УДК 519.713.34:519.171

В.П. Цветов[1]

АЛЬФА-МАТРИЦЫ И ГРАФ-ПОРОЖДЕННЫЕ ГРАММАТИКИ

В статье рассматривается обобщение граф-порожденных грамматик на основе их матричных представлений. Изучаются два класса граф-порожденных грамматик, связанные с вершинными и реберными разметками порождающих графов. Дается определение альфа-матрицы над полукольцом языков, заданных при помощи конечного алфавита $\mathcal{A}$, и определяются соответствующие матричные алгебры. Введенные понятия в дальнейшем используются для конструктивного представления граф-порожденных языков и исследования вопросов, связанных с их эквивалентностью. Дается определение матрично порожденных грамматик как естественного надкласса граф-порожденных грамматик. Доказываемые утверждения иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: полукольца языков, формальные грамматики, порождающие грамматики, теория графов, маршруты на размеченных графах, граф-порожденные грамматики, матрично порожденные грамматики.

1. Предварительные сведения

Статья развивает подход к представлению формальных грамматик предложенный в [1], который использует графы в качестве инструмента порождения языков. Любой маршрут в вершинной форме на графе является словом некоторого языка над алфавитом, который образован множеством вершин или связанными с ними метками. Задавая совокупности начальных и конечных вершин маршрутов, а также их метки и длины, можно конструктивно определять различные языки на основе имеющихся графовых алгоритмов. В [1] показано, что множество подобных языков, названных G-языками, является строгим надмножеством регулярных языков.

Аналогичный подход может быть применен к реберно размеченным графам и маршрутам в реберной форме. Возникающие при этом языки так же названы G-языками. Языки, связанные с вершинной разметкой названы языками вершинного типа, а с реберной— языками реберного типа.

Естественный класс алгоритмов нахождения маршрутов на размеченных графах образуют алгоритмы, использующие правило матричного произведения для матриц с элементами из полукольца языков, заданных над алфавитом $\mathcal{A}$. Таким образом, G-языки допускают реализацию посредством матричных алгебр и стандартных типов данных. Помимо этого матричные представления являются удобным инструментом для исследования свойств G-языков, в частности, позволяют установить совпадение классов языков вершинного и реберного типов, или построить расширение класса граф-порожденных языков до класса матрично порожденных языков.

Различные виды полуколец и матричных алгебр над полукольцами традиционно используются в таких областях, как компьютерная алгебра [2–3], теория автоматов [4], оптимальное управление [5], формальные языки [6–8], теория бинарных отношений [9; 10] и др. Таким образом, применение аппарата матричных алгебр является естественным для моделирования генеративных грамматик.

Замечание 1.1. В [1] обнаружены следующие опечатки:

стр. 103, 17 строка снизу: вместо $w^0 := \varepsilon,\ w^{m+1} := w^m \circ w$ следует читать $\mathrm{w}^0 := \varepsilon,\ \mathrm{w}^{m+1} := \mathrm{w}^m \circ \mathrm{w}$;
стр. 103, 12 строка снизу: вместо $(W_1, W_2) \in P$ и $W_1 \mapsto W_2$ следует читать $(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2) \in P$ и $\mathrm{w}_1 \mapsto \mathrm{w}_2$, соответственно;
стр. 105, 2 строка сверху: вместо $L^{\eta}_{I\times J\times\mathbb{N}_0}(G^{\mathcal{A}}_E)$ следует читать $L^{\eta}_{I\times J\times\mathbb{N}}(G^{\mathcal{A}}_E)$;
стр. 105, 12 строка сверху: вместо $L^{\eta}_{I\times J\times\mathbb{N}_0}(G^{\mathcal{A}}_E)$ следует читать $L^{\eta}_{I\times J\times\mathbb{N}}(G^{\mathcal{A}}_E)$;
стр. 105, 20 строка сверху: вместо $L^{\eta}_{I\times J\times\mathbb{N}}(G^{\mathcal{A}}_E)$ следует читать $L^{\eta}_{I\times J\times\mathbb{N}_0}(G^{\mathcal{A}}_E)$;
стр. 105, 22 строка сверху: вместо $\{S_{-i}\}_{i\in I}$ следует читать $\{S_{-i} \mid i \in I\}$;

Цветов Виктор Петрович (`tsf-su@mail.ru`), кафедра безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

стр. 105, 25 строка сверху: вместо $F := \{S_j \mid j \in J\}$ следует читать $F := \{S_j \mid j \in J\} \cup \{S_{-i} \mid i \in I\}$;
стр. 106, 1 строка сверху: вместо $\langle L_{\mathcal{A}}, (\circ)\rangle$ следует читать $\left\langle L^{+}_{\mathcal{A}}, (\circ)\right\rangle$.

Далее в статье используются обозначения и определения, введенные в [1].

2. Основные результаты

Рассмотрим конечный алфавит $\mathcal{A} := \{a_1, .., a_n\}$ и множество слов $L^*_{\mathcal{A}}$ над этим алфавитом. Пусть, как и ранее, $\langle L^*_{\mathcal{A}}, (\circ)\rangle$— моноид слов над алфавитом $\mathcal{A}$ с операцией сцепления (конкатенации) слов, $2^{L^*_{\mathcal{A}}}$— булеан над $L^*_{\mathcal{A}}$, а ε— пустое слово.

Пусть $L_1, L_2 \subseteq L^*_{\mathcal{A}}$— языки, над алфавитом $\mathcal{A}$. Стандартныи образом определим операции *объединения* и *сцепления* языков

$$\begin{array}{l} L_1 \cup L_2 := \{\mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in L_1 \vee \mathrm{w} \in L_2\}, \\ L_1 \circ L_2 := \{\mathrm{w} := \mathrm{w}_1 \circ \mathrm{w}_1 \mid \mathrm{w}_1 \in L_1 \wedge \mathrm{w}_2 \in L_2\}. \end{array}$$

Понятно, что для любых языков $L_1, L_2, L_3 \subseteq L^*_{\mathcal{A}}$ выполняются равенства

$$\begin{array}{l} L_1 \cup \emptyset = \emptyset \cup L_1 = L_1, \\ L_1 \circ \emptyset = \emptyset \circ L_1 = \emptyset, \\ L_1 \circ \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \circ L_1 = L_1, \\ L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = (L_1 \circ L_2) \cup (L_1 \circ L_2), \\ (L_2 \cup L_3) \circ L_1 = (L_2 \circ L_1) \cup (L_3 \circ L_1). \end{array}$$

В дальнейшем будем рассматривать некоммутативное полукольцо с единицей $\left\langle 2^{L^*_{\mathcal{A}}}, (\circ, \cup)\right\rangle$.

2.1. Альфа-матрицы

Пусть $\alpha : 1..n \times 1..m \to 2^{L^*_{\mathcal{A}}}$— тотальная функция. Обозначим $\alpha_{ij} := \alpha(i, j)$.

