.27), (6.26) является первым интегралом системы (6.15) при любых b_*, H_{1*}.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.15). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.22) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1+b_*H_{1*})}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+b_*H_{1*})}\right)^2 = \frac{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}{4(1+b_*H_{1*})^2}. \tag{6.28}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{6.29}$$

и фазовое пространство системы (6.15) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.28).

Таким образом, в силу соотношения (6.22) первое уравнение системы (6.20) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+b_*H_{1*})u_2^2 + 2(b_* + H_{1*})u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-b_* - (1+b_*H_{1*})u_2},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1+b_*H_{1*})}\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\},$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1+b_*H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.29).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.15) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - (1+b_*H_{1*})u_2)du_2}{Q_1}, \tag{6.30}$$

$$Q_1 = 2(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1+b_*H_{1*})u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1+b_*H_{1*})).$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\sin\xi|$. Если

$$u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1+b_*H_{1*})} = r_1, \;\; b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4,$$

то правая часть равенства (6.30) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}} +$$

$$+(b_* - H_{1*})(1+b_*H_{1*})\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{-b_* + H_{1*}}{2} I_1, \tag{6.31}$$

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \;\; r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}. \tag{6.32}$$

При вычислении интеграла (6.32) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{6.33}$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.34}$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.35}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_3}{\sin\xi} + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}, \tag{6.36}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\times$$
$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \pm 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\times$$
$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \mp 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{6.37}$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{6.38}$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{2(1 + b_* H_{1*})r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{6.39}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.15) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6..2 *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (6.22).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \xi) = G\left(\sin\xi, \frac{w_3}{\sin\xi}, \frac{w_2}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{6.40}$$

Итак, найдены два первых интеграла (6.23), (6.40) независимой системы третьего порядка (6.15). Осталось указать один первый интеграл — для системы (6.16) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.17).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_3(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{6.41}$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1, \eta_2) = \eta_2 \pm \mathrm{arctg}\frac{\cos\eta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2\eta_1 - 1}} = C_4 = \mathrm{const}, \tag{6.42}$$

при этом в левую часть равенства (6.42) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (6.41).

Теорема 6..2 *Система (6.15)–(6.17) шестого порядка обладает достаточным количеством (четырьмя) независимых первых интегралов (6.23), (6.40), (6.41), (6.42).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.15)–(6.17) имеет четыре первых интеграла, выражающихся соотношениями (6.23), (6.40), (6.41), (6.42) (при этом используются выражения (6.36)–(6.39)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6..3 *Три группы соотношений (2.3), (3.3), (4.3) при условиях (2.4)–(2.6), (6.1), (6.4) обладают четырьмя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

6.4. Топологические аналогии

Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.14).

При выполнении условий (6.1), (6.4) система (5.14) примет вид

$$\alpha' = -(1+bH_1)Z_3 + b\sin\alpha, \tag{6.43}$$

$$Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1Z_3\cos\alpha, \tag{6.44}$$

$$Z_2' = (1+bH_1)Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1Z_2\cos\alpha, \tag{6.45}$$

$$Z_1' = (1+bH_1)Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{6.46}$$

$$\beta_1' = (1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.47}$$

$$\beta_2' = -(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.48}$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (6.5):

$$b = \sigma n_0, \;\; n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \;\; H_1 = \frac{h_1B}{2I_2n_0}, \;\; z_k = n_0vZ_k, \;\; k=1,2,3, \;\; <\cdot> = n_0v <'> . \tag{6.49}$$

Теорема 6..4 *Система (6.43)–(6.48) (для свободного тела) эквивалентна системе (6.7)–(6.12) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \;\; \eta_1 = \beta_1, \;\; \eta_2 = \beta_2, \;\; b_* = -b, \;\; H_{1*} = -H_1, \tag{6.50}$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k$, $k=1,2,3$.

Для полного интегрирования системы (6.43)–(6.48) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_3 = Z_3, \;\; w_2 = \sqrt{Z_2^2+Z_1^2}, \;\; w_1 = \frac{Z_2}{Z_1}, \tag{6.51}$$

система (6.43)–(6.48) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' = -(1+bH_1)w_3 + b\sin\alpha, \\ w_3' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_3\cos\alpha, \\ w_2' = (1+bH_1)w_2w_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_2\cos\alpha, \end{array}\right\} \tag{6.52}$$

$$w_1' = d_1(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \;\; \beta_1' = d_1(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{6.53}$$

$$\beta_2' = d_2(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{6.54}$$

$$\begin{array}{c} d_1(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = (1+bH_1)Z_2(w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\frac{w_1w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \\ = -(1+bH_1)Z_1(w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} = \mp\frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \end{array} \tag{6.55}$$

при этом $Z_k = Z_k(w_3,w_2,w_1)$, $k=1,2,3$, — функции в силу замены (6.51).