Определение 2.1. В предыдущих обозначениях будем называть *альфа-матрицей* или *α-матрицей* (*размерности $n \times m$ над алфавитом $\mathcal{A}$*) матрицу (α_{ij}).

Обозначим $M^{n\times m}_{\mathcal{A}}$— множество α-матриц размерности $n \times m$.

Пусть $(\alpha^1_{ij}), (\alpha^2_{ij}) \in M^{n\times m}_{\mathcal{A}}$. Стандартныи образом определим операции их *прямого произведения*, *объединения* и *транспонирования*, полагая

$$\begin{array}{l} (\alpha^1_{ij}) \otimes (\alpha^2_{ij}) := (\alpha^1_{ij} \circ \alpha^2_{ij}) \in M^{n\times m}_{\mathcal{A}}, \\ (\alpha^1_{ij}) \uplus (\alpha^2_{ij}) := (\alpha^1_{ij} \cup \alpha^2_{ij}) \in M^{n\times m}_{\mathcal{A}}, \\ (\alpha^1_{ij})^T := (\alpha^1_{ji}) \in M^{m\times n}_{\mathcal{A}}. \end{array}$$

Пусть $(\alpha^1_{ij}) \in M^{n\times s}_{\mathcal{A}}$, $(\alpha^2_{ij}) \in M^{s\times m}_{\mathcal{A}}$. Стандартныи образом определим операцию их *произведения* (*по правилу «строка на столбец»*), полагая

$$(\alpha^1_{ik}) \odot (\alpha^2_{kj}) := (\alpha_{ij}) := (\bigcup_{k=1}^{s} \alpha^1_{ik} \circ \alpha^2_{kj}) \in M^{n\times m}_{\mathcal{A}}.$$

Пусть $(\alpha_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $(\alpha_{ij})^{m+1} := (\alpha_{ij})^m \odot (\alpha_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$, где $(\alpha_{ij})^1 := (\alpha_{ij})$.

Определим α-матрицы $(\varepsilon^{n\times m}_{ij}) \in M^{n\times m}_{\mathcal{A}}$ $(\delta^{n\times n}_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$, полагая

$$\begin{array}{l} \varepsilon^{n\times m}_{ij} := \{\varepsilon\}, \text{ для всех } i, j \in 1..n; \\ \delta^{n\times n}_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} \{\varepsilon\}, & \text{если } i = j \wedge i \in 1..n \\ \emptyset, & \text{если } i \neq j \wedge i, j \in 1..n \end{array} \right. . \end{array}$$

Понятно, что для любой α-матрицы $(\alpha_{ij}) \in M^{n\times m}_{\mathcal{A}}$ справедливы равенства

$$\begin{array}{l} (\alpha_{ij}) \otimes (\varepsilon^{n\times m}_{ij}) = (\varepsilon^{n\times m}_{ij}) \otimes (\alpha_{ij}) = (\alpha_{ij}), \\ (\alpha_{ik}) \odot (\delta^{m\times m}_{kj}) = (\delta^{n\times n}_{ik}) \odot (\alpha_{kj}) = (\alpha_{ij}). \end{array}$$

В дальнейшем будем рассматривать некоммутативные полукольца с единицей $\left\langle M^{n\times m}_{\mathcal{A}}, (\otimes, \uplus)\right\rangle$ и $\left\langle M^{n\times n}_{\mathcal{A}}, (\odot, \uplus)\right\rangle$.

2.2. Представление граф-порожденных грамматик альфа-матрицами

2.2.1. Граф-порожденные грамматики вершинного типа

Напомним определение граф-порожденной грамматики [1].

Рассмотрим граф G^n_E, заданный множеством вершин $V := 1..n := \{1, 2, .., n\}$ и бинарным граф-отношением $E \subseteq 1..n \times 1..n$. Зададим конечный алфавит $\mathcal{A} := \{a_1, .., a_{n_1}\}$ мощности $n_1 \leqslant n$, возможно содержащий в себе пустое слово ε, и тотальную сюръекцию $\omega_n : 1..n \to \mathcal{A}$. Обозначим L^+_n— множество непустых слов над алфавитом $1..n$.

Рассмотрим моноид $\langle L^*_{\mathcal{A}}, (\circ)\rangle$ и определим тотальную функцию $\omega : L^+_n \to L^*_{\mathcal{A}}$ правилом

$$\omega(\langle i_0..i_m\rangle) = \omega(i_0 i_1 \dots i_m) := \omega_n(i_0) \circ \omega_n(i_1) \circ \dots \circ \omega_n(i_m) = \mathrm{w} \in L^*_{\mathcal{A}}.$$

Обозначим $L^v_{i,j,m}(G^n_E) \subset L^+_n$– множество маршрутов в вершинной форме длины m на графе G^n_E из вершины i в вершину j. В случае $m = 0$ для любого $j \in 1..n$ полагаем $L^v_{i,j,0}(G^n_E) := \{i\}$.

Рассмотрим функцию $\Omega : 2^{L^+_n} \to 2^{L^*_{\mathcal{A}}}$, индуцированную функцией ω:

$$\Omega(L) := \{\mathrm{w} := \omega(i_0 i_1 \dots i_m) \mid i_0 i_1 \dots i_m \in L \subseteq L^+_n\} \subseteq L^*_{\mathcal{A}}.$$

Определение 2.2. В предыдущих обозначениях будем называть *граф-порожденными языками* или *G-языками (над алфавитом $\mathcal{A}$)* языки

$$L^v_M(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \Omega(L^v_{i,j,m}(G^n_E)),$$

где $\emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N}_0$. В случае одноэлементных множеств $M = \{(i_0, j_0, m_0)\}$ соответствующие G-языки будем обозначать $L^v_{i_0,j_0,m_0}(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n)$.

Граф-порожденными грамматиками или *G-грамматиками (над алфавитом $\mathcal{A}$)* будем называть четверки $\langle G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n, M\rangle$.

Языки и грамматики, фигурирующие в определении 2.2. будем также называть G-языками и G-грамматиками *вершинного типа* или *v-типа*, а граф G^n_E— *порождающим графом.*

Рассмотрим граф-порожденную грамматику $\langle G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n, M\rangle$ и ее порождающий граф G^n_E.

Пусть (g^n_{ij})— матрица смежности вершин графа G^n_E. Определим α-матрицу $(\alpha^{g^n}_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$, полагая

$$\alpha^{g^n}_{ij} := \begin{cases} \{\omega_n(i)\}, & \text{если } g^n_{ij} = 1 \wedge i, j \in 1..n \\ \emptyset, & \text{если } g^n_{ij} = 0 \wedge i, j \in 1..n \end{cases}.$$

Определим α-матрицу $(\alpha^{\mathcal{A}}_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$, полагая

$$\alpha^{\mathcal{A}}_{ij} := \{\omega_n(i)\}, \text{для всех } i, j \in 1..n.$$

Рассмотрим α-матрицу $(\alpha^1_{ij}) := (\alpha^{g^n}_{ij}) \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T$. Понятно, что

$$\alpha^1_{ij} = \begin{cases} \{\omega(ij)\}, & \text{если } g^n_{ij} = 1 \\ \emptyset, & \text{если } g^n_{ij} = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, элемент α-матрицы α^1_{ij} содержит слово языка $L^v_{i,j,1}(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n)$, соответствующее маршруту длины 1 на графе G^n_E из вершины i в вершину j, если такой маршрут существует, и пуст, в противном случае.

Рассмотрим α-матрицу $(\alpha^2_{ij}) := (\alpha^{g^n}_{ij})^2 \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T$. Понятно, что

$$\alpha^2_{ij} = \bigcup_{g^n_{ik}=1 \wedge g^n_{kj}=1} \{\omega(ikj)\}.$$

Таким образом, элемент α-матрицы α^2_{ij} содержит все слова языка $L^v_{i,j,2}(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n)$, соответствующие маршрутам длины 2 на графе G^n_E из вершины i в вершину j, если такие маршруты существуют, и пуст, в противном случае.

Аналогичным образом рассматривая α-матрицу $(\alpha^m_{ij}) := (\alpha^{g^n}_{ij})^m \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T$, получаем, что ее элемент α^m_{ij} содержит все слова языка $L^v_{i,j,m}(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n)$, соответствующие маршрутам длины m из на графе G^n_E вершины i в вершину j, если такие маршруты существуют, и пуст, в противном случае.

В терминах G-языков вершинного типа сказанное означает то, что справедлива следующая

Лемма 2.1. G-язык вершинного типа допускает представление

$$L^v_M(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \Omega(L^v_{i,j,m}(G^n_E)) = \bigcup_{(i,j,m)\in M} \alpha^m_{ij},$$

где

$$(\alpha^m_{ij}) := \begin{cases} (\alpha^{g^n}_{ij})^m \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij}), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

Замечание 2.1. В определении 2.2 единственный маршрут нулевой длины из вершины i в вершину j на графе G^n_E полагается равным самой вершине i для любого значения $j \in 1..n$. В [1] показано, что определенный таким образом G-язык вершинного типа, является регулярным.

В действительности, G-язык вершинного типа остается регулярным и в том случае, если считать, что

$$L^v_{i,j,0}(G^n_E) := \begin{cases} \{i\}, & \text{если } (i,j) \in E \\ \emptyset, & \text{если } (i,j) \notin E \end{cases}.$$

Распознающий такой язык конечный автомат можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}
&S := \{S_{-i} \mid i \in I \wedge \exists j\, j \in J \wedge (i,j) \in E\} \cup \{S_0, S_1, \ldots, S_n, S_{n+1}\};\\
&X := \mathcal{A};\\
&s_0 := S_0;\\
&\delta(s_0, \omega_n(i)) := \begin{cases} S_{-i}, & \text{если } i \in I \wedge \exists j\, j \in J \wedge (i,j) \in E \\ S_{n+1}, & \text{если } i \in 1..n \wedge i \notin I \end{cases};\\
&\delta(S_i, \omega_n(j)) := \begin{cases} S_j, & \text{если } i,j \in 1..n \wedge (i,j) \in E \\ S_{n+1}, & \text{если } i,j \in 1..n \wedge (i,j) \notin E \end{cases};\\
&\delta(S_{-i}, \omega_n(j)) := \delta(S_i, \omega_n(j)), \text{ если } i \in I \wedge \exists j\, j \in J \wedge (i,j) \in E;\\
&\delta(S_{n+1}, \omega_n(i)) := S_{n+1}, \text{ если } i \in 1..n;\\
&F := \{S_j \mid j \in J\} \cup \{S_{-i} \mid i \in I \wedge \exists j\, j \in J \wedge (i,j) \in E\}.
\end{aligned}$$

Для подобных языков справедлива

Лемма 2.2. Определенный в текущем замечании G-язык вершинного типа допускает представление

$$L^v_M(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \Omega(L^v_{i,j,m}(G^n_E)) = \bigcup_{(i,j,m)\in M} \alpha^m_{ij},$$

где

$$(\alpha^m_{ij}) := \begin{cases} (\alpha^{g^n}_{ij})^m \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ (\alpha^{g^n}_{ij}), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

Пример 2.1.

Рассмотрим порождающий граф G^4_E, заданный граф-отношением

$$E := \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\} \subset 1..4 \times 1..4,$$

и его матрицу смежности вершин

$$(g^4_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим алфавит $\mathcal{A} := \{a, b\}$ и тотальную сюръекциию $\omega_3 : 1..4 \to \mathcal{A}$, полагая

$$\omega_4(1) := a, \omega_4(2) := b, \omega_4(3) := a, \omega_4(4) := a.$$

В данном случае порождающие матрицы $(\alpha^{g^4}_{ij})$, $(\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})$, фигурирующие в формулировке леммы 2.1, будут иметь вид

$$(\alpha^{g^4}_{ij}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \quad (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij}) := \begin{pmatrix} \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \\ \{b\} & \{b\} & \{b\} & \{b\} \\ \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \\ \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \end{pmatrix}.$$

Непустые множества маршрутов в вершинной форме длины $m > 0$ на графе G^4_E и соответствующие им языки имеют вид

$$\begin{aligned}
&L^v_{1,2,1}(G^3_E) = \{1\,2\},\\
&L^v_{1,3,1}(G^3_E) = \{1\,3\},\\
&L^v_{2,4,1}(G^3_E) = \{2\,4\},\\
&L^v_{3,4,1}(G^3_E) = \{3\,4\},\\
&L^v_{1,4,2}(G^3_E) = \{1 2\,4, 1 3\,4\},\\
&L^v_{1,2,1}(G^4_E,\mathcal{A},\omega_4) = \{ab\} = \alpha^1_{12},\\
&L^v_{1,3,1}(G^4_E,\mathcal{A},\omega_4) = \{aa\} = \alpha^1_{13},\\
&L^v_{2,4,1}(G^4_E,\mathcal{A},\omega_4) = \{ba\} = \alpha^1_{24},\\
&L^v_{3,4,1}(G^4_E,\mathcal{A},\omega_4) = \{aa\} = \alpha^1_{34},\\
&L^v_{1,4,2}(G^4_E,\mathcal{A},\omega_4) = \{aaa, aba\} = \alpha^2_{14},
\end{aligned}$$

где

$$(\alpha^1_{ij}) := (\alpha^{g^4}_{ij}) \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T = \begin{pmatrix} \emptyset & \{ab\} & \{aa\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aa\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

$$(\alpha^2_{ij}) := (\alpha^{g^4}_{ij})^2 \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})^T = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aaa, aba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

2.2.2. Лемма о прямом произведении

Пусть $(\alpha_{ij}), (\beta_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$— α-матрицы размерности $n\times n$ над алфавитом $\mathcal{A}$, причем $\forall i_1, i_2, j \in 1..n\; \beta_{i_1 j} = \beta_{i_2 j}$, то есть все элементы, находящиеся в одном столбце матрицы (β_{ij}) совпадают.