Система (6.52)–(6.54) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^3\{(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)\in\mathbf{R}^6: \;\; 0\leqslant\alpha,\beta_1\leqslant\pi, \;\; \beta_2 \mod 2\pi\} \tag{6.56}$$

трехмерной сферы $\mathbf{S}^3\{(\alpha,\beta_1,\beta_2)\in\mathbf{R}^3: \;\; 0\leqslant\alpha,\beta_1\leqslant\pi, \;\; \beta_2 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (6.52)–(6.54) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.52), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (6.53) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (6.54) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.52)–(6.54) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.52), один — для системы (6.53) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.54) (*т.е. всего четыре*).

Следствие 6..1 *1. Угол атаки α и углы β_1,β_2 для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и η_1,η_2 закрепленного маятника.*

2. Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3. Первые интегралы системы (6.52)–(6.54) могут быть автоматически получены через равенства (6.23), (6.40), (6.41), (6.42) после подстановок (6.50):

$$\Theta_1'(w_3,w_2;\alpha)= \\ =\frac{(1+bH_1)(w_3^2+w_2^2)-(b+H_1)w_3\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_2\sin\alpha}=C_1=const. \tag{6.57}$$

$$\Theta_2'(w_3,w_2;\alpha)=G\left(\sin\alpha,\frac{w_3}{\sin\alpha},\frac{w_2}{\sin\alpha}\right)=C_2=const. \tag{6.58}$$

$$\Theta_3'(w_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1}=C_3=const, \tag{6.59}$$

$$\Theta_4'(w_1;\beta_1,\beta_2)=\beta_2\pm arctg\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_1-1}}=C_4=const, \tag{6.60}$$

при этом в левую часть равенства (6.60) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (6.59).

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (5.17). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.20)–(5.26). Тогда, в силу условий (5.17), (6.1), (6.4), (6.49) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.21)–(5.26)) примет вид аналитической системы

$$\alpha'=-Z_3+b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1Z_3\cos^2\alpha, \tag{6.61}$$

$$Z_3'=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_3(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha-bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ +bH_1Z_3^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_3\cos\alpha, \tag{6.62}$$

$$Z_2'=(1+bH_1)Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(1+bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+ \\ +bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha-bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1Z_2Z_3\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_2\cos\alpha, \tag{6.63}$$

$$Z_1'=(1+bH_1)Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(1+bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+ \\ +bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1Z_1Z_3\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_1\cos\alpha, \tag{6.64}$$

$$\beta_1'=(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.65}$$

$$\beta_2'=-(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.66}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом: $n_1=n_0$.

Для полного интегрирования системы (6.61)–(6.66) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.51) система (6.61)–(6.66) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha'=-w_3+b(w_2^2+w_3^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_3\cos^2\alpha,\\ w_3'=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)w_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +bw_3(w_2^2+w_3^2)\cos\alpha-bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1w_3^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_3\cos\alpha,\\ w_2'=(1+bH_1)w_2w_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_2(w_2^2+w_3^2)\cos\alpha-bw_2\sin^2\alpha\cos\alpha+\\ +bH_1w_2w_3\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_2\cos\alpha,\end{array}\right\} \tag{6.67}$$

$$w_1'=d_1(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\ \ \beta_1'=d_1(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{6.68}$$

$$\beta_2'=d_2(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{6.69}$$

где выполнены условия (6.55).

Система (6.67)–(6.69) рассматривается на касательном расслоении (6.56) трехмерной сферы $\mathbf{S}^3\{(\alpha,\beta_1,\beta_2)\in\mathbf{R}^3:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1\leqslant\pi,\ \beta_2 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (6.67)–(6.69) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.67), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (6.68) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (6.69) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.67)–(6.69) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.67), один — для системы (6.68) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.69) (*т.е. всего четыре*).