Рассмотрим α-матрицу $(\gamma_{ij}) \in M^{2n\times 2n}_{\mathcal{A}}$, элементы которой определены правилом

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } i,j \in 1..n \\ \beta_{ii}, & \text{если } i \in 1..n \wedge j = n+i \\ \emptyset, & \text{если } (i\in 1..n \wedge j \neq n+i) \vee (i,j \in n+1..2n) \end{cases}.$$

Обозначим

$$(\alpha^m_{ij}) := (\alpha_{ij})^m = (\alpha_{ij})^{m-1} \odot (\alpha_{ij}) = (\bigcup_{k=1}^{n} \alpha^{m-1}_{ik} \circ \alpha_{kj}),$$

$$(\gamma^m_{ij}) := (\gamma_{ij})^m = (\gamma_{ij})^{m-1} \odot (\gamma_{ij}) = (\bigcup_{k=1}^{2n} \gamma^{m-1}_{ik} \circ \gamma_{kj}),$$

$$(\eta^m_{ij}) := (\alpha_{ij})^m \otimes (\beta_{ij}) = (\alpha^m_{ij} \circ \beta_{ij}).$$

Понятно, что если $i,j \in 1..n$ и $m>1$, то

$$\gamma^m_{ij} := \bigcup_{k=1}^{2n} \gamma^{m-1}_{ik} \circ \gamma_{kj} = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma^{m-1}_{ik} \circ \gamma_{kj} = \bigcup_{k=1}^{n} \alpha^{m-1}_{ik} \circ \alpha_{kj} = \alpha^m_{ij}.$$

Если же $i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$\gamma^m_{ij} := \bigcup_{k=1}^{2n} \gamma^{m-1}_{ik} \circ \gamma_{kj} = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma^{m-1}_{ik} \circ \gamma_{kj} = \gamma^{m-1}_{ij} \circ \beta_{jj} = \alpha^{m-1}_{ij} \circ \beta_{ij} = \eta^{m-1}_{ij}.$$

Положим $\widetilde{\gamma}^m_{ij} := \gamma^m_{i(j+n)}$, при $i,j \in 1..n$, и рассмотрим α-матрицу $(\widetilde{\gamma}^m_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$, являющуюся подматрицей матрицы (γ^m_{ij}).

В силу ранее сказанного справедлива

Лемма 2.3. С учетом введенных обозначений при $m \geqslant 1$ имеет место равенство

$$(\alpha_{ij})^m \otimes (\beta_{ij}) = (\widetilde{\gamma}^{m+1}_{ij}).$$

Из лемм 2.1–2.3 вытекают

Следствие 2.1. G-язык вершинного типа допускает представление

$$L^v_M(G^n_E, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \Omega(L^v_{i,j,m}(G^n_E)) = \bigcup_{(i,j,m)\in M} \alpha^m_{ij} = \bigcup_{(i,j,m)\in M'} \gamma^m_{ij},$$

где

$$(\alpha_{ij}^{m}) := \begin{cases} (\alpha_{ij}^{g^n})^m \otimes (\alpha_{ij}^{\mathcal{A}})^T, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ (\alpha_{ij}^{\mathcal{A}}), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases},$$

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} \alpha_{ij}^{g^n}, & \text{если } i,j \in 1..n \\ \alpha_{ii}^{\mathcal{A}}, & \text{если } i \in 1..n \wedge j = n+i \\ \emptyset, & \text{если } (i \in 1..n \wedge j \neq n+i) \vee (i,j \in n+1..2n) \end{cases},$$

$$M' := \begin{cases} \{(i, j+n, m+1) \mid (i,j,m) \in M\}, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ \{(i, i+n, m+1) \mid (i,j,m) \in M\}, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

Следствие 2.2. Определенный в замечании 3.1 G-язык вершинного типа допускает представление

$$L_M^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \Omega(L_{i,j,m}^v(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m)\in M} \alpha_{ij}^m = \bigcup_{(i,j,m)\in M'} \gamma_{ij}^m,$$

где

$$(\alpha_{ij}^{m}) := \begin{cases} (\alpha_{ij}^{g^n})^m \otimes (\alpha_{ij}^{\mathcal{A}}), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ (\alpha_{ij}^{g^n}), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

$$M' := \begin{cases} \{(i, j+n, m+1) \mid (i,j,m) \in M\}, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ \{(i, j, m+1) \mid (i,j,m) \in M\}, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

Следствие 2.3. Лемма 2.3 и следствия 2.1, 2.2 остаются справедливыми, если определять элементы α-матрицы $(\gamma_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{2n+k\times 2n+k}$ при произвольном $k \in \mathbb{N}$ правилом

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } i,j \in 1..n \\ \alpha_{ii}^{\mathcal{A}}, & \text{если } i \in 1..n \wedge j = n+i \\ \emptyset, & \text{если } (i \in 1..n \wedge j \neq n+i) \vee (i,j \in n+1..2n) \\ \emptyset, & \text{если } i \in 2n+1..2n+k \wedge j \in 1..2n \\ \emptyset, & \text{если } i \in 1..2n+k \wedge j \in 2n+1..2n+k \end{cases}.$$

Пример 2.2.

Рассмотрим порождающий граф G_E^4, α-матрицу и G-языки вершинного типа, определенные в примере 2.1. Соответствующая им матрица (γ_{ij}), фигурирующая в формулировке следствия 2.1, будет иметь вид

$$(\gamma_{ij}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{a\} & \emptyset & \{a\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} & \emptyset & \{b\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a\} & \emptyset & \emptyset & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

При этом выполняются легко проверяемые равенства

$$\begin{aligned} &L_{1,2,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) = \{ab\} = \alpha_{12}^1 = \gamma_{16}^2, \\ &L_{1,3,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) = \{aa\} = \alpha_{13}^1 = \gamma_{17}^2, \\ &L_{2,4,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) = \{ba\} = \alpha_{24}^1 = \gamma_{28}^2, \\ &L_{3,4,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) = \{aa\} = \alpha_{34}^1 = \gamma_{38}^2, \\ &L_{1,4,2}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) = \{aaa, aba\} = \alpha_{14}^2 = \gamma_{18}^3, \end{aligned}$$

где

$$(\gamma_{ij}^2) := (\gamma_{ij})^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aa, ab\} & \emptyset & \{ab\} & \{aa\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aa\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

$$(\gamma^3_{ij}) := (\gamma_{ij})^3 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aaa, aba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

а матрицы (α^1_{ij}), (α^2_{ij}) определены в примере 2.1.

2.2.3. Граф-порожденные грамматики реберного типа

Наряду с маршрутами в вершинной форме на графе G^n_E рассмотрим маршруты в реберной форме. Маршрут в реберной форме на графе G^n_E из вершины i_0 в вершину i_m будем обозначать $\langle [i_0 i_1]..[i_{m-1} i_m]\rangle := = (i_0, i_1), (i_1, i_2), .., (i_{m-2}, i_{m-1}), (i_{m-1}, i_m) \in L^+_E$

Обозначим $L^e_{i,j,m}(G^n_E) \subset L^+_E$– множество маршрутов в реберной форме длины m из вершины i в вершину j. В отличие от предыдущего будем рассматривать только маршруты ненулевой длины.

Как и ранее, зададим конечный алфавит $\mathcal{A} := \{a_1, .., a_{n_1}\}$ мощности $n_1 \leqslant |E|$ возможно содержащий в себе пустое слово ε, и тотальную сюръекцию $\overline{\omega}_E : E \to \mathcal{A}$.

Определим тотальную функцию $\overline{\omega} : L^+_E \to L^*_{\mathcal{A}}$ правилом

$$\overline{\omega}(\langle [i_0 i_1]..[i_{m-1} i_m]\rangle) := \overline{\omega}_E((i_0, i_1)) \circ \overline{\omega}_E((i_1, i_2)) \circ \ldots \circ \overline{\omega}_E((i_{m-1}, i_m)) = \mathrm{w} \in L^*_{\mathcal{A}}.$$

Рассмотрим функцию $\overline{\Omega} : 2^{L^+_E} \to 2^{L^*_{\mathcal{A}}}$, индуцированную функцией $\overline{\omega}$.

Определение 2.3. В предыдущих обозначениях будем называть *граф-порожденными языками реберного типа* или *G-языками e-типа* (*над алфавитом* $\mathcal{A}$) языки

$$L^e_M(G^n_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \overline{\Omega}(L^e_{i,j,m}(G^n_E)),$$

где $\emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N}$. В случае одноэлементных множеств $M = \{(i_0, j_0, m_0)\}$ соответствующие G-языки будем обозначать $L^e_{i_0,j_0,m_0}(G^n_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E)$.

Граф-порожденными грамматиками реберного типа или *G-грамматиками e-типа* (*над алфавитом* $\mathcal{A}$) будем называть четверки $\langle G^n_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E, M\rangle$.

Определим α-матрицу $(\overline{\alpha}^{g^n}_{ij}) \in M^{n\times n}_{\mathcal{A}}$, полагая

$$\overline{\alpha}^{g^n}_{ij} := \begin{cases} \{\overline{\omega}_E((i,j))\}, & \text{если } g^n_{ij} = 1 \wedge i, j \in 1..n \\ \emptyset, & \text{если } g^n_{ij} = 0 \wedge i, j \in 1..n \end{cases}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным при обосновании справедливости леммы 2.1, легко показать, что справедлива

Лемма 2.4. G-язык реберного типа допускает представление

$$L^e_M(G^n_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \overline{\Omega}(L^v_{i,j,m}(G^n_E)) = \bigcup_{(i,j,m)\in M} \overline{\alpha}^m_{ij},$$

где $(\overline{\alpha}^m_{ij}) := (\overline{\alpha}^{g^n}_{ij})^m$.

Пример 2.3.

Рассмотрим порождающий граф G^4_E, определенный в примере 2.1. Зададим алфавит $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$ и тотальную сюръекциию $\overline{\omega}_3 : E \to \mathcal{A}$, полагая

$$\overline{\omega}_E((1, 2)) := a, \overline{\omega}_E((1, 3)) := b, \overline{\omega}_E((2, 4)) := c, \overline{\omega}_E((3, 4)) := c.$$

Матрица $(\overline{\alpha}^{g^4}_{ij})$, фигурирующая в формулировке леммы 2.4, будет иметь вид

$$(\overline{\alpha}^{g^4}_{ij}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

Непустые множества маршрутов в реберной форме длины $m > 0$ на графе G_E^4 и соответствующие им языки имеют вид

$$\begin{aligned}
&L^e_{1,2,1}(G_E^3) = \{(1,2)\},\\
&L^e_{1,3,1}(G_E^3) = \{(1,3)\},\\
&L^e_{2,4,1}(G_E^3) = \{(2,4)\},\\
&L^e_{3,4,1}(G_E^3) = \{(3,4)\},\\
&L^e_{1,4,2}(G_E^3) = \{(1,2)(2,4);(1,3),(3,4)\},\\
&L^e_{1,2,1}(G_E^4,\mathcal{A},\overline{\omega}_E) = \{a\} = \overline{\alpha}_{12},\\
&L^e_{1,3,1}(G_E^4,\mathcal{A},\overline{\omega}_E) = \{b\} = \overline{\alpha}_{13},\\
&L^e_{2,4,1}(G_E^4,\mathcal{A},\overline{\omega}_E) = \{c\} = \overline{\alpha}_{24},\\
&L^e_{3,4,1}(G_E^4,\mathcal{A},\overline{\omega}_E) = \{c\} = \overline{\alpha}_{34},\\
&L^e_{1,4,2}(G_E^4,\mathcal{A},\overline{\omega}_E) = \{ac,bc\} = \overline{\alpha}^2_{14},
\end{aligned}$$

где

$$(\overline{\alpha}^2_{ij}) := (\overline{\alpha}_{ij})^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ac,bc\}\\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset\\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset\\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

2.3. Лемма о вершинном представлении

Определение 2.4. Будем назыаать α-матрицу $(\alpha_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n\times m}$ матрицей вершинного типа, если

$$\forall i \in 1..n, j_1, j_2 \in 1..m\ \alpha_{ij_1} = \alpha_{ij_2}.$$

Рассмотрим матрицу $(\overline{\alpha}_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n\times n}$ и определим алфавит $\mathcal{A} := \bigcup\limits_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha}_{ij}$.

Непустые элементы матрицы $(\overline{\alpha}_{ij})$ будем интерпретировать как метки соответствующих ребер $(i,j) \in E := = \{(i,j) \mid \overline{\alpha}_{ij} \neq \emptyset\}$ графа G_E^n.

Если определить тотальную сюръекцию $\overline{\omega}_E : E \to \mathcal{A}$ правилом $\overline{\omega}_E((i,j)) := \overline{\alpha}_{ij} \neq \emptyset$, то в силу леммы 2.3 порожденные этим графом языки реберного типа будут иметь представление

$$L^e_M(G_E^n,\mathcal{A},\overline{\omega}_n) := \bigcup_{(i,j,m)\in M} \overline{\Omega}(L^v_{i,j,m}(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m)\in M} \overline{\alpha}^m_{ij},$$

где $(\overline{\alpha}^m_{ij}) := (\overline{\alpha}_{ij})^m$.

Обозначим d_i— количество непустых элементов в i-ой строке матрицы $(\overline{\alpha}_{ij})$. Понятно, что $|E| = \sum_{i=1}^n d_i = = d$. Занумеруем ребра графа G_E^n в порядке появления соответвующих им непустых элементов в строках матрицы $(\overline{\alpha}_{ij})$, начиная с первой строки. Таким образом, первые d_1 ребер будут иметь вид $(1, j_s)$ $s \in 1..m_1$, следующие d_2 ребер будут иметь вид $(2, j_s)$ $s \in d_1 + 1..d_1 + d_2$, и т.д.