Если вопрос о первых интегралах системы (6.43)–(6.48) (или (6.52)–(6.54)) решается с помощью следствия 6..1, то аналогичный вопрос для системы (6.61)–(6.66) (или (6.67)–(6.69)) решает следующая теорема 6..5.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (6.67) имеет следующий вид:

$$\Theta_1''(w_3, w_2; \alpha) =$$
$$= \frac{(1+bH_1)(w_3^2+w_2^2) - (b+H_1)w_3 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_2 \sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{6.70}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.67), используя при этом первый интеграл (6.70). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha,\ \ w_3 = u_2\tau,\ \ w_2 = u_1\tau,\ \ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{6.71}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1,u_2))}{1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \tag{6.72}$$
$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0. \tag{6.73}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (6.72) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (6.72), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2,\ \ C_1 = \frac{1-A_1^4}{1+A_1^4},\ \ A_1 = \frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1-A_1u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1-A_1u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$
$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2 - 1)},\ \ C = \mathrm{const}.$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_3, w_2; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_3}{\sin\alpha}, \frac{w_2}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{6.74}$$

используя при этом обозначения и замены (6.71).

Итак, найдены два первых интеграла (6.70), (6.74) независимой системы третьего порядка (6.67). Осталось указать один первый интеграл — для системы (6.68), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.69).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.59), (6.60), а именно:

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{6.75}$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \mathrm{arctg} \frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2\beta_1 - 1}} = C_4 = \mathrm{const}, \tag{6.76}$$

при этом в левую часть равенства (6.76) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (6.75).

Теорема 6..5 *Четыре первых интеграла (6.70), (6.74), (6.75), (6.76) системы (6.67)–(6.69) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 6..6 *Четыре первых интеграла (6.70), (6.74), (6.75), (6.76) системы (6.67)–(6.69) эквивалентны четырем первым интегралам (6.57), (6.58), (6.59), (6.60) системы (6.52)–(6.54).*

Действительно, пары первых интегралов (6.70), (6.57), (6.75), (6.59) и (6.76), (6.60) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k, $k = 1,2,3$, для системы (6.67)–(6.69) с фазовыми переменными w_k, $k = 1,2,3$, для системы (6.52)–(6.54). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (6.74), (6.58), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Заключение

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии. (1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости). (2) Движение четырехмерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости). (3) Сложное движение четырехмерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [9; 10].

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.

[2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.

[3] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114. №1. P. 919–975.

[4] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. Динамические системы. 2013. С. 5–254.

[5] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[6] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.

[7] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

[8] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[9] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. №6. С. 31–33.

[10] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[11] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во "Экзамен", 2007. 352 с.

[12] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, 122, no. 1, P. 2841–2915.

[13] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. №10. С. 49–67.

References

[1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113 [in Russian].

[2] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika v trekhmernom prostranstve* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 114, no. 1, pp. 919–975 [in English].

[4] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. "Sovremennaia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory"* [Results of science and technics. Series: "Contemporary Mathematics and its Applications. Subject reviews"], Vol. 125, "Dynamical Systems", 2013, pp. 5–254 [in Russian].

[5] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Some conditions of integrability of dynamics system in transcedent functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2012, no. 9/1(110), pp. 35–41 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie tipov fazovykh portretov v dinamike tverdogo tela, vzaimodeistvuiushchego s soprotivliaiushcheisia sredoi* [Variety of types of phase portraits in the dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium]. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 1996, Vol. 349, no. 2, pp. 193–197 [in Russian].

[7] Shamolin M.V. *Dinamicheskie sistemy s peremennoi dissipatsiei: podkhody, metody, prilozheniia* [Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications] *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, Vol. 14, issue 3, pp. 3–237 [in Russian].

[8] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspects in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].

[9] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetruc spaces of automorphysm groups]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[10] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].

[11] Shamolin M.V. *Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela* [Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. M.: Izd-vo "Ekzamen", 2007, 352 p. [in Russian].

[12] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, Vol. 122, no. 1, pp. 2841–2915 [in English].

[13] Shamolin M.V. *Nekotorye model'nye zadachi dinamiki tverdogo tela pri vzaimodeistvii ego so sredoi* [Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium]. *Prikl. mekhanika* [International Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].

M.V. Shamolin[3]

CASES OF INTEGRABILITY CORRESPONDING TO THE PENDULUM MOTION IN FOUR-DIMENSIONAL SPACE

In this article, we systemize some results on the study of the equations of motion of dynamically symmetric fixed four-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of the motion of a free four-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. We also show the nontrivial topological and mechanical analogies.

Key words: four-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Статья поступила в редакцию 11/*II*/2017.
The article received 11/*II*/2017.

[3] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.