На множестве E зададим бинарное отношение $R \subseteq E \times E$, полагая, что ребра $e_s := (i_s, j_s)$, $e_k := (i_k, j_k)$ находятся в отношении R, если $j_s = i_k$, то есть, если ребро e_s входит в вершину j_s, а ребро e_k исходит из нее.

На множестве вершин $1..d$ зададим граф-отношение E_R, полагая $(s,k) \in E_R$, если $(e_s, e_k) \in R$.

Определим граф $G^d_{E_R}$. Понятно, что k-ой вершине графа $G^d_{E_R}$ соответствует k-ое ребро графа G_E^n. Зададим метки вершин графа $G^m_{E_R}$ в соответствии с метками ребер графа G_E^n, то есть определим тотальную сюръекцию $\omega_d : 1..d \to \mathcal{A}$, полагая

$$\omega_d(s) := \overline{\alpha}_{i_s j_s} \text{ для всех } s \in 1..d,$$

где $(i_s, j_s) = e_s$— s-ое ребро графа G_E^n.

Пусть (g^d_{sk})— матрица смежности вершин графа $G^d_{E_R}$. Как и ранее, определим α-матрицу $(\alpha^{g^d}_{sk})$, полагая

$$\alpha^{g^d}_{sk} := \begin{cases} \{\omega_d(s)\}, & \text{если } g^d_{sk} = 1 \wedge s,k \in 1..d\\ \emptyset, & \text{если } g^d_{sk} = 0 \wedge s,k \in 1..d \end{cases}.$$

Рассмотрим ребро $e_s := (i_s, j_s)$ графа G_E^n, исходящее из вершины i_s и входящее в вершину j_s. В этом случае $\overline{\alpha}_{i_s j_s} = \overline{\omega}_E((i_s, j_s)) \neq \emptyset$. Если существует ребро $e_k := (j_s, j_k)$ графа G_E^n, исходящее из вершины j_s и входящее в вершину j_k, то $\alpha^{g^d}_{sk} = \omega_d(s) = \overline{\alpha}_{i_s j_s} = \overline{\omega}_E((i_s, j_s)) \neq \emptyset$, в противном случае $\alpha^{g^d}_{sk} = \emptyset$.

Таким образом, элемент α-матрицы $\alpha^{g^d}_{sk}$ содержит слово языка $L^e_{i_s,j_s,1}(G_E^n,\mathcal{A},\overline{\omega}_n)$, соответствующее маршруту длины 1 в реберной форме на графе G_E^n из вершины i_s в вершину j_s, если существует маршрут длины

2 из вершины i_s через вершину j_s в некоторую вершину j_k, и пуст, в противном случае. Это слово также принадлежит языку $L^v_{s,k,0}(G^d_{E_R}, \mathcal{A}, \omega_d)$, то есть соответствует маршруту длины 0 в вершинной форме из вершины s в вершину k на графе $G^d_{E_R}$, если полагать, что этот путь равен s для любой вершины $k \in 1..d$.

Если, как и ранее при доказательстве леммы 2.1, определить α-матрицу $(\alpha^{\mathcal{A}}_{sk}) \in M^{d\times d}_{\mathcal{A}}$, полагая

$$\alpha^{\mathcal{A}}_{sk} := \{\omega_d(s)\}, \text{для всех } s, k \in 1..d,$$

и рассмотреть α-матрицу $(\alpha^1_{sk}) := (\alpha^{g^d}_{sk}) \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{sk})^T$, то

$$\alpha^1_{sk} = \begin{cases} \{\omega(sk)\}, & \text{если } g^d_{sk} = 1 \\ \emptyset, & \text{если } g^d_{sk} = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, элемент α-матрицы α^1_{sk} содержит единственное слово языка $L^v_{s,k,1}(G^d_{E_R}, \mathcal{A}, \omega_d)$, соответствующее маршруту длины 1 в вершинной форме на графе $G^d_{E_R}$ из вершины s в вершину k, если такой маршрут существует, и пуст, в противном случае. Этому маршруту соответствует маршрут длины 2 в реберной форме на графе G^n_E из вершины i_s через вершину j_s в вершину j_k, и, как следствие, слово α^1_{sk} также принадлежит языку $L^e_{i_s,j_k,2}(G^n_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_n)$.

Рассмотрим α-матрицы $(\overline{\alpha}^m_{ij}) := (\overline{\alpha}_{ij})^m$, $(\alpha^m_{sk}) := (\alpha^{g^d}_{sk})^m \otimes (\alpha^{\mathcal{A}}_{sk})^T$.

Обозначим $\overrightarrow{S}(i) := \{s \mid e_s = (i,j)\}$— множество индексов ребер графа G^n_E, исходящих из вершины i, и $\overleftarrow{K}(j) := \{k \mid e_k = (i,j)\}$— множество индексов ребер графа G^n_E, входящих в вершину j. Понятно, что $\overrightarrow{S}(i) = \{s \mid \sum_{m=1}^{i-1} d_m < s \leqslant \sum_{m=1}^{i} d_m\}$.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно показать, что при $m > 1$

$$\overline{\alpha}^m_{ij} = \bigcup_{s\in\overrightarrow{S}(i)\wedge k\in\overleftarrow{K}(j)} \alpha^{m-1}_{sk}.$$

Из сказанного, а также из леммы 2.3 о прямом произведении и ее следствий вытекает

Лемма 2.5. С учетом введенных обозначений при $m > 1$ имеет место равенство

$$\overline{\alpha}^m_{ij} = \bigcup_{s\in\overrightarrow{S}(i)\wedge k\in\overleftarrow{K}(j)} \gamma^m_{s(k+d)},$$

где элементы матрицы вершинного типа $(\gamma_{sk}) \in M^{2d+1\times 2d+1}_{\mathcal{A}}$ заданы правилом

$$\gamma_{sk} := \begin{cases} \alpha_{sk}, & \text{если } s,k \in 1..d \\ \alpha^{\mathcal{A}}_{ss}, & \text{если } s \in 1..d \wedge k = d+s \\ \emptyset, & \text{если } (s \in 1..d \wedge k \neq d+s) \vee (s,k \in d+1..2d) \\ \emptyset, & \text{если } s = 2d+1 \wedge k \in 1..2d \\ \emptyset, & \text{если } s \in 1..2d+1 \wedge k = 2d+1 \end{cases},$$

и $(\gamma^m_{sk}) := (\gamma_{sk})^m$.

Кроме того,

$$\overline{\alpha}_{ij} := \begin{cases} \gamma_{s(s+d)}, & \text{если } (i,j) = e_s \in E \\ \gamma_{(2d+1)(2d+1)}, & \text{если } (i,j) \notin E \end{cases}.$$

Пример 2.4.

Рассмотрим порождающий граф G^4_E, α-матрицу и G-языки реберного типа, определенные в примере 2.3.

Примем следующую нумерацию ребер графа G^4_E:

$$e_1 := (1,2), e_2 := (1,3), e_3 := (2,4), e_4 := (3,4).$$

Бинарные отношения $R \subset E\times E$ и $E_R \subset 1..4\times 1..4$, фигурирующие в предыдущих рассуждениях, будут иметь вид:

$$R := \{(e_1,e_3),(e_2,e_3)\},$$
$$E_R := \{(1,3),(2,3)\}.$$

В этом случае

$$(\alpha^{g^4}_{sk}) = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \quad (\alpha^{\mathcal{A}}_{sk}) = \begin{pmatrix} \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \\ \{b\} & \{b\} & \{b\} & \{b\} \\ \{c\} & \{c\} & \{c\} & \{c\} \\ \{c\} & \{c\} & \{c\} & \{c\} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{S}(1) = \{1,2\}, \overrightarrow{S}(2) = \{3\}, \overrightarrow{S}(3) = \{4\}, \overrightarrow{S}(4) = \emptyset,$$
$$\overleftarrow{K}(1) = \emptyset, \overleftarrow{K}(2) = \{1\}, \overleftarrow{K}(3) = \{2\}, \overleftarrow{K}(4) = \{3,4\}.$$

Соответствующая им матрица (γ_{sk}), фигурирующая в формулировке леммы 2.5, будет иметь вид

$$(\gamma_{sk}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \{a\} & \emptyset & \{a\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} & \emptyset & \{b\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

При этом выполняются легко проверяемые равенства

$$\begin{aligned} &L^e_{1,2,1}(G^4_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) = \{a\} = \overline{\alpha}_{12} = \gamma_{15}, \\ &L^e_{1,3,1}(G^4_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) = \{b\} = \overline{\alpha}_{13} = \gamma_{26}, \\ &L^e_{2,4,1}(G^4_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) = \{c\} = \overline{\alpha}_{24} = \gamma_{37}, \\ &L^e_{3,4,1}(G^4_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) = \{c\} = \overline{\alpha}_{34} = \gamma_{48}, \\ &L^e_{1,4,2}(G^4_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) = \{ac, bc\} = \overline{\alpha}^2_{14} = \bigcup_{s\in\{1,2\}\wedge k\in\{3,4\}} \gamma^2_{s(k+4)}, \end{aligned}$$

где

$$(\gamma^2_{sk}) := (\gamma_{sk})^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ac\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{bc\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

а матрицы $\overline{\alpha}^1_{ij})$, $(\overline{\alpha}^2_{ij})$ определены в примере 2.3.

Непосредственным следствием леммы 2.5 является

Лемма 2.6. Классы G-языков вершинного и реберного типов совпадают.

Пример 2.5.

Рассмотрим порождающий граф G^2_E, заданный граф-отношением

$$E := \{(1, 2)\} \subset 1..2 \times 1..2,$$

с матрицей смежности вершин

$$(g^2_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим алфавит $\mathcal{A} := \{a, \varepsilon\}$ и тотальные сюръекции $\omega_2 : 1..2 \to \mathcal{A}$, $\overline{\omega}_2 : E \to \mathcal{A}$, полагая

$$\omega_2(1) := \varepsilon,\ \omega_2(2) := a;\ \overline{\omega}_E((1, 2)) := \varepsilon.$$

В данном случае матрицы $(\alpha^{g^2}_{ij})$, $(\alpha^{\mathcal{A}}_{ij})$, $(\overline{\alpha}^{g^2}_{ij})$, фигурирующие в формулировках лемм 2.1 и 2.4 будут иметь вид

$$(\alpha^{g^2}_{ij}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{\varepsilon\} \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},\quad (\alpha^{\mathcal{A}}_{ij}) := \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{\varepsilon\} \\ \{a\} & \{a\} \end{pmatrix},\quad (\overline{\alpha}^{g^2}_{ij}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{\varepsilon\} \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Понятно, что $L^v_{1,1,0}(G^2_E, \mathcal{A}, \omega_2) = \{\varepsilon\}$ и $L^e_{1,1,1}(G^2_E, \mathcal{A}, \overline{\omega}_E) = \{\varepsilon\}$.

Пример 2.6.

Рассмотрим алфавит $\mathcal{A}$ и непустое слово $\mathrm{w} \in L^+_{\mathcal{A}}$ длины $|\mathrm{w}| = n$.

Зададим вспомогательный алфавит $\mathcal{A}_1 := \{\mathrm{w}[i] \mid i = 1..n\}$, где $\mathrm{w}[i]$— i-ая буква слова w.

Зададим порождающий граф G^n_E при помощи граф-отношения

$$E := \{(1, 2), (2, 3), .., (i - 1, i), .., (n - 1, n)\} \subset 1..n \times 1..n,$$

и определим тотальную сюръекцию $\omega_n : 1..n \to \mathcal{A}_1$, полагая

$$\omega_n(i) := \mathrm{w}[i], \text{для всех } i \in 1..n.$$

Понятно, что $L^v_{1,n,n-1}(G^n_E, \mathcal{A}_1, \omega_n) = \{\mathrm{w}\}$.

Также зададим порождающий граф G_E^{n+1} при помощи граф-отношения

$$E := \{(1,2),(2,3),..,(i-1,i),..,(n,n+1)\} \subset 1..n+1 \times 1..n+1.$$

и определим тотальную сюръекцию $\overline{\omega}_{n+1} : E \to \mathcal{A}_1$, полагая

$$\overline{\omega}_E((i,i+1)) := \mathrm{w}[i], \text{для всех } i \in 1..n.$$

Понятно, что $L^e_{1,n+1,n}(G_E^{n+1}, \mathcal{A}_1, \overline{\omega}_E) = \{\mathrm{w}\}$.

Непосредственно из результатов примеров 2.5, 2.6 следует

Лемма 2.7. Любой конечный язык над алфавитом $\mathcal{A}$ является G-языком (вершинного, реберного типа).

2.4. Матрично порожденные грамматики

Способ представления G-языков при помощи элементов степеней α-матриц специального вида допускает естественное обобщение на случай произвольных языков.

С учетом предыдущих результатов, дадим следующее

Определение 2.5. Пусть $\{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^{\infty}$ — последовательность α-матриц согласованных размерностей над алфавитом $\mathcal{A}$, то есть $(\alpha_{ij})_s \in M_{\mathcal{A}}^{n_s \times m_s}$ и $n_{s+1} = m_s$. *Матрично порожденными языками* или *M_α-языками* (*над алфавитом* $\mathcal{A}$) будем называть языки

$$L_M(\{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^{\infty}, \mathcal{A}) := \bigcup_{(i,j,k)\in M} \alpha_{ij}^k,$$

где $M \subseteq 1..n_1 \times 1..m_k \times \mathbb{N}$ и

$$(\alpha_{ij}^k) := \bigodot_{s=1}^{k} (\alpha_{ij})_s := (\alpha_{is_1})_1 \odot .. \odot (\alpha_{s_{k-1}j})_k.$$

В случае одноэлементного множества $M = \{(i_0, j_0, k_0)\}$ соответствующие M_α-языки будем обозначать $L_{i_0,j_0,k_0}(\{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^{\infty}, \mathcal{A})$.

Матрично порожденными грамматиками или *M_α-грамматиками* (*над алфавитом* $\mathcal{A}$) будем называть тройки $\langle \{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^{\infty}, \mathcal{A}, M \rangle$. Матрицы $(\alpha_{ij})_s$ будем называть *базисными порождающими матрицами.*

Пример 2.7.

При произвольном $M \subseteq 1..3 \times 1..3 \times \mathbb{N}$ определим M_α-грамматики полагая

$$(\alpha_{ij})_{2s} := \begin{pmatrix} \{aa\} & \{a, aba\} & \emptyset \\ \{bbb, aaa, ab\} & \emptyset & \{b\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{\varepsilon, a, b\} \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_{ij})_{2s+1} := \begin{pmatrix} \{ab, \varepsilon\} & \{b\} & \{\varepsilon\} \\ \{a, b, \varepsilon\} & \{a\} & L^*_{\mathcal{A}} \\ \{bb, aa\} & \{\varepsilon\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}.$$

При исследовании матрично порожденных грамматик естественно использовать графовые интерпретации базисных матриц $(\alpha_{ij}^{(s)}) := (\alpha_{ij})_s$, а именно, в случае $n_s = m_s$ можно трактовать их непустые элементы, как вершинные или реберные метки $G^{n_s}_{E(\alpha^{(s)})}$, заданого граф-отношением

$$E(\alpha^{(s)}) := \{(i,j) \mid \alpha_{ij}^{(s)} \neq \emptyset\} \subseteq 1..n_s \times 1..n_s.$$

В случае $n_s \neq m_s$ рассматриваются ребра соответствующих двудольных графов.

Нетрудно понять, что G-языки обоих типов являются частным случаем M_α-языков, а приведенные выше леммы при соответствующих ограничениях допускают обобщение на случай α-матриц общего вида.

Литература

[1] Цветов В.П. Об одном надклассе А-грамматик. // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. №10 (121). С. 102–108.

[2] Golan J.S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Pitman, 1991. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math.; Vol. 54).

[3] Hebisch U., Weinert H.J. Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science. Singapore: World Scientific, 1998.

[4] Молчанов В.А. О матричных полугруппах над полукольцами и их приложения к теории формальных языков // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 3. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. С. 98–101.

[5] Маслов В.П., Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.

[6] Формальные языки и автоматы I: полукольца Конвея и конечные автоматы / С.И. Алешников [и др.] // Вестник Калининградского государственнного университета. 2003. Вып. 3. С. 7–38.

[7] Формальные языки и автоматы II: непрерывные полукольца и алгебраические системы / С.И. Алешников [и др.] // Вестник Калининградского государственнного университета. 2005. Вып. 1–2. С. 19–45.

[8] Исмагилов Р.С., Мастихина А.А. К вопросу частичного угадывания формальных языков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 2. С. 3-–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-3-15.

[9] Бисеров Д.С., Игудесман К.Б. Матрицы над полукольцом бинарных отношений и V-компонентные фракталы // Изв. вузов. Матем. № 5. 2011. С. 75–79.

[10] Цветов В.П. О специальном сужении конечного рефлексивного симметричного отношения до отношения эквивалентности // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2006. № 4 (44). С. 26–47.

References

[1] Tsvetov V.P. *Ob odnom nadklasse A-grammatik* [On a superclass of A-grammars]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 10(121), pp. 102–108 [in Russian].

[2] Golan J.S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Pitman, 1991. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math.; Vol. 54) [in English].

[3] Hebisch U., Weinert H.J. Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science. Singapore: World Scientific, 1998 [in English].

[4] Molchanov V.A. *O matrichnykh polugruppakh nad polukol'tsami i ikh prilozheniia k teorii formal'nykh iazykov* [On matrix semigroups over semirings and their applications to the theory of formal languages]. *Matematika. Mekhanika. Sbornik nauchykh trudov. Vyp.* [Mathematics. Mechanics. Collection of Scientific Papers. Issue 3]. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2001, pp. 98–101 [in Russian].

[5] Maslov V.P., Kolokoltsov V.N. *Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its application in optimal control]. M.: Nauka, 1994 [in Russian].

[6] Aleshnikov S.I., Boltnev Yu.F., Ezik Z. et al. Formal'nye iazyki i avtomaty I: polukol'tsa Konveia i konechnye avtomaty [Formal languages and automata I: Conway semirings and finite state machines]. *Vestnik Kaliningradskogo gosudarstvennogo universiteta* [IKBFU's Vestnik], 2003, Issue 3, pp. 7–38 [in Russian].

[7] Aleshnikov S.I., Boltnev Yu.F., Ezik Z. et al. *Formal'nye iazyki i avtomaty II: nepreryvnye polukol'tsa i algebraicheskie sistemy* [Formal languages and automata II: continuous semirings and algebraic systems]. *Vestnik Kaliningradskogo gosudarstvennogo universiteta* [IKBFU's Vestnik], 2003, Issue 1–2, pp. 19–45 [in Russian].

[8] Ismagilov R.S., Mastikhina A.A. *K voprosu chastichnogo ugadyvaniia formal'nykh iazykov* [On the problem of partial guessing of formal languages]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences], 2016, no. 2, pp. 3-–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-3-15 [in Russian].

[9] Biserov D.S., Igudesman K.B. *Matritsy nad polukol'tsom binarnykh otnoshenii i V-komponentnye fraktaly* [Matrices over the semiring of binary relations and V-component fractals]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2011, no. 5, pp. 75–79 [in Russian].

[10] Tsvetov V.P. *O spetsial'nom suzhenii konechnogo refleksivnogo simmetrichnogo otnosheniia do otnosheniia ekvivalentnosti* [On a special restriction of reflexive and symmetric relation to an equivalence relation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2006, no. 4(44), pp. 26–47 [in Russian].

V.P. Tsvetov[2]

ALPHA-MATRIX AND GRAPH-GENERATED GRAMMARS

In this paper we consider the extension of graph-generated grammars based on their matrix representations. We study two classes of graph-generated grammars associated with the vertex and edge marking of graphs. We define alpha-matrices over a semiring of languages specified by finite alphabet $\mathcal{A}$ and then define the corresponding matrix algebras. These concepts are then used for constructive representation of graph-generated languages and research of their equivalence. We define a matrix-generated grammars as a natural superclass of graph-generated grammars. All the proofs are illustrated by examples.

Key words: semirings of languages, formal grammars, generative grammars, graph theory, paths in graphs, labeled graphs, graph-generated grammars, matrix-generated grammars.

Статья поступила в редакцию 21/I/2017.
The article received 21/I/2017.

[2] *Tsvetov Viktor Petrovich* (tsf-su@mail.ru), Department of Information Systems Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.